



Deuxième année  
2005-2005

Séries temporelles linéaires  
*Réponses question par question des travaux  
dirigés n° 1*

Guillaume Lacôte  
Bureau **E03**

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

<b>Exercice corrigé 1</b>
---------------------------

Soit  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit blanc (supposé dans  $\mathcal{L}^2$ ) de variance  $\sigma^2 > 0$ .  
Discuter dans chacun des cas suivants de la stationnarité de  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ .

Rappels :

- Une suite de variables aléatoires réelles (ou *processus*)  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dite *du second ordre* si chacune d'elles est de carré intégrable.
- Un processus  $X$  est *fortement stationnaire ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n, \forall h \in \mathbb{Z}, \mathcal{L}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}} = \mathcal{L}_{X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}}$$

où  $\mathcal{L}_Y$  désigne la loi de  $Y$ .

- Un processus  $X$  est (*faiblement*) *stationnaire ssi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) \\ \exists \gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+ / \forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \end{array} \right.$$

- Le processus  $X$  est un *bruit blanc fort* de variance  $\sigma^2 \geq 0$  ssi

$$\left| \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ (X_t)_t \text{ est i.i.d} \end{array} \right.$$

- Le processus  $X$  est un *bruit blanc (faible)* de variance  $\sigma^2 \geq 0$  ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}^*, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0 \end{array} \right.$$

☞ Q1 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$  ?

On a pour  $t \in \mathbb{Z}$

- $\mathbb{E}(X_t) = 0$
  - $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$  par indépendance
  - Enfin  $\text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = -\sigma^2$  et  $\forall h \geq 2, \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = 0$
- $X$  est donc stationnaire.

Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  défini pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  par

☞ Q2

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}$$

est-il (faiblement) stationnaire ?

On a successivement pour  $t \in \mathbb{Z}$  :

- $\mathbb{E}(X_t) = a + b\mathbb{E}(\epsilon_t) + c\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = a$
- $\mathbb{V}(X_t) = 0 + b^2\mathbb{V}(\epsilon_t) + c^2\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (b^2 + c^2)\sigma^2$  car  $\epsilon_t$  et  $\epsilon_{t-1}$  sont non-corrélés

– Par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) &= \text{Cov}(a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}, a + b\epsilon_{t-1} + c\epsilon_{t-2}) \\ &= b^2\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) + bc\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-2}) + cb\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) + c^2\text{Cov}(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}) \\ &= bc\sigma^2 \end{aligned}$$

– Enfin  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0, \forall h \geq 2$

Le processus  $X$  est donc stationnaire.

☞ Q3 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t \epsilon_{t-1}$ , si  $\epsilon$  est un bruit blanc fort ? Faible ?

On a de façon similaire pour  $t \in \mathbb{Z}$  :

- $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t)\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0$  car  $\epsilon_t$  et  $\epsilon_{t-1}$  sont non-corrélés
- Si  $\epsilon$  est un bruit blanc fort,  $\epsilon_t^2$  est indépendant de  $\epsilon_{t-1}^2$  et donc  $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t)\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (\sigma^2)^2$ .  
En revanche si  $\epsilon_t$  et  $\epsilon_{t-1}$  sont décorrélés mais pas indépendants on ne peut rien dire : il existe un bruit blanc faible  $\epsilon$  tel que  $\mathbb{E}(\epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2)$  dépend de  $t$ .<sup>1</sup>
- Enfin pour  $\forall h \in \mathbb{Z}$  et si  $\epsilon$  est un bruit blanc fort

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t-1} \epsilon_{t+h} \epsilon_{t+h-1}) \\ &= \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

En revanche il existe un bruit blanc faible  $\epsilon$  tel que  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$  dépend de  $t$ .<sup>2</sup>

Le processus  $X$  est donc stationnaire **si  $\epsilon$  est un bruit blanc fort**, et il existe au moins un bruit blanc faible  $\epsilon$  tel que  $X$  n'est **pas** stationnaire.

