

Chapitre 3

Identification des Processus ARMA

La méthode d'identification de Box et Jenkins (1976) est fondée sur la comparaison des moments empiriques de la série considérée aux moments théoriques associés aux différentes représentations potentielles. On se concentre ici sur les moments d'ordre deux résumés par la fonction d'autocorrélation (FAC) et la fonction d'autocorrélation partielle (FAP).

1. Fonction d'autocorrélation et fonction d'autocorrélation partielle

1.1. Fonction d'autocorrélation

1.1.1. Définition

Definition 1.1. La fonction d'autocorrélation d'un processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$, de moyenne $E(x_t) = m$, notée $\rho(k)$ ou ρ_k , est définie par $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\rho(k) = \rho_k = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad (1.1)$$

avec $\rho(k) \in [-1, 1]$, et où $\gamma(k) = \gamma_k$ désigne la fonction d'autocovariance, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\gamma(k) = \gamma_k = E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)]$$

Remark 1. Les fonctions $\gamma(k)$ et $\rho(k)$ sont symétriques $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\gamma(k) = \gamma(-k)$ et $\rho(k) = \rho(-k)$

1.1.2. Estimateur

Definition 1.2. L'estimateur de la fonction d'autocorrélation, noté $\hat{\rho}(k)$ ou $\hat{\rho}_k$, obtenu pour un échantillon de T réalisations du processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$, est donné par $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} \quad (1.2)$$

où $\hat{\gamma}(k)$ (ou $\hat{\gamma}_k$) désigne l'estimateur de la fonction d'autocovariance $\forall k \in \mathbb{Z}^+$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (x_t - \bar{x}_t)(x_{t-k} - \bar{x}_{t-k})$$

avec

$$\bar{x}_{t-k} = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} x_t$$

D'après le théorème central limite, la variable centrée t_{ρ_k} suit une loi normale centrée réduite :

$$t_{\rho_k} = \frac{\widehat{\rho}_k - \rho_k}{V(\widehat{\rho}_k)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

où $V(\widehat{\rho}_k)$ désigne l'estimateur de la variance empirique des estimateurs $\widehat{\rho}_k$:

$$V(\widehat{\rho}_k) = \frac{1}{T} \sum_{j=-K}^K \widehat{\rho}_j^2 \quad \text{avec } K < k \quad (1.4)$$

En utilisant la symétrie des ρ_k , on montre que :

$$V(\widehat{\rho}_k) = \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^K \widehat{\rho}_j^2 \right) \quad (1.5)$$

Proposition 1.3. *La statistique de Student associée au test $H_0 : \rho_k = 0$, est donnée par :*

$$t_{\widehat{\rho}_k} = \frac{\widehat{\rho}_k}{V(\widehat{\rho}_k)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Au seuil $\alpha = 5\%$, si $|t_{\widehat{\rho}_k}| \geq 1.96$, on rejette l'hypothèse H_0 , c'est à dire la nullité de ρ_k .

1.2. Fonction d'autocorrélation partielle

1.2.1. Définition

L'autocorrélation partielle d'ordre k désigne la corrélation entre x_t et x_{t-k} obtenue lorsque l'influence des variables x_{t-k-i} , avec $i < k$, a été retirée.

Définition 1.4. *L'autocorrélation partielle d'ordre k d'un processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$, de moyenne $E(x_t) = m$, notée $p(k)$ ou p_k , est définie par le dernier coefficient de la projection linéaire de x_{t+1} sur ces k plus récentes valeurs. $\forall k \in \mathbb{Z}$:*

$$x_{t+1} - m = c_1(x_t - m) + c_2(x_{t-1} - m) + \dots + c_{k-1}(x_{t-k} - m) + p_k(x_{t-k+1} - m) \quad (1.6)$$

ou de façon équivalente par :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdot & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdot & \gamma_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \cdot & \gamma_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \rho_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdot & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \rho_k \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Remark 2. Pour un processus centré, la FAP est une fonction telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $p(k) \in [-1, 1]$

Corollary 1.5. De façon générale, la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus stationnaire $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait la relation

$$p_k = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

avec

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \cdot & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \rho_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \cdot & & \rho_k \end{pmatrix}$$

Remark 3. Les trois premières autocorrélations partielles sont donc déterminées par les relations suivantes :

$$p_1 = \rho_1 \quad (1.9)$$

$$p_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad (1.10)$$

$$p_3 = \frac{\rho_1^3 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2) + \rho_3 (1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 (1 - \rho_2)} \quad (1.11)$$

1.2.2. Estimation

Proposition 1.6. Un estimateur naturel \hat{p}_k de l'autocorrélation partielle p_k du processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ consiste en l'estimateur des MCO du dernier paramètre de la régression :

$$x_{t+1} = \hat{c} + \hat{p}_1 x_t + \hat{p}_2 x_{t-1} + \dots + \hat{p}_k x_{t-k+1} + \hat{\varepsilon}_t \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.12)$$

