

Séries temporelles linéaires
 Corrigé des travaux dirigés n°1

Guillaume Lacôte

Bureau E03

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Corrigé de l'exercice 1

Rappels :

- Une suite de variables aléatoires réelles (ou processus) $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dite *du second ordre* si chacune d'elles est de carré intégrable.
- Un processus X est *fortement stationnaire ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n, \forall h \in \mathbb{Z}, \mathcal{L}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}} = \mathcal{L}_{X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}}$$

où \mathcal{L}_Y désigne la loi de Y .

- Un processus X est (*faiblement*) *stationnaire ssi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) \\ \exists \gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+ / \forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \end{array} \right.$$

- Le processus X est un *bruit blanc fort* de variance $\sigma^2 \geq 0$ ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ (X_t)_t \text{ est i.i.d} \end{array} \right.$$

- Le processus X est un *bruit blanc (faible)* de variance $\sigma^2 \geq 0$ ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}^*, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0 \end{array} \right.$$

☞ Q1 On a pour $t \in \mathbb{Z}$

- $\mathbb{E}(X_t) = 0$
 - $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$ par indépendance
 - Enfin $\text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = -\sigma^2$ et $\forall h \geq 2, \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = 0$
- X est donc stationnaire.

☞ Q2 On a successivement pour $t \in \mathbb{Z}$:

- $\mathbb{E}(X_t) = a + b\mathbb{E}(\epsilon_t) + c\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = a$
- $\mathbb{V}(X_t) = 0 + b^2\mathbb{V}(\epsilon_t) + c^2\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (b^2 + c^2)\sigma^2$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non-corrélés
- Par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) &= \text{Cov}(a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}, a + b\epsilon_{t-1} + c\epsilon_{t-2}) \\ &= b^2\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) + bc\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-2}) + cb\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) + c^2\text{Cov}(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}) \\ &= bc\sigma^2 \end{aligned}$$

- Enfin $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0, \forall h \geq 2$
- Le processus X est donc stationnaire.

☞ Q3 On a de façon similaire pour $t \in \mathbb{Z}$:

- $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t)\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non-corrélés

- Si ϵ est un bruit blanc fort, ϵ_t^2 est indépendant de ϵ_t^2 et donc $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t)\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (\sigma^2)^2$.
En revanche si ϵ_t et ϵ_{t-1} sont décorrélés mais pas indépendants on ne peut rien dire : il existe un bruit blanc faible ϵ tel que $\mathbb{E}(\epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2)$ dépend de t .¹
- Enfin pour $\forall h \in \mathbb{Z}$ et si ϵ est un bruit blanc fort

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t-1} \epsilon_{t+h} \epsilon_{t+h-1}) \\ &= \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

En revanche il existe un bruit blanc faible ϵ tel que $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$ dépend de t .²
Le processus X est donc stationnaire **si ϵ est un bruit blanc fort**, et il existe au moins un bruit blanc faible ϵ tel que X n'est **pas** stationnaire.

- Q4 X est une marche aléatoire. On a plus précisément
- On a $\mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(X_{t-1}) = 0$ et donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$.
 - Par ailleurs $X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0$; Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0\right) \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \mathbb{V}(\epsilon_{t-i}) + \mathbb{V}(X_0) \quad \text{car } \underbrace{\epsilon_{t-i} \perp\!\!\!\perp X_0}_{>0} \\ &= t\sigma^2 + \mathbb{V}(X_0) \end{aligned}$$

En particulier $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 + \mathbb{V}(X_0) > \mathbb{V}(X_0)$ et donc X n'est **pas** stationnaire.

- Q5 Pour $t \in \mathbb{Z}$ on a
- $\mathbb{E}(X_t) = 0$
 - $\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2$
 - $\text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = 0$ si $h \geq 2$
 - Par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) &= \sigma^2 \sin(ct) \cos(c(t-1)) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (\sin(ct + c(t-1)) + \sin(ct - c(t-1))) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (\sin(c(2t-1)) + \sin(c)) \end{aligned}$$

En particulier pour que X soit stationnaire il faut et il suffit que $u_t = \forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1))$ ne dépende pas de t , donc en particulier que $\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = u_1$ ce qui s'écrit $\forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1)) =$