☞ Q4 Lorsque  $X$  est tel que  $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$  (on supposera en outre que  $\forall t > 0, \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_0$ ) ?

$X$  est une marche aléatoire. On a plus précisément

- On a  $\mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(X_{t-1}) = 0$  et donc  $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ .
- Par ailleurs  $X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0$ ; Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0\right) \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \mathbb{V}(\epsilon_{t-i}) + \mathbb{V}(X_0) \quad \text{car } \underbrace{\epsilon_{t-i}}_{>0} \perp\!\!\!\perp X_0 \\ &= t\sigma^2 + \mathbb{V}(X_0) \end{aligned}$$

En particulier  $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 + \mathbb{V}(X_0) > \mathbb{V}(X_0)$  et donc  $X$  n'est **pas** stationnaire.

<sup>1</sup>Par exemple  $X_{2t} = 1$  et  $X_{2t+1} = \frac{1}{2}\delta_t + \frac{1}{2}\delta_{-t}$  la binômiale qui vaut  $-1$  ou  $1$  de façon équiprobable. Alors  $\mathbb{E}(X_t X_{t+1}) = \mathbb{E}(X_{2\lceil \frac{t}{2} \rceil+1}) = 0$  mais  $\mathbb{E}(X_{2t}^2 X_{2t+1}^2) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(-t)^2 = t^2$  et  $\mathbb{E}(X_{2t-1}^2 X_{2t}^2) = \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2}(-t)^2 = (t-1)^2$  qui dépend de  $t$  à tout  $t \in \mathbb{Z}$ .

<sup>2</sup>Reprenant le contre-exemple ci-dessus on a  $\text{Cov}(X_{2t+1}, X_{2t+2}) = \mathbb{E}(\epsilon_{2t} \epsilon_{2t+1}^2 \epsilon_{2t+2}) = \mathbb{E}(\epsilon_{2t+1}^2) = (2t+1)^2$ .

⇒ Q5 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = \epsilon_t \cos(ct) + \epsilon_{t-1} \sin(ct)$  pour  $c \in \mathbb{R}$  donné ?

Pour  $t \in \mathbb{Z}$  on a

- $\mathbb{E}(X_t) = 0$
- $\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2$
- $\text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = 0$  si  $h \geq 2$
- Par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) &= \sigma^2 \sin(ct) \cos(c(t-1)) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (\sin(ct + c(t-1)) + \sin(ct - c(t-1))) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (\sin(c(2t-1)) + \sin(c)) \end{aligned}$$

En particulier pour que  $X$  soit stationnaire il faut et il suffit que  $u_t = \forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1))$  ne dépende pas de  $t$ , donc en particulier que  $\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = u_1$  ce qui s'écrit  $\forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1)) = \sin c$  soit

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(c) - \sin((2t-1)c) \\ &= 2 \sin\left(\frac{1 - (2t-1)}{2}c\right) \cos\left(\frac{1 + (2t-1)}{2}c\right) \\ &= -2 \sin((t+1)c) \cos(tc) \\ \text{soit } (t+1)c &\in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } tc \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  il faut et il suffit donc que  $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ .

Donc  $X$  est stationnaire ssi  $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ .

⇒ Q6 Lorsque  $\forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = \sum_{i=0}^t \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  (discuter selon  $\lambda$ ) ?  
Lorsque  $\lambda \in ]-1, 1[$ , montrer qu'il existe un processus stationnaire  $Y$  tel que  $(X_t - Y_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{L^2} (0)$ .

