ENSAE

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Corrigé des travaux dirigés n°2

Guillaume Lacôte

Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ `http://ensae.no-ip.com/SE206/`

Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a $\Phi(\mathbb{X}) = (1-3\mathbb{X})(1-\frac{1}{2}\mathbb{X})$; on constate que $\frac{1}{3}$ est racine de Φ et n'est **pas** hors du disque unité. *Remarque :* Considérons E l'espace de tous les processus stationnaires ; il est métrisable (pour la distance $\mathbb{V}(\cdot - \cdot)$) et complet (l'algèbre des suites réelles $\mathcal{L}^1$ est un Banach $\mathbb{X} \mapsto \lambda \cdot \mathbb{X}$, $X, Y \mapsto X + Y$, , $X, Y \mapsto X \times Y$) . En outre si a est dans $\mathcal{L}^1$ alors $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X_{t-k}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

L'opérateur $L : \begin{pmatrix} E & \to & E \\ (X_t)_{t\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (X_{t-1})_{t\in\mathbb{Z}} \end{pmatrix}$ est un morphisme (voir question 3), de norme triple $\sup_{X\in E} \frac{\|LX\|}{\|X\|} = \sup_{X\in E} \frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = 1$.

Considérons alors F l'espace des morphismes de E dans E, muni à son tour de la structure d'algèbre standard. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k \mathbb{X}^k$. Alors la série d'opérateurs de F $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k L^k$ converge dans F *ssi* la série réelle $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k$ converge, puisque L est de norme 1, soit si $|\lambda| < 1$.

Dans ce cas, comme $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k \mathbb{X}^k = \frac{1}{1-\lambda\mathbb{X}}$ on a : $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k L^k = (1-\lambda L)^{-1}$ est l'opérateur inverse dans F de $(1-\lambda L)$.

On a en l'occurence

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(\mathbb{X})} &= \frac{1}{(1-3\mathbb{X})(1-\frac{1}{2}\mathbb{X})} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-3\mathbb{X}} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathbb{X}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$ on a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathbb{X}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mathbb{X}^k$$

A l'inverse $3 > 1$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-3\mathbb{X})} &= \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{\mathbb{X}-\frac{1}{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) \frac{1}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)^k \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)^k \end{aligned}$$

☞ Q2 – Définissons

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } k \geq 0 \\ -\frac{6}{5}\frac{1}{3^k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors par construction $\frac{1}{\Phi(\mathbb{X})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathbb{X}^k$.

Par conséquent l'opérateur $\Phi(L)$ est inversible et d'inverse $\Phi(L)^{-1} = \Phi^{-1}(L) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k L^k +$

$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_{-k}F^k$, où F désigne l'opérateur avance.
Soit donc $Y = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\epsilon_{t-k}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$; par définition $Y = \Phi(L)^{-1}\epsilon$, c'est-à-dire $\Phi(L)Y = \epsilon$.

– Par ailleurs pour $t \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 1$ on a $\mathbb{C}ov\left(\epsilon_t, Y_{t-k}\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \mathbb{1}_{t=t-k-j}\,\sigma_\epsilon^2 = a_{-k}\sigma_\epsilon^2 \neq 0$. Or si ϵ était l'innovation de Y, alors $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_t = \left(Y_t - Y_t^{*+}\right) \perp\!\!\!\perp < 1, Yt-1, \ldots >$.
Donc ϵ n'est **pas** l'innovation de Y.

☞ Q3 – A est stationnaire donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\|a_kA_{t+k}\|_2 \leq |a_k|\|A\|_2 = |a_k|\gamma_A(0) + \mathbb{E}\left(A_0\right)^2$ et comme la série $\Theta(\mathbb{X})$ est absolument convergente, la série $\Theta(L)\circ A$ est normalement convergente.
Enfin $\mathbb{C}ov\left(B_t, B_{t-h}\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_ia_j\mathbb{C}ov\left(A_{t-i}, A_{t-h-j}\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_ia_j\gamma_A(h-i-j)$ ne dépend pas de $t\in\mathbb{Z}$.

– Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, et montrons tout d'abord que $\forall\omega\in\mathbb{R}$, $f_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(\omega) = \left|1-\lambda e^{i\omega}\right|^2 f_A(\omega)$. On a tout d'abord pour $h\in\mathbb{Z}$ [1]

$$\begin{aligned}
\gamma_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(h) &= \mathbb{C}ov\left(A_t - \lambda A_{t-1}\,,\, A_{t-h} - \lambda A_{t-h-1}\right)\\
&= \mathbb{C}ov\left(A_t, A_{t-h}\right) - \overline{\lambda}\mathbb{C}ov\left(A_t, A_{t-h-1}\right) - \lambda\mathbb{C}ov\left(A_{t-1}, A_{t-h}\right) + \lambda\overline{\lambda}\mathbb{C}ov\left(A_{t-1}, A_{t-h-1}\right)\\
&= \left(1+|\lambda|^2\right)\gamma_A(h) - \overline{\lambda}\gamma_A(h-1) - \lambda\gamma_A(h+1)
\end{aligned}$$

Donc pour $\omega\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(h)e^{i\omega h}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \left(\left(1+|\lambda|^2\right)\gamma_A(h) - \lambda\gamma_A(h-1) - \overline{\lambda}\gamma_A(h+1)\right)e^{i\omega h}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \left(\left(1+|\lambda|^2\right) - \lambda e^{i\omega} - \overline{\lambda}e^{-i\omega}\right)\gamma_A(h)e^{i\omega h}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1-\lambda e^{i\omega}\right)\left(1-\overline{\lambda}e^{-i\omega}\right)\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_A(h)e^{i\omega h}\\
&= \left|1-\lambda e^{i\omega}\right|^2\gamma_A(h)
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout polynôme $P\in\mathbb{C}[\mathbb{X}]$, P est scindé et s'écrit $P(\mathbb{X}) = (1-\lambda_1\mathbb{X})\cdots(1-\lambda_n\mathbb{X})$, donc

$$\begin{aligned}
f_{P(L)A}(\omega) &= \left|1-\lambda_1e^{i\omega}\right|^2 f_{(1-\lambda_2\mathbb{X})\cdots(1-\lambda_n\mathbb{X})A}(\omega)\\
&= \left|1-\lambda_1e^{i\omega}\right|^2\cdots\left|1-\lambda_ne^{i\omega}\right|^2 f_A(\omega)\\
&= \left|P\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega)
\end{aligned}$$

Pour toute fraction rationnelle $F = \frac{P(\mathbb{X})}{Q(\mathbb{X})}\in\mathbb{C}(\mathbb{X})$, on a

$$\begin{aligned}
\left|Q\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_{F(L)A}(\omega) &= f_{Q(L)F(L)A}(\omega)\\
&= f_{P(L)A}\\
&= \left|P\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega)
\end{aligned}$$

[1] Attention : $\mathbb{C}ov\left(\cdot,\cdot\right)$ est une forme hermitienne sur les variables aléatoires complexes, *i.e.* $\forall\mu\in\mathbb{C}$, $\mathbb{C}ov\left(X,\mu Y\right) = \overline{\mu}\mathbb{C}ov\left(X,Y\right)$ et pas $\mu\mathbb{C}ov\left(X,Y\right)$.

et donc $f_{F(L)A} = |F(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)$.
Soit enfin $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathbb{X}^k$ une série absolument convergente ; notons $\phi_N(\mathbb{X}) = \sum_{|k|\geq N} a_k \mathbb{X}^k$. Alors $\forall N \in \mathbb{N},\ f_{\Theta_N(L)A}(\omega) = |\Theta_N(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)$. Or Θ est absolement convergente, donc $|\Theta_N(e^{i\omega})|^2$ admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$, à savoir $|\Theta(e^{i\omega})|^2$. Donc $f_{\Theta_N(L)A}(\omega)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$, et on a

$$\boxed{f_{\Theta(L)A}(\omega) = |\Theta(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)}$$

<u>*Autre méthode :*</u>
Soit $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathbb{X}^k$ une série absolument convergente. Alors

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Theta(L)A}(h) &= \mathbb{C}ov\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j A_{t-j}, \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l A_{t-h-l}\right) \\
&= \sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_j a_l \gamma_A(h+l-j)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
f_{\Theta(L)A}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_j a_l \gamma_A(h+l-j)\right) e^{i\omega h} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_j a_l \left(\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_A(h+l-j) e^{i\omega h}\right) \quad \text{car les séries sont absolument sommables} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_j a_l \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma_A(m) e^{i\omega(m-i+j)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^{i\omega j}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{-i\omega l}\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma_A(m) e^{i\omega m}\right) \quad \textit{idem} \\
&= \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^{i\omega j}\right|^2 f_A(\omega) \\
&= \left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega)
\end{aligned}$$

☞ Q4 Soit donc Θ une série absolument convergente, et considérons le processus $Z = \Theta(L)Y$. Alors

$$\begin{aligned}
f_Z(\omega) &= \left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_Y(\omega) \\
&= \left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_{\Phi(L)^{-1}\epsilon}(\omega) \\
&= \left|\frac{\Theta\left(e^{i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{i\omega}\right)}\right|^2 f_\epsilon(\omega)
\end{aligned}$$

Or si η est un bruit blanc de variance σ_η^2, alors $f_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_\eta(h) e^{i\omega} = \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$. Et comme pour tout processus A on a $\gamma_A(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f_A(\omega) e^{-i\omega} d\omega$, la réciproque est également vraie (un processus est un bruit blanc *ssi* sa densité spectrale est constante).

