ENSAE

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Réponses question par question des travaux dirigés n°1

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ `http://ensae.no-ip.com/SE206/`

Exercice corrigé 1

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc (supposé dans $\mathcal{L}^2$) de variance $\sigma^2 > 0$.
Discuter dans chacun des cas suivants de la stationnarité de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Rappels :

- Une suite de variables aléatoires réelles (ou *processus*) $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dite *du second or* si chacune d'elles est de carré intégrable.
- Un processus X est *fortement stationnaire ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n,\ \forall h \in \mathbb{Z},\ \mathcal{L}_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}} = \mathcal{L}_{X_{t_1+h},\dots,X_{t_n+h}}$$

  où $\mathcal{L}_Y$ désigne la loi de Y.
- Un processus X est *(faiblement) stationnaire ssi*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) \\ \exists \gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+ \ /\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \forall h \in \mathbb{Z},\ \mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \end{cases}$$

- Le processus X est un *bruit blanc fort* de variance $\sigma^2 \geq 0$ *ssi*

$$\left| \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ (X_t)_t \text{ est i.i.d} \end{array} \right.$$

- Le processus X est un *bruit blanc (faible)* de variance $\sigma^2 \geq 0$ *ssi*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \forall h \in \mathbb{Z}^*,\ \mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) = 0 \end{cases}$$

☞ Q1 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$?

On a pour $t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{E}(X_t) = 0$
- $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$ par indépendance
- Enfin $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-1}) = -\sigma^2$ et $\forall h \geq 2, \mathbb{C}ov(X_t, X_{t-h}) = 0$

X est donc stationnaire.

☞ Q2 Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}$$

est-il (faiblement) stationnaire ?

On a successivement pour $t \in \mathbb{Z}$:
- $\mathbb{E}(X_t) = a + b\mathbb{E}(\epsilon_t) + c\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = a$
- $\mathbb{V}(X_t) = 0 + b^2\mathbb{V}(\epsilon_t) + c^2\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (b^2 + c^2)\,\sigma^2$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non-corrélés

– Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov\,(X_t, X_{t-1}) &= \mathbb{C}ov\,(a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}, a + b\epsilon_{t-1} + c\epsilon_{t-2}) \\ &= b^2\mathbb{C}ov\,(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) + bc\mathbb{C}ov\,(\epsilon_t, \epsilon_{t-2}) + cb\mathbb{V}\,(\epsilon_{t-1}) + c^2\mathbb{C}ov\,(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}) \\ &= bc\sigma^2\end{aligned}$$

– Enfin $\mathbb{C}ov\,(X_t, X_{t+h}) = 0,\ \forall h \geq 2$

Le processus X est donc stationnaire.

☞ Q3 $\boxed{\text{Lorsque } \forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t\epsilon_{t-1}, \text{ si } \epsilon \text{ est un bruit blanc fort ? Faible ?}}$

On a de façon similaire pour $t \in \mathbb{Z}$:

– $\mathbb{E}\,(X_t) = \mathbb{E}\,(\epsilon_t)\mathbb{E}\,(\epsilon_{t-1}) = 0$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non-corrélés
– Si ϵ est un bruit blanc fort, ϵ_t^2 est indépendant de $\epsilon_{t'}^2$ et donc $\mathbb{V}\,(X_t) = \mathbb{V}\,(\epsilon_t)\mathbb{V}\,(\epsilon_{t-1}) = (\sigma^2)^2$. En revanche si ϵ_t et ϵ_{t-1} sont décorrélés mais pas indépendants on ne peut rien dire : il existe un bruit blanc faible ϵ tel que $\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\epsilon_{t-1}^2\right)$ dépend de t. [1]
– Enfin pour $\forall h \in \mathbb{Z}$ et si ϵ est un bruit blanc fort

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov\,(X_t, X_{t+h}) &= \mathbb{E}\,(\epsilon_t\epsilon_{t-1}\epsilon_{t+h}\epsilon_{t+h-1}) \\ &= \begin{cases}\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

En revanche il existe un bruit blanc faible ϵ tel que $\mathbb{C}ov\,(X_t, X_{t+h})$ dépend de t. [2]

Le processus X est donc stationnaire **si ϵ est un bruit blanc fort**, et il existe au moins un bruit blanc faible ϵ tel que X n'est **pas** stationnaire.