A partir de la relation (??), une autre façon d'obtenir les estimateurs \widehat{p}_k consiste à utiliser les estimateurs des autocorrélations $\widehat{\rho}_k$ de la façon suivante :

$$\widehat{p}_k = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

avec

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\rho}_1 & \cdot & \widehat{\rho}_{k-1} \\ \widehat{\rho}_1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \widehat{\rho}_{k-1} & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\rho}_1 & \cdot & \widehat{\rho}_1 \\ \widehat{\rho}_1 & 1 & \cdot & \widehat{\rho}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \widehat{\rho}_{k-1} & \cdot & \cdot & \widehat{\rho}_k \end{pmatrix}$$

1.2.3. Cas particulier d'un AR(p)

Pour un AR(p) les coefficients \widehat{p}_k pour $k > p$, sont distribués selon une loi normale de moyenne nulle et de variance :

$$\text{var}(\widehat{p}_k) \cong \frac{1}{T} \quad \forall k > p$$

2. Les caractéristiques des processus AR(p)

On considère un processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ stationnaire représenté par un AR(p) tel que :

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

avec ε_t i.i.d. $(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On pose

$$\Phi(L)x_t = c + \varepsilon_t$$

avec

$$\Phi(L) = \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 \dots - \phi_p L^p$$

avec $\phi_0 = 1$.

Si le processus x_t est stationnaire, alors toutes les racines du polynôme $\Phi(L)$ sont strictement supérieures à 1 en module, ce qui implique en particulier que $\Phi(1) \neq 0$, dès lors

$$m = E(x_t) = \frac{c}{\Phi(1)} = \frac{c}{\phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i} = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 \dots - \phi_p} \quad (2.1)$$

2.1. Fonction d'autocorrélation

Proposition 2.1. *Les autocovariances et les autocorrélations d'un processus AR(p) ($x_t, t \in \mathbb{Z}$) satisfont la même équation aux différences homogènes que le processus lui-même.*

2.1.1. Fonction d'autocovariance

On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'autocovariance

$$\gamma_k = E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)] \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Proposition 2.2. *La fonction d'autocovariance γ_k d'un processus AR(p) ($x_t, t \in \mathbb{Z}$) satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 - \dots - \phi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p} & k > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$

Preuve : On considère la définition de x_t :

$$x_t = c + \phi_1x_{t-1} + \dots + \phi_px_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

D'après la définition de la fonction γ_k , on a $\forall k > 0$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)] \\ &= E(cx_{t-k}) + \phi_1E(x_{t-1}x_{t-k}) + \dots + \phi_pE(x_{t-p}x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k}) \\ &= \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p} \end{aligned}$$

puisque $E(\varepsilon_t x_{t-k}) = 0$ car x_{t-k} ne dépend que des ε_{t-k-j} avec $j \geq 0$. De la même façon :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[(x_t - m)^2] = E(cx_t) + \phi_1E(x_{t-1}x_t) + \dots + \phi_pE(x_{t-p}x_t) + E(\varepsilon_t x_t) \\ &= \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p} + E(x_t \varepsilon_t) \\ &= \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p} + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

car $E(x_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ puisque x_t peut s'écrire sous la forme d'une somme pondérée des chocs passés (théorème de Wold) :

$$x_t = \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{avec } \theta_0 = 1$$

2.1.2. Fonction d'autocorrélation

On sait que par définition :

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad (2.5)$$

Proposition 2.3. La fonction d'autocorrélation, notée $\rho(k)$ ou ρ_k , d'un processus AR(p) ($x_t, t \in \mathbb{Z}$) satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$\Phi(L)\rho_k = 0 \iff \rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p} & \forall k \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (2.6)$$

Ces relations sont connues sous le nom d'équations de Yule-Walker .

L'autocorrélation d'ordre k est donc déterminée par une équation aux différences homogènes d'ordre k dont on peut donner la solution générale.

Proposition 2.4. Si le polynôme $\Phi(L)$ admet p racines distinctes $(\lambda_i)_{i=1}^p$, l'autocorrélation d'ordre k est déterminée par la relation

$$\rho_k = A_1 \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^k + A_2 \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^k + \dots + A_p \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^k \quad (2.7)$$

où les paramètres $(A_i)_{i=1}^p$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Corollary 2.5. Suivant les valeurs des racines λ_i on obtient deux cas :

- Si λ_i est une racine réelle telle que $|\lambda_i| > 1$, alors le produit $A_i\lambda_i^{-k}$ décroît avec k et tend vers 0 (exponentielle amortie).
- Si λ_i est une racine complexe de module strictement supérieur à l'unité, on obtient alors une sinusoïde amortie.