En particulier, si Θ est tel que $\left|\frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})}\right|$ est indépendante de ω, alors Z est un bruit blanc.

C'est pourquoi on considère $\Phi^*(\mathbb{X}) = \left(1 - \frac{1}{3}\mathbb{X}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}\right)$: Φ^* a toutes ses racines hors du cercle unité par construction, et en outre en notant $\eta = \Phi^*(L)Y$ on a

$$\begin{aligned}
f_\eta(\omega) &= \left|\frac{\Theta\left(e^{i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{i\omega}\right)}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \left|\frac{1 - \frac{1}{3}e^{i\omega}}{1 - 3e^{i\omega}}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \left|\frac{1}{3}e^{i\omega}\right|^2 \left|\frac{3e^{-i\omega} - 1}{1 - 3e^{i\omega}}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \left|\frac{1}{3}e^{i\omega}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \frac{1}{9}\frac{\sigma^2}{2\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\eta \text{ est un bruit blanc de variance } \tfrac{\sigma_\epsilon^2}{9} \text{ tel que } \Phi^*(L)Y = \eta}$$

Φ^* ayant toutes ses racines de module strictement supérieur à 1 il admet un développement en série entière à indices positifs uniquement, à savoir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi^*(\mathbb{X})} &= (-2)\frac{1}{1 - \frac{1}{3}\mathbb{X}} + 3\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}} \\
&= -2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\mathbb{X}^k + 3\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\mathbb{X}^k
\end{aligned}$$

Posons donc pour $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = 3 \cdot 2^{-k} - 2 \cdot 3^{-k}$$

Alors par construction $\forall t \in \mathbb{Z}, Y = \Phi^{*-1}(L)\eta = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \eta_{t-k}$.
En particulier, η est l'innovation de Y.

☞ Q5 Par définition de l'innovation on a pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\eta_t = Y_t - \mathbb{EL}\left(Y_t|Y_{t-1},\ldots\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{EL}\left(Y_t|Y_{t-1},\ldots\right) &= Y_t - \eta_t \\
&= \left(\left(1 - \Phi^*(L)\right)Y\right)_t \\
&= \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} \\
&\neq \frac{7}{2}Y_{t-1} - \frac{3}{2}Y_{t-2} \quad \text{en général}
\end{aligned}$$

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Soit $V = \epsilon + (\mathbb{1} - 2L)\eta$.
On a pour $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{E}(V) = 0$ et de plus

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov\,(V_t, V_{t-h}) &= \mathbb{C}ov\,(\epsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}\,,\,\epsilon_{t-h} + \eta_{t-h} - 2\eta_{t-h-1}) \\ &= \begin{cases} (1+5\rho)\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ -2\rho\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi V est stationnaire et sa fonction d'auto-corrélation est celle d'un processus MA(1).
Soit alors $\theta \in \mathbb{R}$ et μ un bruit blanc de variance σ_μ^2, et notons $W = (\mathbb{1} - \theta L)\mu$.
Cherchons θ et σ_μ^2 tels que $\gamma_W = \gamma_V$.
On a $\gamma_W(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\,\sigma_\mu^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta\sigma_\mu^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Fixons donc

$$\begin{cases} \theta = & \dfrac{\frac{1+5\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}}{2} \\ \sigma_\mu^2 = & \dfrac{2\sigma_\epsilon^2}{\frac{1+\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}} \end{cases}$$

Alors[2] par construction

$$\begin{cases} & \theta^2 - \frac{1+5\rho}{2\rho}\theta + 1 = 0 \\ \text{et} & \sigma_\mu^2 = \frac{1}{\theta^2 - 2\theta + 1}\sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\,\sigma_\mu^2 = & (1+5\rho)\sigma_\epsilon^2 \\ -\theta\sigma_\mu^2 = & -2\rho\sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

et donc $\gamma_V = \gamma_W$.
En particulier, comme le polynôme MA d'un processus MA se déduit de ses auto-corrélations par les équations de Yule-Walker, V et W suivent le même processus MA : V suit donc le processus MA de polynôme $(1 - \theta\mathbb{X})$. [3]
Définissons donc $\nu = (\mathbb{1} - \theta L)^{-1}V$; alors par construction ν est un bruit blanc de variance $\sigma_\nu^2 = \sigma_\mu^2$.