☞ Q4 $\boxed{\text{Lorsque } X \text{ est tel que } \forall t \in \mathbb{Z},\ X_t - X_{t-1} = \epsilon_t \text{ (on supposera en outre que } \forall t > 0, \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_0\text{) ?}}$

X est une marche aléatoire. On a plus précisément

– On a $\mathbb{E}\,(X_t) - \mathbb{E}\,(X_{t-1}) = 0$ et donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}\,(X_t) = \mathbb{E}\,(X_0)$.
– Par ailleurs $X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0$; Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\,(X_t) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0\right) \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \mathbb{V}\,(\epsilon_{t-i}) + \mathbb{V}\,(X_0) \quad \text{car } \epsilon_{\underbrace{t-i}_{>0}} \perp\!\!\!\perp X_0 \\ &= t\sigma^2 + \mathbb{V}\,(X_0)\end{aligned}$$

En particulier $\mathbb{V}\,(X_1) = \sigma^2 + \mathbb{V}\,(X_0) > \mathbb{V}\,(X_0)$ et donc X n'est **pas** stationnaire.

[1] Par exemple $X_{2t} = 1$ et $X_{2t+1} = \frac{1}{2}\delta_t + \frac{1}{2}\delta_{-t}$ la binômiale qui vaut -1 ou 1 de façon équiprobable. Alors $\mathbb{E}\,(X_tX_{t+1}) = \mathbb{E}\left(X_{2\lceil\frac{2}{t}\rceil+1}\right) = 0$ mais $\mathbb{E}\left(X_{2t}^2X_{2t+1}^2\right) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(-t)^2 = t^2$ et $\mathbb{E}\left(X_{2t-1}^2X_{2t}^2\right) = \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2}(-(t-1))^2 = (t-1)^2$ qui dépend de t à tout $t \in \mathbb{Z}$.

[2] Reprenant le contre-exemple ci-dessus on a $\mathbb{C}ov\,(X_{2t+1}, X_{2t+2}) = \mathbb{E}\left(\epsilon_{2t}\epsilon_{2t+1}^2\epsilon_{2t+2}\right) = \mathbb{E}\left(\epsilon_{2t+1}^2\right) = (2t+1)^2$.

☞ Q5 $\boxed{\text{Lorsque } \forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t\cos(ct) + \epsilon_{t-1}\sin(ct) \text{ pour } c \in \mathbb{R} \text{ donné ?}}$

Pour $t \in \mathbb{Z}$ on a

– $\mathbb{E}\,(X_t) = 0$
– $\mathbb{V}\,(X_t) = \sigma^2$
– $\mathbb{C}ov\,(X_t, X_{t-h}) = 0$ si $h \geq 2$
– Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov\,(X_t, X_{t-1}) &= \sigma^2\sin(ct)\cos(c(t-1)) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left(\sin(ct + c(t-1)) + \sin(ct - c(t-1))\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left(\sin(c(2t-1)) + \sin(c)\right)\end{aligned}$$

En particulier pour que X soit stationnaire il faut et il suffit que $u_t = \forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1))$
dépende pas de t, donc en particulier que $\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = u_1$ ce qui s'écrit $\forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1)$
$\sin c$ soit

$$\begin{aligned}0 &= \sin(c) - \sin((2t-1)c) \\ &= 2\sin\left(\frac{1-(2t-1)}{2}c\right)\cos\left(\frac{1+(2t-1)}{2}c\right) \\ &= -2\sin((t+1)c)\cos(tc) \\ \text{soit} &\quad (t+1)c \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } tc \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $t \in \mathbb{Z}$ il faut et il suffit donc que $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Donc X est stationnaire *ssi* $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

☞ Q6 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i\left(\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1}\right)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter selon λ) ?
Lorsque $\lambda \in]-1, 1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire Y tel que
$(X_t - Y_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^2} (0)$.