¹Par exemple $X_{2t} = 1$ et $X_{2t+1} = \frac{1}{2}\delta_t + \frac{1}{2}\delta_{-t}$ la binomiale qui vaut -1 ou 1 de façon équiprobable. Alors $\mathbb{E}(X_t X_{t+1}) = \mathbb{E}(X_{2t} X_{2t+1}) = 0$ mais $\mathbb{E}(X_{2t}^2 X_{2t+1}^2) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(-t)^2 = t^2$ et $\mathbb{E}(X_{2t-1}^2 X_{2t}^2) = \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2}(-t-1)^2 = (t-1)^2$ qui dépend de t à tout $t \in \mathbb{Z}$.

²Reprenant le contre-exemple ci-dessus on a $\text{Cov}(X_{2t+1}, X_{2t+2}) = \mathbb{E}(\epsilon_{2t}\epsilon_{2t+1}\epsilon_{2t+2}) = \mathbb{E}(\epsilon_{2t+1}^2) = (2t+1)^2$.

sin c soit

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(c) - \sin((2t-1)c) \\ &= 2 \sin\left(\frac{1-(2t-1)c}{2}\right) \cos\left(\frac{1+(2t-1)c}{2}\right) \\ &= -2 \sin((t+1)c) \cos(tc) \\ &\text{soit } (t+1)c \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } tc \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $t \in \mathbb{Z}$ il faut et il suffit donc que $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Donc X est stationnaire ssi $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

- Q6 - On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=0}^t \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1}) \\ &= \epsilon_t + \sum_{i=1}^t (\lambda^i - \lambda^{i-1}) \epsilon_{t-i} - \lambda^t \epsilon_{-1} \quad (\text{"transformation d'Abel"}) \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X_t) = 0$ et par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t) &= \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^t (\lambda^i - \lambda^{i-1})^2 + \lambda^{2t}\right) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^t (\lambda^{i-1})^2 (\lambda - 1)^2 + \lambda^{2t}\right) \\ &= \sigma^2 \left(1 + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=0}^{t-1} (\lambda^2)^i + \lambda^{2t}\right) \\ &= \sigma^2 \left(1 + (\lambda - 1)^2 \frac{1 - \lambda^{2t}}{1 - \lambda^2} + \lambda^{2t}\right) \\ &= \sigma^2 \left(1 + \frac{(1 - \lambda)(1 - \lambda^{2t})}{1 + \lambda} + \lambda^{2t}\right) \\ &= 2\sigma^2 \frac{1 + \lambda^{2t+1}}{1 + \lambda} \end{aligned}$$

En particulier pour que X soit stationnaire, il faut que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

Réciproquement si $\lambda = 1$, alors $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t - \epsilon_{-1}$ et donc X est stationnaire.

- Constatant que $2\sigma^2 \frac{1 + \lambda^{2t+1}}{1 + \lambda} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{2\sigma^2}{1 + \lambda}$, on pose $Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$ (qui existe car série est normalement convergente car $|\lambda| < 1$). On a par construction $\mathbb{V}(Y_t) = \frac{2\sigma^2}{1 - \lambda}$.
On a par ailleurs $Y_t = \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i}$.

Par conséquent pour $h \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) &= \text{Cov} \begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+h-i} \end{pmatrix} \\ &= \text{Cov} \begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{h-1} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+h-i} + (\lambda - 1) \sum_{i=h}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-(i-h)} \end{pmatrix} \\ &= \text{Cov} \begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \\ \epsilon_{t+h} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq h-1 \\ j \geq 1}} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+h-j} + (\lambda - 1) \lambda^{h-1} \epsilon_t + (\lambda - 1) \lambda^h \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^{j-1} \epsilon_{t-j} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \lambda^{h-1} \mathbb{V}(\epsilon_t) + (\lambda - 1)^2 \lambda^h \mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \right) \\ &= (\lambda - 1) \lambda^{h-1} \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \lambda^h \frac{1}{1 - \lambda} \sigma^2 \\ &= -(1 - \lambda)^2 \lambda^{h-1} \sigma^2 \end{aligned}$$

et donc Y est bien stationnaire.