---

[2] Le choix de $\frac{\frac{1+5\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}}{2}$ plutôt que $\frac{\frac{1+5\rho}{2\rho} + \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}}{2}$ permet de garantir que $|\theta| < 1$.

[3] En toute rigueur, il faudrait préalablement montrer que si un processus X stationnaire a son auto-corrélation nulle à partir du rang q, alors il suit un processus MA d'ordre au plus q. Pour ce faire, il faut définir le polynôme moyenne-mobile Δ issu des équations de Yule-Walker, puis vérifier que $f_{\Delta(L)^{-1}\circ X}(\omega)$ est constante, ce qui garantit que $\Delta(L)^{-1} \circ X$ est bien un bruit blanc. Voir aussi TD 3, exercice 1

Ainsi V vérifie

$$V = (\mathbb{1} - \theta L)\nu$$

où ν est un bruit blanc de variance $\sigma_\nu^2 = \frac{1}{\theta^2 - 2\theta + 1}\sigma_\epsilon^2$.

☞ Q2 On a $\epsilon = (\mathbb{1} - 2L)X$ et donc $V = (\mathbb{1} - 2L) \circ (X + \eta) = (\mathbb{1} - 2L)Y$. Autrement dit

$$(\mathbb{1} - 2L)Y = (\mathbb{1} - \theta L)\mu$$

et donc Y suit un ARMA(1,1) (car $\theta \neq 2$).
Cependant le polynôme $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - 2\mathbb{X}$ admet $\frac{1}{2}$ pour racine qui n'est pas hors du cercle unité : cette représentation n'est donc pas canonique.
De la même façon que dans exercice 1 on définit $\Phi^*(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$.
Notons $\xi = (\mathbb{1} - \theta L)\Phi^{*-1}(L)\mu$; alors ξ est un bruit blanc de variance

$$\left|\frac{\Phi^*\left(e^{i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{i\omega}\right)}\right|^2 \sigma_\mu^2 = \left|\frac{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega}}{1 - 2e^{i\omega}}\right|^2 \sigma_\mu^2 = \frac{1}{4}\sigma_\mu^2$$

Ainsi Y suit l'ARMA(1,1) sous forme canonique

$$\boxed{(\mathbb{1} - \tfrac{1}{2}L)Y = (\mathbb{1} - \theta L)\xi, \text{ où } \xi \text{ est un bruit blanc de variance } \tfrac{1}{4}\sigma_\mu^2}$$

☞ Q3 D'après le résultat précédent l'innovation du processus Y est ξ. Par ailleurs la fraction rationnelle $\frac{1}{1-\theta\mathbb{X}}$ est développable en série entière et on a $\frac{1}{1-\theta\mathbb{X}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \theta^k \mathbb{X}^k$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\xi &= (\mathbb{1} - \theta L)^{-1}\left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}L\right)Y \\
&= \left(\left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}L\right) \times \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \theta^k L^k\right)\right) \circ Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\sum_{k\geq 1} \theta^{k-1} L^k\right) \circ Y
\end{aligned}$$

et donc en définissant pour $k \geq 1$ $a_k = \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\theta^{k-1}$ on a $\forall t \in \mathbb{Z},\ \xi_t = Y_t - \sum_{k\geq 1} a_k Y_{t-k}$ et donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{Z},\ Y_t = \xi_t + \textstyle\sum_{k\geq 1} a_k Y_{t-k}}$$

En d'autres termes on a pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{EL}\left(Y_t | Y_{t-1}, \ldots\right) = \sum_{k\geq 1} a_k Y_{t-k}$. Cette représentation permet de *prédire* en moyenne sans erreur la prochaine valeur de Y compte-tenu de l'observation de son passé. En outre, la série étant géométrique le nombre de termes nécessaires pour atteindre une précision δ donnée ne croît que logarithmiquement avec cette précision (et bien-sûr avec $\gamma_Y(0)$).[4]

[4]Attention, l'erreur *systématique* due à la troncature de la série réelle $\sum_{k=1}^N$ n'a rien à voir avec l'*intervalle de confiance* de cette prévision, qui donne un domaine raisonnable pour réalisation de Y_{t+1} fondé sur la série complète.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 On a bien-sûr $\forall m \in \mathbb{N}, \rho_X(m)^2 = \left(\frac{\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-m})}{\mathbb{V}(X_t)}\right)^2 \leq \left(\frac{\mathbb{V}(X_t)\mathbb{V}(X_{t-m})}{\mathbb{V}(X_t)\mathbb{V}(X_{t-m})}\right)^2 = 1$