– On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}X_t &= \sum_{i=0}^{t} \lambda^i\left(\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1}\right) \\ &= \epsilon_t + \sum_{i=1}^{t}\left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)\epsilon_{t-i} - \lambda^t\epsilon_{-1} \quad \text{(“transformation d'Abel”)}\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X_t) = 0$ et par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_t) &= \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{t} \left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)^2 + \lambda^{2t}\right) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{t} \left(\lambda^{i-1}\right)^2 (\lambda - 1)^2 + \lambda^{2t}\right) \\
&= \sigma^2 \left(1 + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\lambda^2\right)^i + \lambda^{2t}\right) \\
&= \sigma^2 \left(1 + (\lambda - 1)^2 \frac{1 - \lambda^{2t}}{1 - \lambda^2} + \lambda^{2t}\right) \\
&= \sigma^2 \left(1 + \frac{(1 - \lambda)\left(1 - \lambda^{2t}\right)}{1 + \lambda} + \lambda^{2t}\right) \\
&= 2\sigma^2 \frac{1 + \lambda^{2t+1}}{1 + \lambda}
\end{aligned}$$

En particulier pour que X soit stationnaire, il faut que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.
Réciproquement si $\lambda = 1$, alors $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{-1}$ et donc X est stationnaire.

– Constatant que $2\sigma^2 \frac{1+\lambda^{2t+1}}{1+\lambda} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{2\sigma^2}{1+\lambda}$, on pose $Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i \left(\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1}\right)$ (qui existe car la série est normalement convergente car $|\lambda| < 1$). On a par construction $\mathbb{V}(Y_t) = 2\frac{\sigma^2}{1-\lambda}$.
On a par ailleurs $Y_t = \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i}$.
Par conséquent pour $h \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(Y_t, Y_{t+h}\right) &= \mathbb{C}ov \begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \ , \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+h-i} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{C}ov \begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \ , \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{h-1} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+h-i} + (\lambda - 1) \sum_{i=h}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-(i-h)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{C}ov \begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \ , \\ \epsilon_{t+h} + \sum_{1 \le i \le h-1} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+\underbrace{h-i}_{\ge 1}} + (\lambda - 1)\lambda^{h-1} \epsilon_t + (\lambda - 1)\lambda^h \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^{j-1} \epsilon_{t-\underbrace{j}_{\ge 1}} \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 1)\lambda^{h-1} \mathbb{V}(\epsilon_t) + (\lambda - 1)^2 \lambda^h \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i}\right) \\
&= (\lambda - 1)\lambda^{h-1} \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \lambda^h \frac{1}{1 - \lambda} \sigma^2 \\
&= -(1 - \lambda)^2 \lambda^{h-1} \sigma^2
\end{aligned}$$

et donc Y est bien stationnaire.

Autre méthode :
On a $Y = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i L^i (\mathbb{1} - L) \circ \epsilon = \left(\mathbb{1} + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right) L^i\right) \circ \epsilon$ et donc $Y - \epsilon$ est la transf
mée moyenne mobile infinie du processus stationnaire ϵ avec les cœfficients $\sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda^i - \lambda^{i-}$
Comme la série $\sum_i \left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)$ est absolument convergente, Y est stationnaire.
Enfin on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y_t - X_t) &= \mathbb{V}\left((\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} + \lambda^t \epsilon_{t-1}\right) \\
&= \lambda^t \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \mathbb{V}(\epsilon_{t-i}) \\
&= \lambda^t \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \frac{1}{1 - \lambda} \lambda^{t+1} \sigma^2 \\
&\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_t - X_t) &= \mathbb{E}\left((\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} + \lambda^t \epsilon_{t-1}\right) \\
&= (\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-i})}_{=0} + \lambda^t \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-1})}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

on a [3]

$$\boxed{(X_t - Y_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{L^2} (0)}$$