Autre méthode :

On a $Y = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i L^i (\mathbf{1} - L) \circ \epsilon = (\mathbf{1} + \sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda^i - \lambda^{i+1}) L^i) \circ \epsilon$ et donc $Y - \epsilon$ est la transformée moyenne mobile infinie du processus stationnaire ϵ avec les coefficients $\sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda^i - \lambda^{i+1})$. Comme la série $\sum_i (\lambda^i - \lambda^{i+1})$ est absolument convergente, Y est stationnaire.

Enfin on a

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_t - X_t) &= \mathbb{V} \left((\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} + \lambda^t \epsilon_{t-1} \right) \\ &= \lambda^t \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \mathbb{V}(\epsilon_{t-i}) \\ &= \lambda^t \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \frac{1}{1 - \lambda} \lambda^{t+1} \sigma^2 \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t - X_t) &= \mathbb{E} \left((\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} + \lambda^t \epsilon_{t-1} \right) \\ &= (\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-i})}_{=0} + \lambda^t \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-1})}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

on a ³

$$(X_t - Y_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{L^2} (0)$$

Q7 Non en général : considérer par exemple X_t stationnaire d'espérance nulle, et $Y_t = (-1)^t X_t$ alors $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = (-1)^t (-1)^{t+h} \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = (-1)^h \gamma_X(h)$ donc Y stationnaire, et de plus

$$X_t + Y_t = \begin{cases} 2X_t & \text{si } t \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $\text{Cov}(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = 4\gamma_X(h) \mathbf{1}_{t \in 2\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{h \in 2\mathbb{Z}}$ qui dépend non-seulement de h mais aussi de t .

En revanche la somme de deux processus (faiblement ou fortement) stationnaires **non-corrélés** est faiblement stationnaire : si $\forall t, t', X_t \perp\!\!\!\perp Y_{t'}$ alors

$$\text{Cov}(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) + \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$$

La somme de deux processus fortement stationnaires et **indépendants** est fortement stationnaire.

*
* *

Corrigé de l'exercice 2

Q1 Les composantes saisonnières ne sont pas identifiables : en effet les processus définis par $a, b, (s_t - \mu)_t$ et $a + \mu, b, (s_t - \mu)_t$ sont égaux pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Il est néanmoins naturel de supposer que le processus saisonnier est "centré" sur une période *i.e.*

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad s_t + s_{t+1} + s_{t+2} + s_{t+3} = 0$$

(le processus s étant de période 4 cette quantité ne dépend de toute façon pas de la date t).

Q2 On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Y_t &= a + b \frac{t + (t-1) + (t-2) + (t-3)}{4} + M_4(s)_t + M_4(u)_t \\ &= (a - \frac{6}{4}b) + bt + \underbrace{M_4(s)_t}_{=0 \text{ par hypothèse}} + M_4(u)_t \\ &= \mu + bt + v_t \end{aligned}$$

avec $\mu = a - \frac{3}{2}b$ indépendant de t et $v = M_4(u)$ est stationnaire (c'est un MA(3) mais pas bruit blanc). On a ainsi désaisonnalisé la série X et fait apparaître la tendance déterministe $\mu + bt$.

³La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \bar{Z} dans \mathcal{L}^2 ssi $\|Z_n\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{Z}$ soit $\mathbb{E}(Z_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{Z}$ soit $\mathbb{V}(Z_n) + \mathbb{E}(Z_n)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{Z}$ soit $\mathbb{V}(Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{Z}$ et $\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{Z}$

☞ Q3 On a immédiatement pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\Delta(Y)_t = b + \Delta(v)_t = b + \frac{u_t - u_{t-4}}{4}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} - \mathbb{E}(Z_t) &= b \\ - \mathbb{V}(Z_t) &= \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{8} \\ - \text{Cov}(Z_t, Z_{t-h}) &= \text{Cov}\left(\frac{u_t - u_{t-4}}{4}, \frac{u_{t-h} - u_{t-h-4}}{4}\right) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{16} & \text{si } h = \pm 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{En particulier le processus } Z \text{ est stationnaire, d'auto-corrélation } \rho_Z(h) = \frac{\gamma_Z(h)}{\gamma_Z(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h = \pm 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*
* *

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 On a successivement pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} - \mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(\epsilon_t) - \theta \mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0 \\ - \mathbb{V}(X_t) &= \mathbb{V}(\epsilon_t) + \theta^2 \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2 \\ - \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) &= \text{Cov}(\epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-h} - \theta \epsilon_{t-h-1}) = \begin{cases} -\theta \sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier X est stationnaire.