Notons $\Gamma_m(X) = \mathbb{C}ov\left(\begin{pmatrix} X \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m} \end{pmatrix}\right)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma_m(X)$ est positive (c'est un produit scalaire) ; en particulier $|\Gamma_m| \geq 0$, ce qui s'écrit lorsque $m = 2$

$$\begin{aligned}
|\Gamma_2(X)| &= \left|\begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \gamma_X(2) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) & \gamma_X(1) & \gamma_X(0) \end{pmatrix}\right| \\
&= \gamma_X(0)^3 + 2\gamma_X(2)\gamma_X(1)^2 - \gamma_X(0)\gamma_X(2)^2 - 2\gamma_X(0)\gamma_X(1)^2 \\
&= \gamma_X(0)^3 \left(1 - \rho_X(2)\right)\left(1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Si $\gamma_X(0) = 0$, le processus est (presque sûrement) déterministe et par Cauchy-Schwartz $\gamma_X(1) \leq \sqrt{\gamma_X(0)}^2 = 0$; ainsi dans tous les cas $(1 - \rho_X(2))(1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2) \geq 0$.
Supposons alors par l'absurde que $(1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2) < 0$; alors $|\rho_X(2)| \geq 1$, et donc $\rho_X(2) = 1$. Mais alors $1 + 1 - 2\rho_X(1)^2 < 0$, soit $\rho_X(1)^2 > 1$!
Par suite

$$\boxed{1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2 \geq 0}$$

Remarque : $(\rho_X(m))_{m\in\mathbb{N}}$ est donc soumise à une infinité de contraintes (polynomiales) ; voir aussi "Séries temporelles et modèles dynamiques", C. Gouriéroux et A. Monfort, `5.2` p 155.
On notera en particulier que pour que $\rho_X(2) = 0$ il faut que $|\rho_X(1)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

☞ Q2 (a) Pour que X soit stationnaire, il faut et il suffit qu'aucune racine de Φ ne soit unitaire.
Or les racines de Φ sont $\omega^- = \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$ et $\omega^+ = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$, avec la convention $\sqrt{x} = i\sqrt{-x}$ si $x < 0$.
Si les racines sont complexes conjuguées z et $\overline{z}$, alors $|z|^2 = |\overline{z}|^2 = z\overline{z} = -\frac{1}{\phi_2}$. Donc si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ une condition nécessaire et suffisante est que $\phi_2 \neq -1$. Sinon, les deux

racines sont réelles et alors

$$
\begin{aligned}
|\omega^{\pm}| \neq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}\right)^2 \neq 4\phi_2^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \phi_1^2 + \left(\phi_1^2+4\phi_2\right) - 4\phi_2^2 \neq \pm 2\phi_1\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} \\
&\Leftrightarrow \quad \phi_1^2 + 2\phi_2 - 2\phi_2^2 \neq \pm\phi_1\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} \\
&\Leftrightarrow \quad \phi_1^4 + 4\phi_2^2 + 4\phi_2^4 + 4\phi_1^2\phi_2 - 4\phi_1^2\phi_2^2 - 8\phi_2^3 \neq \phi_1^2\left(\phi_1^2+4\phi_2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \phi_2^2 + \phi_2^4 - \phi_1^2\phi_2^2 - 2\phi_2^3 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\phi_2 \neq 0 \,\text{ou}\, \phi_1 \neq \pm 1) \ \text{ et } \phi_2^2 - \phi_1^2 - 2\phi_2 + 1 \neq 0 \quad (\text{car } \phi_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \Phi(\mathbb{X}) = 1 - \phi_1\mathbb{X})
\end{aligned}
$$

(b) On a

– <u>Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$:</u> en particulier $\phi_2 < 0$ et de plus

$$
\begin{aligned}
|\omega^{\pm}| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{-\phi_1 \pm i\sqrt{-\left(\phi_1^2+4\phi_2\right)}}{2\phi_1}\right|^2 > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\phi_1^2 - \left(\phi_1^2+4\phi_2\right)}{4\phi_2^2} > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\phi_2} > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -1 < \phi_2 < 0
\end{aligned}
$$

– <u>Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$:</u>
Si $\phi_1 = 0$ alors $\phi_2 = 0$, et inversement si $\phi_2 = 0$ alors $\phi_1 = 1$; dans ce cas $X = \epsilon$.[5]
Sinon $\omega^- = \omega^+$ et on a

$$
\begin{aligned}
|\omega^{\pm}| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{-\phi_1}{2\phi_2}\right|^2 > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |\phi_2| < \frac{1}{2}|\phi_1| \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2\right| < \frac{1}{2}|\phi_1| \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{\phi_1}{2}\right|^2 < \left|\frac{\phi_1}{2}\right| \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < \left|\frac{\phi_1}{2}\right| < 1
\end{aligned}
$$

Ainsi dans tous les cas $|\omega^{\pm}| > 1 \ \Leftrightarrow\ |\phi_1| \leq 1$.