2.2. Fonction d'autocorrélation partielle

Proposition 2.6. Les autocorrélations partielles, notés p_k , d'un processus $AR(p)$ $x_t = c + \phi_1 x_{t-1} \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$ sont nulles pour tout ordre supérieur à p ($p_k = 0, \forall k > p$) et non nulles pour tout ordre inférieur à p . De plus on a

$$p_p = \phi_p \quad (2.8)$$

Preuve : Il suffit d'identifier membres à membres les termes de la définition de la FAC et celle du processus x_t .

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

ce qui peut se récrire sous la forme

$$x_{t+1} - m = \phi_1 (x_t - m) \dots + \phi_p (x_{t-p+1} - m) + \varepsilon_t$$

Dès lors le dernier coefficient de la projection linéaire de x_{t+1} sur les p plus récentes valeurs est égal à ϕ_p .

Remark 4. La fonction d'autocorrélation partielle d'un $AR(p)$ s'annule à l'ordre $p + 1$

3. Les caractéristiques des processus $MA(q)$

On considère un processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ stationnaire, d'espérance $E(x_t) = m$, représenté par un $MA(q)$ tel que :

$$x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (3.1)$$

avec ε_t *i.i.d.* $(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On pose

$$x_t = c + \Theta(L) \varepsilon_t$$

avec

$$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 \dots - \theta_p L^p$$

avec $\theta_0 = 1$.

3.1. Fonction d'autocorrélation

3.1.1. Fonction d'autocovariance

Proposition 3.1. La fonction d'autocovariance γ_k d'un processus $MA(q)$ ($x_t, t \in \mathbb{Z}$) défini par $x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$ est donnée par la relation :

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q) \sigma_\varepsilon^2 & 0 < k \leq q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (3.2)$$

Preuve : Pour obtenir ce résultat, il suffit de rappeler que $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = 0$ si $j \neq 0$ et $E(\varepsilon_{t-j}^2) = \sigma_\varepsilon^2, \forall j$. On a :

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)] \\ &= E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1\varepsilon_{t-1-k} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q-k})] \end{aligned}$$

En développant cette expression on retrouve le résultat général énoncé ci-dessus.

3.1.2. Fonction d'autocorrélation

Proposition 3.2. La fonction d'autocorrélation ρ_k d'un processus $MA(q)$ ($x_t, t \in \mathbb{Z}$) défini par $x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$ est donnée par la relation :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & 0 < k \leq q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (3.3)$$

Remark 5. La fonction d'autocorrélation d'un $MA(q)$ s'annule à l'ordre $q + 1$

3.2. Fonction d'autocorrélation partielle

Proposition 3.3. La fonction d'autocorrélation partielle p_k d'un processus $MA(q)$ ($x_t, t \in \mathbb{Z}$) défini par $x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$ se comporte comme une exponentielle ou une sinusoidale amortie.

4. Les caractéristiques des processus ARMA (p, q)

On considère un processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ stationnaire, d'espérance $E(x_t) = m$, représenté par un ARMA (p, q) tel que :

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} \dots - \phi_p x_{t-p} = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4.1)$$

avec ε_t *i.i.d.* $(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On pose

$$\Phi(L)x_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t$$

4.1. Fonction d'autocorrélation

4.1.1. Fonction d'autocovariance

Proposition 4.1. *La fonction d'autocovariance γ_k d'un processus stationnaire ARMA (p, q) $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad \forall k > q \quad (4.2)$$

On a donc la même relation de récurrence que pour un AR (p) (équations de Yule Walker), mais cette dernière n'est valable que pour des ordres supérieurs à q . Cette relation n'est pas valable pour $k \leq q$ en raison de la corrélation entre x_{t-j} et $\theta_j \varepsilon_{t-j}$.

4.1.2. Fonction d'autocorrélation

Proposition 4.2. *La fonction d'autocorrélation ρ_k d'un processus stationnaire ARMA (p, q) $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \forall k > q \quad (4.3)$$

Tout comme pour le cas de l'AR (p) , on peut obtenir une solution à cette équation. Lorsque les p racines sont distinctes, cette solution est de la forme

$$\rho_k = A_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^k + A_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^k + \dots + A_p \left(\frac{1}{\lambda_p} \right)^k \quad \forall k > q \quad (4.4)$$

où les paramètres $(A_i)_{i=1}^p$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales et où les paramètres $(\lambda_i)_{i=1}^p$ désignent les p racines distinctes du polynôme associé à la composante

autoregressive du processus : $\Phi(L) = 0$. Mais dans ce cas les valeurs initiales $(\rho_1 \dots \rho_q)$ sont différentes de celles obtenus pour l'AR(p) et les constantes $(A_i)_{i=1}^p$ sont donc elles mêmes différentes.