☞ Q2 On a par définition pour $t \in \mathbb{Z}$ $\hat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^T \phi_k X_k$.

Alors pour $k \in \llbracket 1, T \rrbracket$

$$\text{Cov}\left(\left(X_{T+1} - \hat{X}_{T+1}\right), X_k\right) = 0$$

$$\text{soit } \text{Cov}(X_{T+1}, X_k) - \sum_{l=1}^T \phi_l \text{Cov}(X_l, X_k) = 0$$

$$\text{soit } \gamma_X(T+1-k) - \sum_{l=1}^T \phi_l \gamma_X(k-l) = 0$$

ce qui s'écrit compte-tenu de l'expression de γ_X

$$\begin{cases} +\phi_{T-1} \theta \sigma_\epsilon^2 - \phi_T (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2 - \theta \sigma_\epsilon^2 = 0 & \text{lorsque } k = T \\ +\phi_{k-1} \theta \sigma_\epsilon^2 - \phi_k (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2 + \phi_{k+1} \theta \sigma_\epsilon^2 = 0 & \text{lorsque } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ -\phi_1 (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2 + \phi_2 \theta \sigma_\epsilon^2 = 0 & \text{lorsque } k = 1 \end{cases}$$

d'où (puisque $\sigma_\epsilon^2 > 0$)

$$\begin{cases} (1 + \theta^2) \phi_T - \theta \phi_{T-1} = -\theta & \text{lorsque } k = T \\ -\theta \phi_{k+1} + (1 + \theta^2) \phi_k - \theta \phi_{k-1} = 0 & \text{pour } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ (1 + \theta^2) \phi_1 - \theta \phi_2 = 0 & \text{lorsque } k = 1 \end{cases}$$

☞ Q3 Par définition le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m est

$$r(m) = \text{Corr}(X_t - \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-m}), X_{t-m} - \mathbb{E}(X_{t-m} | X_{t-m}, \dots, X_{t-1}))$$

(comme $\mathbb{E}(X_t) = 0$ il n'est pas nécessaire de régresser sur $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$ mais seulement sur $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$). Or il est aussi égal au coefficient de X_{t-m} dans la régression de X_t sur $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$.⁴ On a donc successivement :

- Calcul de $r(1)$:

$$\text{Projetant } X_t \text{ sur } \langle X_{t-1} \rangle \text{ on a } \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}) = \phi_1^{(1)} X_{t-1} \text{ avec } r(1) = \phi_1^{(1)}.$$

Or d'après la question précédente on a $(1 + \theta^2) \phi_1^{(1)} = -\theta$ et donc

$$r(1) = -\frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

- Calcul de $r(2)$:

$$\text{Projetant } X_t \text{ sur } \langle X_{t-1}, X_{t-2} \rangle \text{ on a } \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}) = \phi_1^{(2)} X_{t-1} + \phi_2^{(2)} X_{t-2} \text{ avec } r(2) = \phi_1^{(2)}.$$

Attention : il n'y a aucune raison pour que $\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(2)}$...

On a alors

$$\begin{cases} (1 + \theta^2) \phi_1^{(2)} - \theta \phi_2^{(2)} = -\theta \\ -\theta \phi_1^{(2)} + (1 + \theta^2) \phi_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (1 - \theta + \theta^2) (\phi_1^{(2)} + \phi_2^{(2)}) = -\theta \\ (1 + \theta + \theta^2) (\phi_1^{(2)} - \phi_2^{(2)}) = 0 \end{cases}$$

ce dont on tire que

$$\phi_2^{(2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{1 - \theta + \theta^2} - \frac{\theta}{1 + \theta + \theta^2} \right)$$

soit

$$r(2) = -\frac{\theta^2}{1 + \theta^2 + \theta^4}$$

Remarque : on constate par ailleurs que $\phi_1^{(2)} = -\frac{\theta + \theta^3}{1 + \theta^2 + \theta^4} \neq \phi_1^{(1)}$.