[5] Ce cas dégénéré est exclu par la suite : $\rho_X(1) = \rho_X(2) = 0$ et X ne convient pas sauf bien-sûr si $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

– Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$: Si $\phi_2 = 0$, $\phi_1 \neq 0$ et $\omega^- = \omega^+ = \frac{1}{\phi_1}$, donc $|\omega^\pm| > 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < |\phi_1| < 1$. Sinon, $\omega^- < \omega^+$, et donc

$$
\begin{array}{rcl}
|\omega^\pm| > 1 & \Leftrightarrow & \omega^+ < -1 \text{ ou } \omega^- > +1 \\
& \Leftrightarrow & \dfrac{\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}-\phi_1}{2\phi_2} < -1 \text{ ou } \dfrac{-\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2\phi_2} > 1 \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } \phi_2 > 0 : & \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} < \phi_1 - 2\phi_2 \;\text{ ou }\; \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} < -\phi_1 - 2\phi_2 \\ \text{Si } \phi_2 < 0 : & \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} > \phi_1 - 2\phi_2 \;\text{ ou }\; \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} > -\phi_1 - 2\phi_2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } \phi_2 > 0 : & \phi_1^2+4\phi_2 < (\phi_1 - 2\phi_2)^2 \;\text{ ou }\; \phi_1^2+4\phi_2 < (\phi_1 + 2\phi_2)^2 \\ \text{Si } \phi_2 < 0 : & \phi_1^2+4\phi_2 > (\phi_1 - 2\phi_2)^2 \;\text{ ou }\; \phi_1^2+4\phi_2 > (\phi_1 + 2\phi_2)^2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \phi_2 - \phi_1 > 1 \text{ ou } \phi_2 + \phi_1 > 1 \\
& \Leftrightarrow & \phi_2 - |\phi_1| > 1
\end{array}
$$

Conclusion : une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de Φ soient toutes de module supérieur à un est :

$$
\left\|
\begin{array}{lccc}
 & \phi_1^2 + 4\phi_2 < 0 & \text{et} & -1 < \phi_2 < 0 \\
\text{ou} & \phi_1^2 + 4\phi_2 = 0 & \text{et} & |\phi_1| < 1 \\
\text{ou} & \phi_1^2 + 4\phi_2 > 0 & \text{et} & \phi_2 < 1 - |\phi_1|
\end{array}
\right.
$$

Bien entendu lorsque cette condition est vérifiée le processus X est décrit sous forme MA canonique et donc ϵ est l'innovation de X.

(c) X étant supposée stationnaire et sous forme canonique, on a

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma_X(1) & = & \mathbb{C}ov\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t\,,\, X_{t-1}\right) \\
& = & \phi_1 \mathbb{V}\left(X_{t-1}\right) + \phi_2 \mathbb{C}ov\left(X_{t-2}, X_{t-1}\right) \quad \text{car } \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}, \ldots \\
& = & \phi_1 \gamma_X(0) + \phi_2 \gamma_X(1)
\end{array}
$$

et donc

$$
\boxed{\rho_X(1) = \tfrac{\phi_1}{1-\phi_2}}
$$

Par ailleurs

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma_X(2) & = & \mathbb{C}ov\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t\,,\, X_{t-2}\right) \\
& = & \phi_1 \mathbb{C}ov\left(X_{t-1}, X_{t-2}\right) + \phi_2 \mathbb{V}\left(X_{t-2}\right) \quad \text{car } \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}, \ldots \\
& = & \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(0)
\end{array}
$$

et donc $\rho_X(2) = \phi\rho_X(1) + \phi_2$ *i.e.*

$$
\boxed{\rho_X(2) = \tfrac{\phi_1^2}{1-\phi_1} + \phi_2}
$$

<u>*Remarque :*</u> d'une façon plus générale le développement de $\mathbb{C}ov\left(\Phi(L)X_t, \epsilon_t\right)$ assure que pour $m \geq d = d^\circ\Phi$, $\rho_X(m)$ suit la récurrence linéaire de polynôme caractéristique Φ. En particulier il existe des cœfficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ tels que $\forall m, \rho_X(m) = \lambda_1\omega_1^m + \cdots + \lambda_d\omega_d^m$.