- On a pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=0}^t \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1}) \\ &= \epsilon_t + \sum_{i=1}^t (\lambda^i - \lambda^{i-1}) \epsilon_{t-i} - \lambda^t \epsilon_{-1} \quad (\text{“transformation d'Abel”}) \end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{E}(X_t) = 0$  et par ailleurs

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(X_t) &= \sigma^2 \left( 1 + \sum_{i=1}^t (\lambda^i - \lambda^{i-1})^2 + \lambda^{2t} \right) \text{ par indépendance} \\
 &= \sigma^2 \left( 1 + \sum_{i=1}^t (\lambda^{i-1})^2 (\lambda - 1)^2 + \lambda^{2t} \right) \\
 &= \sigma^2 \left( 1 + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=0}^{t-1} (\lambda^2)^i + \lambda^{2t} \right) \\
 &= \sigma^2 \left( 1 + (\lambda - 1)^2 \frac{1 - \lambda^{2t}}{1 - \lambda^2} + \lambda^{2t} \right) \\
 &= \sigma^2 \left( 1 + \frac{(1 - \lambda)(1 - \lambda^{2t})}{1 + \lambda} + \lambda^{2t} \right) \\
 &= 2\sigma^2 \frac{1 + \lambda^{2t+1}}{1 + \lambda}
 \end{aligned}$$

En particulier pour que  $X$  soit stationnaire, il faut que  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = 0$ .

Réciproquement si  $\lambda = 1$ , alors  $\forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{-1}$  et donc  $X$  est stationnaire.

- Constatant que  $2\sigma^2 \frac{1 + \lambda^{2t+1}}{1 + \lambda} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{2\sigma^2}{1 + \lambda}$ , on pose  $Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$  (qui existe car la série est normalement convergente car  $|\lambda| < 1$ ). On a par construction  $\mathbb{V}(Y_t) = 2 \frac{\sigma^2}{1 - \lambda}$ .

On a par ailleurs  $Y_t = \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i}$ .

Par conséquent pour  $h \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) &= \text{Cov} \left( \begin{array}{l} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} , \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+h-i} \end{array} \right) \\
 &= \text{Cov} \left( \begin{array}{l} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} , \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{h-1} \lambda^{i-1} \epsilon_{t+h-i} + (\lambda - 1) \sum_{i=h}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-(i-h)} \end{array} \right) \\
 &= \text{Cov} \left( \begin{array}{l} \epsilon_t + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} , \\ \epsilon_{t+h} + \sum_{1 \leq i \leq h-1} \lambda^{i-1} \underbrace{\epsilon_{t+h-i}}_{\geq 1} + (\lambda - 1) \lambda^{h-1} \epsilon_t + (\lambda - 1) \lambda^h \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^{j-1} \epsilon_{t-j} \end{array} \right) \\
 &= (\lambda - 1) \lambda^{h-1} \mathbb{V}(\epsilon_t) + (\lambda - 1)^2 \lambda^h \mathbb{V} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \right) \\
 &= (\lambda - 1) \lambda^{h-1} \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \lambda^h \frac{1}{1 - \lambda} \sigma^2 \\
 &= -(1 - \lambda)^2 \lambda^{h-1} \sigma^2
 \end{aligned}$$

et donc  $Y$  est bien stationnaire.

Autre méthode :

On a  $Y = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i L^i (\mathbf{1} - L) \circ \epsilon = (\mathbf{1} + \sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda^i - \lambda^{i+1}) L^i) \circ \epsilon$  et donc  $Y - \epsilon$  est la transformée moyenne mobile infinie du processus stationnaire  $\epsilon$  avec les coefficients  $\sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda^i - \lambda^{i+1})$ . Comme la série  $\sum_i (\lambda^i - \lambda^{i+1})$  est absolument convergente,  $Y$  est stationnaire.

Enfin on a

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_t - X_t) &= \mathbb{V}\left((\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} + \lambda^t \epsilon_{t-1}\right) \\ &= \lambda^t \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \mathbb{V}(\epsilon_{t-i}) \\ &= \lambda^t \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \frac{1}{1 - \lambda} \lambda^{t+1} \sigma^2 \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t - X_t) &= \mathbb{E}\left((\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} + \lambda^t \epsilon_{t-1}\right) \\ &= (\lambda - 1) \sum_{i=t+1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-i})}_{=0} + \lambda^t \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-1})}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

on a <sup>3</sup>

$$(X_t - Y_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{L^2} (0)$$

☞ Q7 [La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?]