☞ Q7 **La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?**

Non en général : considérer par exemple X_t stationnaire d'espérance nulle, et $Y_t = (-1)^t X$
alors $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathbb{C}ov(Y_t, Y_{t+h}) = (-1)^t (-1)^{t+h} \mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) = (-1)^h \gamma_X(h)$ donc Y
stationnaire, et de plus

$$X_t + Y_t = \begin{cases} 2X_t \text{ si } t \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et donc $\mathbb{C}ov(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = 4\gamma_X(h) \mathbb{1}_{t \in 2\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{h \in 2\mathbb{Z}}$ qui dépend non-seulement de h m
aussi de t.

En revanche la somme de deux processus (faiblement ou fortement) stationnaires **non-corré**
est faiblement stationnaire : si $\forall t, t'$, $X_t \perp\!\!\!\perp Y_{t'}$ alors

$$\mathbb{C}ov(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = \mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) + \mathbb{C}ov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$$

[3] La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\overline{Z}$ dans $\mathcal{L}^2$ *ssi* $\|Z_n\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{Z}$ soit $\mathbb{E}\left({Z_n}^2\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{Z}$ soit $\mathbb{V}(Z_n) + \mathbb{E}(Z_n)^2$ $\xrightarrow[n \to +\infty]{}$
$\overline{Z}$ soit $\mathbb{V}(Z_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{Z}$ et $\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{Z}$

La somme de deux processus fortement stationnaires et **indépendants** est fortement stationnaire.

Exercice corrigé 2

On considère le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}\ X_t = a + bt + s_t + u_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus saisonnier (périodique) de période 4 et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de s.

☞ Q1 Le modèle est-il correctement paramétré ? Proposer le cas échéant une contrainte naturelle (que l'on supposera vérifiée par la suite) portant sur $(s_t)_t$.

Les composantes saisonnières ne sont pas identifiables : en effet les processus définis par $a, b, (s_t)_t$ et $a+\mu, b, (s_t-\mu)_t$ sont égaux pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

Il est néanmoins naturel de supposer que le processus saisonnier est "centré" sur une période : *i.e.*

$$\forall t \in \mathbb{Z}\ s_t + s_{t+1} + s_{t+2} + s_{t+3} = 0$$

(le processus s étant de période 4 cette quantité ne dépend de tout façon pas de la date t).

On définit l'opérateur

$$M_4 : \left((Z)_t \mapsto \left(\frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}}{4}\right)_t\right)$$

et on considère le processus $Y = M_4 X$.

☞ Q2 Donner l'expression de Y_t pour $t \in \mathbb{Z}$, et justifier l'intérêt de la transformation.

On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Y_t &= a + b\frac{t + (t-1) + (t-2) + (t-3)}{4} + M_4(s)_t + M_4(u)_t \\ &= (a - \frac{6}{4}b) + bt + \underbrace{M_4(s)_t}_{=0 \text{ par hypothèse}} + M_4(u)_t \\ &= \mu + bt + v_t \end{aligned}$$

avec $\mu = a - \frac{3}{2}b$ indépendant de t et $v = M_4(u)$ est stationnaire (c'est un MA(3) mais pas un bruit blanc). On a ainsi désaisonnalisé la série X et fait apparaître la tendance déterministe $\mu + bt$.

☞ Q3 On définit alors $Z = \Delta Y$.
Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-corrélation.