- Calcul de $r(T)$:

$$\text{Projetant } X_t \text{ sur } \langle X_{t-1}, \dots, X_{t-T} \rangle \text{ on a } \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-T}) = \phi_1^{(T)} X_{t-1} + \dots + \phi_2^{(T)} X_{t-2} \text{ avec } r(T) = \phi_1^{(T)}.$$

On a alors

$$\begin{cases} (1 + \theta^2) \phi_1^{(T)} - \theta \phi_2^{(T)} = -\theta & \text{lorsque } k = T \\ -\theta \phi_{k+1}^{(T)} + (1 + \theta^2) \phi_k^{(T)} - \theta \phi_{k-1}^{(T)} = 0 & \text{pour } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ (1 + \theta^2) \phi_1^{(T)} - \theta \phi_2^{(T)} = 0 & \text{lorsque } k = 1 \end{cases}$$

⁴Une preuve en est donnée dans "Séries temporelles et modèles dynamiques", C. Gouriéroux et A. Monfort, V- page 161. Voir aussi l'exercice 4.

ce dont on tire que par récurrence⁵ que

$$r(T) = -\frac{\theta^T}{1 + \theta^2 + \dots + \theta^{2T}}$$

*
* *

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 (a) Remarque : bien-entendu comme X est stationnaire $\rho(m)$ ne dépend pas de t et est donc bien défini.

– $\mathbb{E}(X_t^{*+})$ est la projection orthogonale de X_t sur le sous-espace vectoriel engendré par $(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1})$ pour le produit scalaire $\langle X|Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$. Donc par définition $(X_t - X_t^{*+})$ est orthogonal à $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1} \rangle$, donc en particulier $(X_t - X_t^{*+}) \perp (1)$ ce qui s'écrit $\mathbb{E}(X_t - X_t^{*+}) = 0$.

De $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^{*+})$ on tire alors que

$$\mathbb{E}(X_t) = a_0 + a_1\mathbb{E}(X_{t-1}) + \dots + a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1})$$

et donc, $(X_t)_t$ étant stationnaire,

$$a_0 = (1 - a_1 - \dots - a_{m-1}) \mathbb{E}(X_t)$$

Par ailleurs par définition X_t^{*+} on a $\forall j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $(X_t - X_t^{*+}) \perp X_{t-j}$. Autrement dit pour $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$

$$0 = \mathbb{E}((X_t - X_t^{*+}) \cdot X_{t-j})$$

$$\text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) = a_0 \mathbb{E}(X_t) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \dots + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j})$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) &= (1 - a_1 - \dots - a_{m-1}) \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \dots \\ &\quad + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\ &= \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 (\mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) + \dots \\ &\quad + a_{m-1} (\mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) \end{aligned}$$

$$\text{soit } \gamma_X(j) = a_1 \gamma_X(j-1) + \dots + a_{m-1} \gamma_X(j-m+1)$$

Autrement dit en notant

$$\Gamma_{m-1} = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \dots & \gamma_X(m-2) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \dots & \gamma_X(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(m-2) & \gamma_X(m-3) & \dots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} = \text{Cov}(X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1})$$

⁵Calcul non-détaillé ici. En utilisant l'exercice 4, identifier le coefficient b_k^{t-1} de X_{T-k}^{t-1} dans la régression de X_{T-t} sur $1, X_{T-m+1}, \dots, X_{T-1}$, au coefficient a_{t-k+1}^{t-1} de $X_{T-t+k-1}^{t-1}$ dans la régression de X_T sur $1, X_{T-1}, \dots, X_{T-m+1}$

on a

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}$$

– De façon similaire on a pour $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$

$$0 = \mathbb{E}((X_t - X_t^{*-}) \cdot X_{t-j})$$

$$\text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) = b_0 \mathbb{E}(X_t) + b_1 \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) + \dots + b_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j})$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) &= (1 - b_1 - \dots - b_{m-1}) \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + b_1 \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) + \dots \\ &\quad + b_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) \\ &= \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + b_1 (\mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) + \dots \\ &\quad + b_{m-1} (\mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) \end{aligned}$$

$$\text{soit } \gamma_X(j) = b_1 \gamma_X(j-m+1) + \dots + b_{m-1} \gamma_X(j-1)$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1} \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