Non en général : considérer par exemple  $X_t$  stationnaire d'espérance nulle, et  $Y_t = (-1)^t X_t$  : alors  $\mathbb{E}(Y_t) = 0$  et  $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = (-1)^t (-1)^{t+h} \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = (-1)^h \gamma_X(h)$  donc  $Y$  est stationnaire, et de plus

$$X_t + Y_t = \begin{cases} 2X_t & \text{si } t \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc  $\text{Cov}(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = 4\gamma_X(h) \mathbb{1}_{t \in 2\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{h \in 2\mathbb{Z}}$  qui dépend non-seulement de  $h$  mais aussi de  $t$ .

En revanche la somme de deux processus (faiblement ou fortement) stationnaires **non-corrélés** est faiblement stationnaire : si  $\forall t, t', X_t \perp\!\!\!\perp Y_{t'}$  alors

$$\text{Cov}(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) + \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$$

<sup>3</sup>La suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\bar{Z}$  dans  $\mathcal{L}^2$  ssi  $\|Z_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{Z}$  soit  $\mathbb{E}(Z_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{Z}$  soit  $\mathbb{V}(Z_n) + \mathbb{E}(Z_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{Z}$  soit  $\mathbb{V}(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{Z}$  et  $\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{Z}$

La somme de deux processus fortement stationnaires et **indépendants** est fortement stationnaire.

## Exercice corrigé 2

On considère le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad X_t = a + bt + s_t + u_t$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(s_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus saisonnier (périodique) de période 4 et  $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc de variance  $\sigma^2$  indépendant de  $s$ .

⇒ Q1

Le modèle est-il correctement paramétré? Proposer le cas échéant une contrainte naturelle (que l'on supposera vérifiée par la suite) portant sur  $(s_t)_t$ .

Les composantes saisonnières ne sont pas identifiables : en effet les processus définis par  $a, b, (s_t)_t$  et  $a + \mu, b, (s_t - \mu)_t$  sont égaux pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Il est néanmoins naturel de supposer que le processus saisonnier est "centré" sur une période : *i.e.*

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad s_t + s_{t+1} + s_{t+2} + s_{t+3} = 0$$

(le processus  $s$  étant de période 4 cette quantité ne dépend de toute façon pas de la date  $t$ ).

On définit l'opérateur

$$M_4 : \left( (Z_t)_t \mapsto \left( \frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}}{4} \right)_t \right)$$

et on considère le processus  $Y = M_4 X$ .

⇒ Q2

Donner l'expression de  $Y_t$  pour  $t \in \mathbb{Z}$ , et justifier l'intérêt de la transformation.

On a pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Y_t &= a + b \frac{t + (t-1) + (t-2) + (t-3)}{4} + M_4(s)_t + M_4(u)_t \\ &= \left( a - \frac{6}{4}b \right) + bt + \underbrace{M_4(s)_t}_{=0 \text{ par hypothèse}} + M_4(u)_t \\ &= \mu + bt + v_t \end{aligned}$$

avec  $\mu = a - \frac{3}{2}b$  indépendant de  $t$  et  $v = M_4(u)$  est stationnaire (c'est un MA(3) mais pas un bruit blanc). On a ainsi désaisonnalisé la série  $X$  et fait apparaître la tendance déterministe  $\mu + bt$ .

⇒ Q3

On définit alors  $Z = \Delta Y$ .

Montrer que  $Z$  est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-corrélation.

On a immédiatement pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\Delta(Y)_t = b + \Delta(v)_t = b + \frac{u_t - u_{t-4}}{4}$$

Par conséquent

$$- \mathbb{E}(Z_t) = b$$

$$- \mathbb{V}(Z_t) = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{8}$$

$$- \text{Cov}(Z_t, Z_{t-h}) = \text{Cov}\left(\frac{u_t - u_{t-4}}{4}, \frac{u_{t-h} - u_{t-h-4}}{4}\right) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{16} & \text{si } h = \pm 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier le processus  $Z$  est stationnaire, d'auto-corrélation  $\rho_Z(h) = \frac{\gamma_Z(h)}{\gamma_0(h)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h = \pm 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

### Exercice corrigé 3

On considère le processus défini par  $\forall t \in \mathbb{Z} X_t = \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$  où  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc et  $\theta \in ]-1, +1[$ .