On a immédiatement pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\Delta(Y)_t = b + \Delta(v)_t = b + \frac{u_t - u_{t-4}}{4}$$

Par conséquent
- $\mathbb{E}(Z_t) = b$
- $\mathbb{V}(Z_t) = \frac{\sigma^2+\sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{8}$
- $\mathbb{C}ov(Z_t, Z_{t-h}) = \mathbb{C}ov\left(\frac{u_t - u_{t-4}}{4}, \frac{u_{t-h} - u_{t-h-4}}{4}\right) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{16} & \text{si } h = \pm 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier le processus Z est stationnaire, d'auto-corrélation $\rho_Z(h) = \frac{\gamma_Z(h)}{\gamma_0(h)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h \\ 0 & \text{sin} \end{cases}$

Exercice corrigé 3

On considère le processus défini par $\forall t \in \mathbb{Z}\ X_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc $\theta \in]-1, +1[$.

☞ Q1 Montrer que X est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-covariance.

On a successivement pour $t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t) - \theta\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0$
- $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \theta^2\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (1+\theta^2)\,\sigma_\epsilon^2$
- $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{C}ov(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}\,,\, \epsilon_{t-h} - \theta\epsilon_{t-h-1}) = \begin{cases} -\theta\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier X est stationnaire.

☞ Q2 Soient $\phi_T, \phi_{T-1}, \ldots, \phi_1$ les coefficients de la régression linéaire $\widehat{X}_{T+1}$ de X_{T+1} su $(X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1)$.
Ecrire les conditions d'orthogonalité entre $\left(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1}\right)$ et $< X_T, \ldots, X_1 >$.
En déduire que $(\phi_1, \ldots, \phi_T)$ vérifie

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\,\phi_T - \theta\phi_{T-1} &= -\theta \\ -\theta\phi_{k+1} + (1+\theta^2)\,\phi_k - \theta\phi_{k-1} &= 0 \text{ pour } k \in [\![2, T-1]\!] \\ (1+\theta^2)\,\phi_1 - \theta\phi_2 &= -\theta \end{cases}$$

On a par définition pour $t \in \mathbb{Z}$ $\widehat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^{T} \phi_k X_k$.

Alors pour $k \in [\![1, T]\!]$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\left(\left(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1}\right), X_k\right) &= 0 \\ \text{soit} \quad \mathbb{C}ov\left(X_{T+1}, X_k\right) - \sum_{l=1}^{T} \phi_l \mathbb{C}ov\left(X_l, X_k\right) &= 0 \\ \text{soit} \quad \gamma_X(T+1-k) - \sum_{l=1}^{T} \phi_l \gamma_X(k-l) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit compte-tenu de l'expression de γ_X

$$\begin{cases} +\phi_{T-1}\theta\sigma_\epsilon^2 & -\phi_T\left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2 & -\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k = T \\ +\phi_{k-1}\theta\sigma_\epsilon^2 & -\phi_k\left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2 & +\phi_{k+1}\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k \in [\![2, T-1]\!] \\ & -\phi_1\left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2 & +\phi_2\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k = 1 \end{cases}$$

d'où (puisque $\sigma_\epsilon^2 > 0$)

$$\begin{cases} \left(1+\theta^2\right)\phi_T - \theta\phi_{T-1} & = -\theta \text{ lorsque } k = T \\ -\theta\phi_{k+1} + \left(1+\theta^2\right)\phi_k - \theta\phi_{k-1} & = 0 \text{ pour } k \in [\![2, T-1]\!] \\ \left(1+\theta^2\right)\phi_1 - \theta\phi_2 & = 0 \text{ lorsque } k = 1 \end{cases}$$

☞ Q3 Déterminer (et si possible calculer) la fonction d'auto-corrélation partielle de X.