Exprimons alors (ϕ_1, ϕ_2) en fonction de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$: on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho_X(1) & = & \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \\ \rho_X(2) & = & \phi_1\rho_X(1) + \phi_2 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi_1 & = & \rho_X(1)\left(1-\phi_2\right) \\ \rho_X(2) & = & \rho_X(1)^2\left(1-\phi_2\right) + \phi_2 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi_1 & = & \frac{\rho_X(1)(1-\rho_X(2))}{1-\rho_X(1)^2} \\ \phi_2 & = & \frac{\rho_X(2)-\rho_X(1)^2}{1-\rho_X(1)^2} \end{array}\right.$$

(d) Soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi_1 & = & \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1{}^2} \\ \phi_2 & = & \frac{\rho_2-\rho_1{}^2}{1-\rho_1{}^2} \end{array}\right.$$

et définissons le processus X par $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \phi_1X_{t-1} + \phi_2X_{t-2} + \eta_t$ où η est un bruit blanc.

Or $(\rho_1, \rho_2) \in R$, et donc[6] $(\phi_1, \phi_2) \in P$, de sorte que X est stationnaire et sous forme canonique. Par conséquent, $(\rho_X(1), \rho_X(2)) = (\rho_1, \rho_2)$.

⋆

⋆ ⋆

`Corrigé de l'exercice 4`

☞ Q1 On a pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \begin{pmatrix} \mathbb{V}\left(X_{t-1}\right) & \mathbb{C}ov\left(X_t, X_{t-1}\right) & \cdots & \mathbb{C}ov\left(X_t, X_{t-k}\right) \\ \mathbb{C}ov\left(X_{t-2}, X_{t-1}\right) & \mathbb{V}\left(X_{t-1}\right) & \cdots & \mathbb{C}ov\left(X_{t-1}, X_{t-k}\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}ov\left(X_{t-k}, X_{t-1}\right) & \mathbb{C}ov\left(X_{t-k}, X_{t-1}\right) & \cdots & \mathbb{V}\left(X_{t-k}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(k-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(k-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(k-1) & \gamma_X(k-2) & \cdots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[6] Calcul non développé ici ...

En particulier Γ_k ne dépend pas de t et est symétrique réelle à diagonale positive, donc positive. Par ailleurs, si k est tel que $|\Gamma_k| = 0$, alors comme il est montré dans TD 1, exercice 4 conditionnellement à un nombre fini de réalisations $X_1, \dots, X_r$ le processus X est presque-sûrement déterministe.

☞ Q2 Notons $X_t^* = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}$; on en tire tout d'abord comme X est stationnaire que $a_0 = \mathbb{E}(X_t)(1 - a_1 - \cdots - a_k)$. Par ailleurs X_t^* est caractérisé par[7]

$$(X_t - X_t^*) \perp\!\!\!\perp 1 \text{ et } \forall j \in [\![1, k]\!],\ (X_t - X_t^*) \perp\!\!\!\perp X_j$$

ce qui s'écrit pour $j \in [\![1, k]\!]$

$$\begin{array}{rrcl}
 & 0 & = & \mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right) \cdot X_{t-j}\right) \\
\text{soit} & \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & a_0 \mathbb{E}(X_t) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \cdots + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\
\text{soit} & \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1}) \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \cdots \\
 & & & + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\
 & & = & \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 \left(\mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1}) \mathbb{E}(X_{t-j})\right) + \cdots \\
 & & & + a_{m-1} \left(\mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1}) \mathbb{E}(X_{t-j})\right) \\
\text{soit} & \gamma_X(j) & = & a_1 \gamma_X(j-1) + \cdots + a_{m-1} \gamma_X(j-m+1)
\end{array}$$

et donc en définitive

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
a_0 & = & \mathbb{E}(X_t)(1 - a_1 - \cdots - a_k) \\
\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} & = & (\Gamma_k)^{-1} \times \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
\end{array}}$$

☞ Q3 On a

$$\begin{array}{rcl}
X_t - X_t^* & = & X_t - a_0 - (a_1, \dots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \\
 & = & X_t - \left(\mathbb{E}(X_t) - a_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) - \cdots - a_k \mathbb{E}(X_{t-k})\right) - (a_1, \dots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \\
 & = & (X_t - \mathbb{E}(X_t)) - (a_1, \dots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix} \\
 & = & (X_t - \mathbb{E}(X_t)) - (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) \times \left(\Gamma_k'\right)^{-1} \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_t - k) \end{pmatrix}
\end{array}$$

[7] Voir aussi TD 1, exercice 4 .