⇒ Q1

Montrer que  $X$  est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-covariance.

On a successivement pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$- \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t) - \theta \mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0$$

$$- \mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \theta^2 \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2$$

$$- \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \text{Cov}(\epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-h} - \theta \epsilon_{t-h-1}) = \begin{cases} -\theta \sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier  $X$  est stationnaire.

Soient  $\phi_T, \phi_{T-1}, \dots, \phi_1$  les coefficients de la régression linéaire  $\widehat{X}_{T+1}$  de  $X_{T+1}$  sur  $(X_T, X_{T-1}, \dots, X_1)$ .

Ecrire les conditions d'orthogonalité entre  $(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1})$  et  $\langle X_T, \dots, X_1 \rangle$ .

⇒ Q2

En déduire que  $(\phi_1, \dots, \phi_T)$  vérifie

$$\begin{cases} (1 + \theta^2) \phi_T - \theta \phi_{T-1} & = -\theta \\ -\theta \phi_{k+1} + (1 + \theta^2) \phi_k - \theta \phi_{k-1} & = 0 \text{ pour } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ (1 + \theta^2) \phi_1 - \theta \phi_2 & = -\theta \end{cases}$$

On a par définition pour  $t \in \mathbb{Z} \widehat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^T \phi_k X_k$ .

Alors pour  $k \in \llbracket 1, T \rrbracket$

$$\text{Cov} \left( \left( X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1} \right), X_k \right) = 0$$

$$\text{soit } \text{Cov} (X_{T+1}, X_k) - \sum_{l=1}^T \phi_l \text{Cov} (X_l, X_k) = 0$$

$$\text{soit } \gamma_X(T+1-k) - \sum_{l=1}^T \phi_l \gamma_X(k-l) = 0$$

ce qui s'écrit compte-tenu de l'expression de  $\gamma_X$

$$\begin{cases} +\phi_{T-1}\theta\sigma_\epsilon^2 & -\phi_T(1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2 & -\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k = T \\ +\phi_{k-1}\theta\sigma_\epsilon^2 & -\phi_k(1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2 & +\phi_{k+1}\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ -\phi_1(1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2 & & +\phi_2\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k = 1 \end{cases}$$

d'où (puisque  $\sigma_\epsilon^2 > 0$ )

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\phi_T - \theta\phi_{T-1} & = -\theta \text{ lorsque } k = T \\ -\theta\phi_{k+1} + (1+\theta^2)\phi_k - \theta\phi_{k-1} & = 0 \text{ pour } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ (1+\theta^2)\phi_1 - \theta\phi_2 & = 0 \text{ lorsque } k = 1 \end{cases}$$

⇒ Q3

Déterminer (et si possible calculer) la fonction d'auto-corrélation partielle de  $X$ .

Par définition le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre  $m$  est

$$r(m) = \text{Corr} (X_t - \mathbb{E} (X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-m}), X_{t-m} - \mathbb{E} (X_{t-m} | X_{t-m}, \dots, X_{t-1}))$$

(comme  $\mathbb{E} (X_t) = 0$  il n'est pas nécessaire de régresser sur  $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$  mais seulement sur  $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$ ). Or il est aussi égal au coefficient de  $X_{t-m}$  dans la régression de  $X_t$  sur  $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$ .<sup>4</sup> On a donc successivement :

– Calcul de  $r(1)$  :

Projetant  $X_t$  sur  $\langle X_{t-1} \rangle$  on a  $\mathbb{E} (X_t | X_{t-1}) = \phi_1^{(1)} X_{t-1}$  avec  $r(1) = \phi_1^{(1)}$ .