Par définition le cœfficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m est

$$r(m) = \mathbb{C}orr\left(X_t - \mathbb{E}\left(X_t | X_{t-1}, \ldots, X_{t-m}\right), X_{t-m} - \mathbb{E}\left(X_{t-m} | X_{t-m}, \ldots, X_{t-1}\right)\right)$$

(comme $\mathbb{E}\left(X_t\right) = 0$ il n'est pas nécessaire de régresser sur $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$ mais seulement sur $< X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$). Or il est aussi égal au cœfficient de X_{t-m} dans la régression de X_t sur $< X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$.[4] On a donc successivement :

- Calcul de $r(1)$:
  Projetant X_t sur $< X_{t-1} >$ on a $\mathbb{E}\left(X_t | X_{t-1}\right) = \phi_1^{(1)} X_{t-1}$ avec $r(1) = \phi_1^{(1)}$.
  Or d'après la question précédente on a $\left(1+\theta^2\right)\phi_1^{(1)} = -\theta$ et donc

$$r(1) = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

- Calcul de $r(2)$:
  Projetant X_t sur $< X_{t-1}, X_{t-2} >$ on a $\mathbb{E}\left(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}\right) = \phi_1^{(2)} X_{t-1} + \phi_2^{(2)} X_{t-2}$ avec $r(2) = \phi_2^{(2)}$.
  Attention : il n'y a aucune raison pour que $\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(2)}$ ...
  On a alors

$$\begin{cases} \left(1+\theta^2\right)\phi_1^{(2)} - \theta\phi_2^{(2)} = -\theta \\ -\theta\phi_1^{(2)} + \left(1+\theta^2\right)\phi_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

[4] Une preuve en est donnée dans "Séries temporelles et modèles dynamiques", C. Gouriéroux et A. Monfort, V-D.2 page 161. Voir aussi exercice 4 .

ENSAE SE206 *Réponses question par question des travaux dirigés n°1* Exercic

soit

$$\begin{cases} \left(1-\theta+\theta^2\right)\left(\phi_1^{(2)} + \phi_2^{(2)}\right) = -\theta \\ \left(1+\theta+\theta^2\right)\left(\phi_1^{(2)} - \phi_2^{(2)}\right) = 0 \end{cases}$$

ce dont on tire que

$$\phi_2^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{1-\theta+\theta^2} - \frac{\theta}{1+\theta+\theta^2}\right)$$

soit

$$r(2) = -\frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$$

Remarque : on constate par ailleurs que $\phi_1^{(2)} = -\frac{\theta+\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4} \neq \phi_1^{(1)}$.

- Calcul de $r(T)$:
  Projetant X_t sur $< X_{t-1}, \ldots, X_{t-T} >$ on a $\mathbb{E}\left(X_t | X_{t-1}, \ldots, X_{t-T}\right) = \phi_1^{(T)} X_{t-1} + \cdots + \phi_2^{(T)} X$
  avec $r(T) = \phi_T^{(T)}$.

  On a alors

$$\begin{cases} \left(1+\theta^2\right)\phi_T^{(T)} - \theta\phi_{T-1}^{(T)} & = -\theta \text{ lorsque } k = T \\ -\theta\phi_{k+1}^{(T)} + \left(1+\theta^2\right)\phi_k^{(T)} - \theta\phi_{k-1}^{(T)} & = 0 \text{ pour } k \in [\![2, T-1]\!] \\ \left(1+\theta^2\right)\phi_1^{(T)} - \theta\phi_2^{(T)} & = 0 \text{ lorsque } k = 1 \end{cases}$$

  ce dont on tire que par récurrence[5] que

$$r(T) = -\frac{\theta^T}{1+\theta^2+\cdots+\theta^{2T}}$$

Exercice corrigé 4

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire du second ordre.
On note pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t^{*+} &= \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\right) \\ X_t^{*-} &= \mathbb{EL}\left(X_{t-m} | 1, X_{t-m+1}, \ldots, X_{t-1}\right) \end{aligned}$$

On note $\rho(m) = \mathbb{C}orr\left(X_t - X_t^{*+}, X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.
On note par ailleurs $r(m)$ le cœfficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m de X, et on cherc
à montrer que $\rho(m) = r(m)$.