– Or Γ_{m-1} est inversible (sauf si le processus est presque-sûrement déterministe)⁶ : en effet dans le cas contraire considérons $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ non tous nuls et tels que

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \begin{pmatrix} \gamma_X(i-1) \\ \vdots \\ \gamma_X(i-m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\forall k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \text{Cov}(X_{t-i}, X_{t-k}) = 0$$

$$\text{soit } \forall k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i}, X_{t-k} \right) = 0$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i}, X_{t-k} \right) = 0$$

$$\text{soit } \mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i} \right) = 0$$

$$\text{donc } \mathbb{V}(X_{t-r} | X_{t-r-1}, \dots, X_{t-m-1}) = 0$$

où r est le numéro du premier λ_k non nul : ainsi le processus X est déterministe (conditionnellement à $m-r$ valeurs initiales)!

⁶Auquel cas bien entendu tous les coefficients de corrélation partielle $r(m)$ sont nuls et l'exercice est trivial.

Par conséquent Γ_{m-1} est inversible et

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = (\Gamma_{m-1})^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

(b) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t^{*+}) &= \mathbb{V}(a_1 X_{t-1} + \dots + a_{m-1} X_{t-m+1}) \\ &= (a_1, \dots, a_{m-1}) \mathbb{V} \left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \\ &= (b_{m-1}, \dots, b_1) \mathbb{V} \left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= (b_{m-1}, \dots, b_1) \mathbb{V} \left(\begin{pmatrix} X_{t-m+1} \\ \vdots \\ X_{t-1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ car } X \text{ stationnaire} \\ &= \mathbb{V}(b_{m-1} X_{t-m+1} + \dots + b_1 X_{t-1}) \\ &= \mathbb{V}(X_t^{*-}) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t^{*+}) + \mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) &= \mathbb{V}(X_t) \text{ car } (X_t - X_t^{*+}) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+} \\ &= \mathbb{V}(X_{t-m}) \text{ car } X \text{ est stationnaire} \\ &= \mathbb{V}(X_t^{*-}) + \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-}) \text{ car } (X_{t-m} - X_t^{*-}) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$$

Q2 (a) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t^{*+} &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1}) \\ &= (c_0 + c_1 X_{t-1} + \dots + c_{m-1} X_{t-m+1}) + \mathbb{E}\mathbb{L}(c_m X_{t-m} | 1, X_{t-m+1}, \dots, X_{t-1}) \\ &\quad + \mathbb{E}\mathbb{L}(u_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1}) \\ &= (c_0 + c_1 X_{t-1} + \dots + c_{m-1} X_{t-m+1}) + c_m X_t^{*-} + 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} X_t - X_t^{*+} &= X_t - (c_0 + c_1 X_{t-1} + \dots + c_{m-1} X_{t-m+1}) - c_m X_t^{*-} \\ &= (c_m X_{t-m} + u_t) - c_m X_t^{*-} \\ &= c_m (X_{t-m} - X_t^{*-}) + u_t \end{aligned}$$

(b) On a

$$\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-})) = \mathbb{E}(c_m (X_{t-m} - X_t^{*-})^2 + c_m u_t (X_{t-m} - X_t^{*-}))$$

Or $u_t \perp\!\!\!\perp \langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1} \rangle$, de sorte que $u_t \perp\!\!\!\perp (X_{t-m} - X_t^{*-})$.

Donc

$$\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-})) = c_m \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$$

Q3 A moins que le processus ne soit dégénéré on a $\mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-}) > 0$ et donc

$$\begin{aligned} r(m) &= c_m \text{ par définition} \\ &= \frac{\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-}))}{\mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})} \\ &= \frac{\mathbb{Cov}((X_t - X_t^{*+}), (X_{t-m} - X_t^{*-}))}{\sqrt{\mathbb{V}(X_t - X_t^{*+})} \sqrt{\mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})}} \text{ car } \mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-}) \\ &= \mathbb{Corr}((X_t - X_t^{*+}), (X_{t-m} - X_t^{*-})) \\ &= \rho(m) \end{aligned}$$

Autrement dit, le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m est le coefficient de X_{t-m} de la régression affine de X_t sur $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$, qui est aussi le coefficient de corrélation de $X_t - X_t^{*+}$ avec $X_{t-m} - X_t^{*-}$.

*
* *