Deuxième année
2005-2005

# Séries temporelles linéaires
## *Enoncé des travaux dirigés n°1*

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

*Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005*



## Enoncé de l'exercice 1

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc (supposé dans $\mathcal{L}^2$) de variance $\sigma^2 > 0$.
Discuter dans chacun des cas suivants de la stationnarité de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

☞ Q1 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$ ?

☞ Q2 Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}$$

est-il (faiblement) stationnaire ?

☞ Q3 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t\epsilon_{t-1}$, si $\epsilon$ est un bruit blanc fort ? Faible ?

☞ Q4 Lorsque $X$ est tel que $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$ (on supposera en outre que $\forall t > 0, \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_0$) ?

☞ Q5 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t \cos(ct) + \epsilon_{t-1}\sin(ct)$ pour $c \in \mathbb{R}$ donné ?

☞ Q6 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter selon $\lambda$) ?
Lorsque $\lambda \in ]-1, 1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire $Y$ tel que $(X_t - Y_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^2} (0)$.

☞ Q7 La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?

---

## Enoncé de l'exercice 2

On considère le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}\ X_t = a + bt + s_t + u_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus saisonnier (périodique) de période 4 et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un br
blanc de variance $\sigma^2$ indépendant de $s$.

☞ Q1 Le modèle est-il correctement paramétré ? Proposer le cas échéant une contrainte naturelle (c
l'on supposera vérifiée par la suite) portant sur $(s_t)_t$.

On définit l'opérateur

$$M_4 : \left( (Z_t)_t \mapsto \left( \frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}}{4} \right)_t \right)$$

et on considère le processus $Y = M_4 X$.

☞ Q2 Donner l'expression de $Y_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$, et justifier l'intérêt de la transformation.

☞ Q3 On définit alors $Z = \Delta Y$.
Montrer que $Z$ est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-corrélation.

## Enoncé de l'exercice 3

On considère le processus défini par $\forall t \in \mathbb{Z}\ X_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in ]-1,+1[$.

☞ Q1 Montrer que $X$ est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-covariance.

☞ Q2 Soient $\phi_T, \phi_{T-1}, \ldots, \phi_1$ les coefficients de la régression linéaire $\widehat{X}_{T+1}$ de $X_{T+1}$ sur $(X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1)$.
Ecrire les conditions d'orthogonalité entre $\left(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1}\right)$ et $< X_T, \ldots, X_1 >$.
En déduire que $(\phi_1, \ldots, \phi_T)$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rl} (1+\theta^2)\,\phi_T - \theta\phi_{T-1} & = -\theta \\ -\theta\phi_{k+1} + (1+\theta^2)\,\phi_k - \theta\phi_{k-1} & = 0 \text{ pour } k \in [\![2, T-1]\!] \\ (1+\theta^2)\,\phi_1 - \theta\phi_2 & = -\theta \end{array}\right.$$

☞ Q3 Déterminer (et si possible calculer) la fonction d'auto-corrélation partielle de $X$.

## Enoncé de l'exercice 4

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire du second ordre.
On note pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t^{*+} = \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\right)$$
$$X_t^{*-} = \mathbb{EL}\left(X_{t-m} | 1, X_{t-m+1}, \ldots, X_{t-1}\right)$$

On note $\rho(m) = \mathbb{C}orr\left(X_t - X_t^{*+}, X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.
On note par ailleurs $r(m)$ le cœfficient d'auto-corrélation partielle d'ordre $m$ de $X$, et on cherche à montrer que $\rho(m) = r(m)$.

☞ Q1 On note pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t^{*+} = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}$$
$$X_t^{*-} = b_0 + b_1 X_{t-m+1} + \cdots + b_{m-1} X_{t-1}$$

(a) Montrer que $(a_1, \ldots, a_{m-1}) = (b_{m-1}, \ldots, b_1)$.

(b) Montrer que $\mathbb{V}\left(X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_t^{*-}\right)$.
En déduire que $\mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.





☞ Q2 On note pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_m X_{t-m} + u_t$$

où $u_t$ est orthogonal à $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$; ainsi par définition $r(m) = c_m$.

(a) Montrer que $\left(X_t - X_t^{*+}\right) = c_m\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) + u_t$.

(b) En déduire que $\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) = c_m \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.

☞ Q3 En déduire que $\rho(m) = r(m)$.