[5] Calcul non-détaillé ici. En utilisant exercice 4 , identifier le cœfficient b_k^{l-1} de X_{T-k}^{l-1} dans la régression X_{T-l} sur $1, X_{T-m+1}, \ldots, X_{T-1}$, au cœfficient a_{l-k+1}^{l-1} de $X_{T-l+k-1}^{l-1}$ dans la régression de X_T sur $1, X_{T-1}, \ldots, X_{T-}$ ...

☞ Q1 On note pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t^{*+} = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}$$
$$X_t^{*-} = b_0 + b_1 X_{t-m+1} + \cdots + b_{m-1} X_{t-1}$$

(a) Montrer que $(a_1, \ldots, a_{m-1}) = (b_{m-1}, \ldots, b_1)$.

Remarque : bien-entendu comme X est stationnaire $\rho(m)$ ne dépend pas de t et est donc bien défini.

– $\mathbb{E}\left(X_t^{*+}\right)$ est la projection orthogonale de X_t sur le sous-espace vectoriel engendré par $(1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1})$ pour le produit scalaire $< X|Y >= \mathbb{E}(XY)$. Donc par définition $(X_t - X_t^{*+})$ est orthogonal à $\langle 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\rangle$, donc en particulier $(X_t - X_t^{*+}) \perp\!\!\!\perp (1)$ ce qui s'écrit $\mathbb{E}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = 0$.
De $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left(X_t^{*+}\right)$ on tire alors que

$$\mathbb{E}(X_t) = a_0 + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) + \cdots + a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1})$$

et donc, $(X_t)_t$ étant stationnaire,

$$a_0 = (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1})\,\mathbb{E}(X_t)$$

Par ailleurs par définition X_t^{*+} on a $\forall j \in [\![1, m-1]\!]$, $\left(X_t - X_t^{*+}\right) \perp\!\!\!\perp X_{t-j}$. Autrement dit pour $j \in [\![1, m-1]\!]$

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & \mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\cdot X_{t-j}\right) \\
\text{soit} \quad \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & a_0\mathbb{E}(X_t) + a_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) + \cdots + a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) \\
\text{soit} \quad \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1})\,\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) + \cdots \\
& & + a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) \\
& = & \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1\left(\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) + \cdots \\
& & + a_{m-1}\left(\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) \\
\text{soit} \quad \gamma_X(j) & = & a_1\gamma_X(j-1) + \cdots + a_{m-1}\gamma_X(j-m+1)
\end{array}$$

Autrement dit en notant

$$\Gamma_{m-1} = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(m-2) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(m-2) & \gamma_X(m-3) & \cdots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} = \mathbb{C}ov(X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1})$$

on a

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}$$

– De façon similaire on a pour $j \in [\![1, m-1]\!]$

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & \mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*-}\right)\cdot X_{t-j}\right) \\
\text{soit} \quad \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & b_0\mathbb{E}(X_t) + b_1\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) + \cdots + b_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) \\
\text{soit} \quad \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & (1 - b_1 - \cdots - b_{m-1})\,\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) + b_1\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) + \cdots \\
& & + b_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) \\
& = & \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) + b_1\left(\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) + \\
& & + b_{m-1}\left(\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) \\
\text{soit} \quad \gamma_X(j) & = & b_1\gamma_X(j-m+1) + \cdots + b_{m-1}\gamma_X(j-1)
\end{array}$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1}\begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

– Or Γ_{m-1} est inversible (sauf si le processus est presque-sûrement déterministe)[6] : en e
dans le cas contraire considérons $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ non tous nuls et tels que

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \begin{pmatrix} \gamma_X(i-1) \\ \vdots \\ \gamma_X(i-m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcl}
\forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \mathbb{C}ov(X_{t-i}, X_{t-k}) & = & 0 \\
\text{soit} \quad \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i X_{t-i}, X_{t-k}\right) & = & 0 \\
\text{donc} \quad \sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k \mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i X_{t-i}, X_{t-k}\right) & = & 0 \\
\text{soit} \quad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i X_{t-i}\right) & = & 0 \\
\text{donc} \quad \mathbb{V}(X_{t-r}|X_{t-r-1}, \ldots, X_{t-m-1}) & = & 0
\end{array}$$

où r est le numéro du premier λ_k non nul : ainsi le processus X est déterministe (con
tionnellement à $m-r$ valeurs initiales) !

