



Deuxième année  
2005-2005

Séries temporelles linéaires  
*Énoncé des travaux dirigés n° 1*

Guillaume Lacôte

 Bureau **E03**

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Enoncé de l'exercice 1

Soit  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit blanc (supposé dans  $\mathcal{L}^2$ ) de variance  $\sigma^2 > 0$ .

Discuter dans chacun des cas suivants de la stationnarité de  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ .

☞ Q1 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$  ?

☞ Q2 Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  défini pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}$$

est-il (faiblement) stationnaire ?

☞ Q3 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t \epsilon_{t-1}$ , si  $\epsilon$  est un bruit blanc fort ? Faible ?

☞ Q4 Lorsque  $X$  est tel que  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$  (on supposera en outre que  $\forall t > 0, \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_0$ ) ?

☞ Q5 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t \cos(ct) + \epsilon_{t-1} \sin(ct)$  pour  $c \in \mathbb{R}$  donné ?

☞ Q6 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \sum_{i=0}^t \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  (discuter selon  $\lambda$ ) ?  
Lorsque  $\lambda \in ]-1, 1[$ , montrer qu'il existe un processus stationnaire  $Y$  tel que  
 $(X_t - Y_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{L^2} (0)$ .

☞ Q7 La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?

Enoncé de l'exercice 2

On considère le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z} X_t = a + bt + s_t + u_t$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(s_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus saisonnier (périodique) de période 4 et  $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc de variance  $\sigma^2$  indépendant de  $s$ .

☞ Q1 Le modèle est-il correctement paramétré ? Proposer le cas échéant une contrainte naturelle (que l'on supposera vérifiée par la suite) portant sur  $(s_t)_t$ .

On définit l'opérateur

$$M_4 : \left( (Z_t)_t \mapsto \left( \frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}}{4} \right)_t \right)$$

et on considère le processus  $Y = M_4 X$ .

☞ Q2 Donner l'expression de  $Y_t$  pour  $t \in \mathbb{Z}$ , et justifier l'intérêt de la transformation.

☞ Q3 On définit alors  $Z = \Delta Y$ .

Montrer que  $Z$  est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-corrélation.

### Énoncé de l'exercice 3

On considère le processus défini par  $\forall t \in \mathbb{Z} X_t = \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$  où  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc et  $\theta \in ]-1, +1[$ .

- ☞ Q1 Montrer que  $X$  est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-covariance.
- ☞ Q2 Soient  $\phi_T, \phi_{T-1}, \dots, \phi_1$  les coefficients de la régression linéaire  $\widehat{X}_{T+1}$  de  $X_{T+1}$  sur  $(X_T, X_{T-1}, \dots, X_1)$ .  
Ecrire les conditions d'orthogonalité entre  $(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1})$  et  $\langle X_T, \dots, X_1 \rangle$ .  
En déduire que  $(\phi_1, \dots, \phi_T)$  vérifie

$$\begin{cases} (1 + \theta^2) \phi_T - \theta \phi_{T-1} = -\theta \\ -\theta \phi_{k+1} + (1 + \theta^2) \phi_k - \theta \phi_{k-1} = 0 \text{ pour } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ (1 + \theta^2) \phi_1 - \theta \phi_2 = -\theta \end{cases}$$

- ☞ Q3 Déterminer (et si possible calculer) la fonction d'auto-corrélation partielle de  $X$ .

### Énoncé de l'exercice 4

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus stationnaire du second ordre.  
On note pour  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t^{*+} &= \mathbb{E}L(X_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1}) \\ X_t^{*-} &= \mathbb{E}L(X_{t-m} | 1, X_{t-m+1}, \dots, X_{t-1}) \end{aligned}$$

On note  $\rho(m) = \text{Corr}(X_t - X_t^{*+}, X_{t-m} - X_t^{*-})$ .

On note par ailleurs  $r(m)$  le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre  $m$  de  $X$ , et on cherche à montrer que  $\rho(m) = r(m)$ .

- ☞ Q1 On note pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t^{*+} &= a_0 + a_1 X_{t-1} + \dots + a_{m-1} X_{t-m+1} \\ X_t^{*-} &= b_0 + b_1 X_{t-m+1} + \dots + b_{m-1} X_{t-1} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $(a_1, \dots, a_{m-1}) = (b_{m-1}, \dots, b_1)$ .
- (b) Montrer que  $\mathbb{V}(X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_t^{*-})$ .  
En déduire que  $\mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$ .

☞ Q2 On note pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_m X_{t-m} + u_t$$

où  $u_t$  est orthogonal à  $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$ ; ainsi par définition  $r(m) = c_m$ .

(a) Montrer que  $(X_t - X_t^{*+}) = c_m (X_{t-m} - X_t^{*-}) + u_t$ .

(b) En déduire que  $\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-})) = c_m \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$ .

☞ Q3 En déduire que  $\rho(m) = r(m)$ .

---