Or d'après la question précédente on a  $(1+\theta^2)\phi_1^{(1)} = -\theta$  et donc

$$r(1) = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

– Calcul de  $r(2)$  :

Projetant  $X_t$  sur  $\langle X_{t-1}, X_{t-2} \rangle$  on a  $\mathbb{E} (X_t | X_{t-1}, X_{t-2}) = \phi_1^{(2)} X_{t-1} + \phi_2^{(2)} X_{t-2}$  avec  $r(2) = \phi_2^{(2)}$ .

Attention : il n'y a aucune raison pour que  $\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(2)} \dots$

On a alors

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\phi_1^{(2)} - \theta\phi_2^{(2)} & = -\theta \\ -\theta\phi_1^{(2)} + (1+\theta^2)\phi_2^{(2)} & = 0 \end{cases}$$

<sup>4</sup>Une preuve en est donnée dans "Séries temporelles et modèles dynamiques", C. Gouriéroux et A. Monfort, V-D.2 page 161. Voir aussi exercice 4 .

soit

$$\begin{cases} (1 - \theta + \theta^2) (\phi_1^{(2)} + \phi_2^{(2)}) = -\theta \\ (1 + \theta + \theta^2) (\phi_1^{(2)} - \phi_2^{(2)}) = 0 \end{cases}$$

ce dont on tire que

$$\phi_2^{(2)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\theta}{1 - \theta + \theta^2} - \frac{\theta}{1 + \theta + \theta^2} \right)$$

soit

$$r(2) = -\frac{\theta^2}{1 + \theta^2 + \theta^4}$$

Remarque : on constate par ailleurs que  $\phi_1^{(2)} = -\frac{\theta + \theta^3}{1 + \theta^2 + \theta^4} \neq \phi_1^{(1)}$ .

– Calcul de  $r(T)$  :

Projetant  $X_t$  sur  $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-T} \rangle$  on a  $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-T}) = \phi_1^{(T)} X_{t-1} + \dots + \phi_2^{(T)} X_{t-2}$  avec  $r(T) = \phi_T^{(T)}$ .

On a alors

$$\begin{cases} (1 + \theta^2) \phi_T^{(T)} - \theta \phi_{T-1}^{(T)} = -\theta \text{ lorsque } k = T \\ -\theta \phi_{k+1}^{(T)} + (1 + \theta^2) \phi_k^{(T)} - \theta \phi_{k-1}^{(T)} = 0 \text{ pour } k \in \llbracket 2, T-1 \rrbracket \\ (1 + \theta^2) \phi_1^{(T)} - \theta \phi_2^{(T)} = 0 \text{ lorsque } k = 1 \end{cases}$$

ce dont on tire que par récurrence<sup>5</sup> que

$$r(T) = -\frac{\theta^T}{1 + \theta^2 + \dots + \theta^{2T}}$$

## Exercice corrigé 4

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus stationnaire du second ordre.

On note pour  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t^{*+} &= \mathbb{E}L(X_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1}) \\ X_t^{*-} &= \mathbb{E}L(X_{t-m} | 1, X_{t-m+1}, \dots, X_{t-1}) \end{aligned}$$

On note  $\rho(m) = \text{Corr}(X_t - X_t^{*+}, X_{t-m} - X_t^{*-})$ .

On note par ailleurs  $r(m)$  le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre  $m$  de  $X$ , et on cherche à montrer que  $\rho(m) = r(m)$ .

<sup>5</sup>Calcul non-détaillé ici. En utilisant l'exercice 4, identifier le coefficient  $b_k^{l-1}$  de  $X_{T-k}^{l-1}$  dans la régression de  $X_{T-l}$  sur  $1, X_{T-m+1}, \dots, X_{T-1}$ , au coefficient  $a_{l-k+1}^{l-1}$  de  $X_{T-l+k-1}^{l-1}$  dans la régression de  $X_T$  sur  $1, X_{T-1}, \dots, X_{T-m+1}$  ...