Par conséquent Γ_{m-1} est inversible et

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = (\Gamma_{m-1})^{-1}\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

[6] Auquel cas bien entendu tous les cœfficients de corrélation partielle $r(m)$ sont nuls et l'exercice est trivial.

(b) Montrer que $\mathbb{V}\left(X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_t^{*-}\right)$.
En déduire que $\mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.

On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(X_t^{*+}\right) &= \mathbb{V}\left(a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}\right) \\
&= (a_1, \ldots, a_{m-1})\, \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \\
&= (b_{m-1}, \ldots, b_1)\, \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= (b_{m-1}, \ldots, b_1)\, \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_{t-m+1} \\ \vdots \\ X_{t-1} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{car } X \text{ stationnaire} \\
&= \mathbb{V}\left(b_{m-1} X_{t-m+1} + \cdots + b_1 X_{t-1}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(X_t^{*-}\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(X_t^{*+}\right) + \mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) &= \mathbb{V}\left(X_t\right) \quad \text{car } \left(X_t - X_t^{*+}\right) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+} \\
&= \mathbb{V}\left(X_{t-m}\right) \quad \text{car } X \text{ est stationnaire} \\
&= \mathbb{V}\left(X_t^{*-}\right) + \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) \quad \text{car } \left(X_{t-m} - X_t^{-+}\right) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)}$$

☞ Q2 On note pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_m X_{t-m} + u_t$$

où u_t est orthogonal à $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$; ainsi par définition $r(m) = c_m$.

(a) Montrer que $\left(X_t - X_t^{*+}\right) = c_m \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) + u_t$.

On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
X_t^{*+} &= \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\right) \\
&= \left(c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_{m-1} X_{t-m+1}\right) + \mathbb{EL}\left(c_m X_{t-m} \,|\, 1, X_{t-m+1}, \ldots, X_{t-1}\right) \\
&\quad + \mathbb{EL}\left(u_t \,|\, 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\right) \\
&= \left(c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_{m-1} X_{t-m+1}\right) + c_m X_t^{*-} + 0
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
X_t - X_t^{*+} &= X_t - \left(c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_{m-1} X_{t-m+1}\right) - c_m X_t^{*-} \\
&= \left(c_m X_{t-m} + u_t\right) - c_m X_t^{*-} \\
&= c_m \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) + u_t
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) = c_m \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.

On a

$$\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) = \mathbb{E}\left(c_m \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)^2 + c_m u_t \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right)$$

Or $u_t \perp\!\!\!\perp < 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1} >$, de sorte que $u_t \perp\!\!\!\perp \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.
Donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) = c_m \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)}$$

☞ Q3 En déduire que $\rho(m) = r(m)$.

A moins que le processus ne soit dégénéré on a $\mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) > 0$ et donc

$$\begin{aligned}
r(m) &= c_m \quad \text{par définition} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right)}{\mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{C}ov\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right), \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right)}{\sqrt{\mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)}} \quad \text{car } \mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) \\
&= \mathbb{C}orr\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right), \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) \\
&= \rho(m)
\end{aligned}$$

Autrement dit, le cœfficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m est le cœfficient de X_{t-m} da
la régression affine de X_t sur $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$, qui est aussi le cœfficient de corrélat
de $X_t - X_t^{*+}$ avec $X_{t-m} - X_t^{*-}$.