☞ Q1 On note pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t^{*+} = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}$$

$$X_t^{*-} = b_0 + b_1 X_{t-m+1} + \cdots + b_{m-1} X_{t-1}$$

(a) Montrer que  $(a_1, \dots, a_{m-1}) = (b_{m-1}, \dots, b_1)$ .

Remarque : bien-entendu comme  $X$  est stationnaire  $\rho(m)$  ne dépend pas de  $t$  et est donc bien défini.

–  $\mathbb{E}(X_t^{*+})$  est la projection orthogonale de  $X_t$  sur le sous-espace vectoriel engendré par  $(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1})$  pour le produit scalaire  $\langle X|Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ . Donc par définition  $(X_t - X_t^{*+})$  est orthogonal à  $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1} \rangle$ , donc en particulier  $(X_t - X_t^{*+}) \perp (1)$  ce qui s'écrit  $\mathbb{E}(X_t - X_t^{*+}) = 0$ .

De  $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^{*+})$  on tire alors que

$$\mathbb{E}(X_t) = a_0 + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) + \cdots + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1})$$

et donc,  $(X_t)_t$  étant stationnaire,

$$a_0 = (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1}) \mathbb{E}(X_t)$$

Par ailleurs par définition  $X_t^{*+}$  on a  $\forall j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ,  $(X_t - X_t^{*+}) \perp X_{t-j}$ . Autrement dit pour  $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$

$$0 = \mathbb{E}((X_t - X_t^{*+}) \cdot X_{t-j})$$

$$\text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) = a_0 \mathbb{E}(X_t) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \cdots + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j})$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) &= (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1}) \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \cdots \\ &\quad + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\ &= \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 (\mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) + \cdots \\ &\quad + a_{m-1} (\mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) \end{aligned}$$

$$\text{soit } \gamma_X(j) = a_1 \gamma_X(j-1) + \cdots + a_{m-1} \gamma_X(j-m+1)$$

Autrement dit en notant

$$\Gamma_{m-1} = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(m-2) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(m-2) & \gamma_X(m-3) & \cdots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} = \text{Cov}(X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1})$$

on a

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}$$

– De façon similaire on a pour  $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathbb{E}((X_t - X_t^{*-}) \cdot X_{t-j}) \\
 \text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) &= b_0 \mathbb{E}(X_t) + b_1 \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) + \dots + b_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) \\
 \text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) &= (1 - b_1 - \dots - b_{m-1}) \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + b_1 \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) + \dots \\
 &\quad + b_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) \\
 &= \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + b_1 (\mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) + \dots \\
 &\quad + b_{m-1} (\mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) \\
 \text{soit } \gamma_X(j) &= b_1 \gamma_X(j-m+1) + \dots + b_{m-1} \gamma_X(j-1)
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1} \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

– Or  $\Gamma_{m-1}$  est inversible (sauf si le processus est presque-sûrement déterministe)<sup>6</sup> : en effet dans le cas contraire considérons  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  non tous nuls et tels que

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \begin{pmatrix} \gamma_X(i-1) \\ \vdots \\ \gamma_X(i-m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \text{Cov}(X_{t-i}, X_{t-k}) &= 0 \\
 \text{soit } \forall k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \text{Cov} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i}, X_{t-k} \right) &= 0 \\
 \text{donc } \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \text{Cov} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i}, X_{t-k} \right) &= 0 \\
 \text{soit } \mathbb{V} \left( \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i} \right) &= 0 \\
 \text{donc } \mathbb{V}(X_{t-r} | X_{t-r-1}, \dots, X_{t-m-1}) &= 0
 \end{aligned}$$

où  $r$  est le numéro du premier  $\lambda_k$  non nul : ainsi le processus  $X$  est déterministe (conditionnellement à  $m-r$  valeurs initiales) !

Par conséquent  $\Gamma_{m-1}$  est inversible et

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = (\Gamma_{m-1})^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

<sup>6</sup>Auquel cas bien entendu tous les coefficients de corrélation partielle  $r(m)$  sont nuls et l'exercice est trivial.

- (b) Montrer que  $\mathbb{V}(X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_t^{*-})$ .  
En déduire que  $\mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$ .

On a pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t^{*+}) &= \mathbb{V}(a_1 X_{t-1} + \dots + a_{m-1} X_{t-m+1}) \\ &= (a_1, \dots, a_{m-1}) \mathbb{V} \left( \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \\ &= (b_{m-1}, \dots, b_1) \mathbb{V} \left( \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= (b_{m-1}, \dots, b_1) \mathbb{V} \left( \begin{pmatrix} X_{t-m+1} \\ \vdots \\ X_{t-1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{car } X \text{ stationnaire} \\ &= \mathbb{V}(b_{m-1} X_{t-m+1} + \dots + b_1 X_{t-1}) \\ &= \mathbb{V}(X_t^{*-}) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_t^{*+}) + \mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) &= \mathbb{V}(X_t) \quad \text{car } (X_t - X_t^{*+}) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+} \\ &= \mathbb{V}(X_{t-m}) \quad \text{car } X \text{ est stationnaire} \\ &= \mathbb{V}(X_t^{*-}) + \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-}) \quad \text{car } (X_{t-m} - X_t^{*-}) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$$

☞ Q2 On note pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = c_0 + c_1 X_{t-1} + \dots + c_m X_{t-m} + u_t$$

où  $u_t$  est orthogonal à  $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$ ; ainsi par définition  $r(m) = c_m$ .

- (a) Montrer que  $(X_t - X_t^{*+}) = c_m (X_{t-m} - X_t^{*-}) + u_t$ .

On a pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t^{*+} &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1}) \\ &= (c_0 + c_1 X_{t-1} + \dots + c_{m-1} X_{t-m+1}) + \mathbb{E}\mathbb{L}(c_m X_{t-m} | 1, X_{t-m+1}, \dots, X_{t-1}) \\ &\quad + \mathbb{E}\mathbb{L}(u_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1}) \\ &= (c_0 + c_1 X_{t-1} + \dots + c_{m-1} X_{t-m+1}) + c_m X_t^{*-} + 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} X_t - X_t^{*+} &= X_t - (c_0 + c_1 X_{t-1} + \dots + c_{m-1} X_{t-m+1}) - c_m X_t^{*-} \\ &= (c_m X_{t-m} + u_t) - c_m X_t^{*-} \\ &= c_m (X_{t-m} - X_t^{*-}) + u_t \end{aligned}$$

(b)  $\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-})) = c_m \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$ .

On a

$$\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-})) = \mathbb{E}(c_m (X_{t-m} - X_t^{*-})^2 + c_m u_t (X_{t-m} - X_t^{*-}))$$

Or  $u_t \perp\!\!\!\perp \langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1} \rangle$ , de sorte que  $u_t \perp\!\!\!\perp (X_{t-m} - X_t^{*-})$ .

Donc

$$\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-})) = c_m \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})$$

⇒ Q3  $\text{En déduire que } \rho(m) = r(m)$ .

A moins que le processus ne soit dégénéré on a  $\mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-}) > 0$  et donc

$$\begin{aligned} r(m) &= c_m \quad \text{par définition} \\ &= \frac{\mathbb{E}((X_t - X_t^{*+})(X_{t-m} - X_t^{*-}))}{\mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})} \\ &= \frac{\text{Cov}((X_t - X_t^{*+}), (X_{t-m} - X_t^{*-}))}{\sqrt{\mathbb{V}(X_t - X_t^{*+})} \sqrt{\mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-})}} \quad \text{car } \mathbb{V}(X_t - X_t^{*+}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - X_t^{*-}) \\ &= \text{Corr}((X_t - X_t^{*+}), (X_{t-m} - X_t^{*-})) \\ &= \rho(m) \end{aligned}$$

Autrement dit, le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre  $m$  est le coefficient de  $X_{t-m}$  dans la régression affine de  $X_t$  sur  $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m} \rangle$ , qui est aussi le coefficient de corrélation de  $X_t - X_t^{*+}$  avec  $X_{t-m} - X_t^{*-}$ .