Or $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^*)$ et Γ_k est symétrique, donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_t - X_t^*) &= \mathbb{E}\left((X_t - X_t^*)^2\right) \\
&= \left\{\begin{array}{ll}
 & \mathbb{E}\left((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2\right) \\
- & 2\mathbb{E}\left((X_t - \mathbb{E}(X_t)) \cdot (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) \times (\Gamma_k)^{-1} \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_t - k) \end{pmatrix}\right) \\
+ & \left\{\begin{array}{ll}
 & (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k))\,(\Gamma_k)^{-1} \\
\times & \underbrace{\mathbb{E}\left((X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}), \dots, X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k})) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix}\right)}_{\Gamma_k} \\
\times & (\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll}
 & \mathbb{V}(X_t) \\
- & 2\,(\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) \times (\Gamma_k)^{-1} \times \underbrace{\mathbb{E}\left((X_t - \mathbb{E}(X_t)) \cdot \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_t - k) \end{pmatrix}\right)}_{(\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k))'} \\
+ & (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k))\,(\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
\end{array}\right. \\
&= \mathbb{V}(X_t) - (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k))\,(\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

☞ Q4 (a) On a

$$
\Gamma_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c}
\gamma_X(0) & \gamma_X(1) \cdots \gamma_X(k) \\
\hline
\begin{matrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{matrix} & \Gamma_k
\end{array}\right)
$$

puisque Γ_k de dépend pas de la date t considérée.

Soit alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ et considérons $A(\lambda) = \Gamma_{k+1} - \lambda_1 C_2 - \dots - \lambda_k C_{k+1}$ où $C_{i+1} =$

$\begin{pmatrix} \gamma_X(i) \\ \gamma_X(i-1) \\ \gamma_X(i-2) \\ \vdots \\ \gamma_X(i-k) \end{pmatrix}$ est la i-ième colonne de Γ_{k+1}.

Alors $|A(\lambda)| = |\Gamma_{k+1}|$.

Or la première colonne C_A de $A(\lambda)$ s'écrit

$$C_A = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) \quad - \quad \lambda_1\gamma_X(1) - \cdots - \lambda_k\gamma_X(k) \\ \hline \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \quad - \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \times \Gamma_k \end{pmatrix}$$

Posons donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1}$; il vient

$$C_A = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

de sorte que [8]

$$\begin{aligned} |\Gamma_{k+1}| &= \left(\gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \right) \cdot |\Gamma_k| \\ &= \boxed{\sigma_k^2 \cdot |\Gamma_k|} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ $|\Gamma_l| = \sigma_{l-1}^2 \cdots \sigma_1^2 |\Gamma_1| = \sigma_{l-1}^2 \cdots \sigma_1^2\, \gamma_X(0)$

[8] Γ_k est symétrique et $\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k))$ est un réel (donc égal à son transposé) et donc

$$\gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} (\Gamma_k)^{-1} (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \ = \ \gamma_X(0) - (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \left(\Gamma_k'\right)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \ = \ \sigma_k^2$$

(b) Notons $\mathcal{E}_k =< 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-k} >$. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma_{k+1}^2 &= \mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_{k+1}\right)\right) \\
&= \min_{Y \in \mathcal{E}_{k+1}} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) \\
&\leq \min_{Y \in \mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_{k+1}} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) \\
&\leq \mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_k\right)\right) \\
&= \sigma_k^2
\end{aligned}$$

La suite $(\sigma_l^2)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée (par 0), donc convergente.
Notons enfin $\mathcal{E}_\infty =< 1, X_{t-1}, \dots >$; alors pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$\sigma_\infty^2 = \mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_\infty\right)\right) = \min_{Y \in \mathcal{E}} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) \leq \min_{Y \in \mathcal{E}_k} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) = \sigma_k^2$$

Et réciproquement, $(\sigma_l^2 - \sigma_\infty^2) \leq \|\mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_l\right) - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_\infty\right)\|^2 \xrightarrow[l \to +\infty]{} 0$ de sorte que

$$\boxed{\sigma_l^2 \xrightarrow[l \to +\infty]{} \sigma_\infty^2}$$

(c) On a alors

$$\begin{aligned}
\log\left(\sigma_\infty^2\right) &= \lim_{l\infty} \log \frac{|\Gamma_{k+1}|}{|\Gamma_k|} \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \log \frac{|\Gamma_{j+1}|}{|\Gamma_j|} \quad \text{par Césaro} \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l} \log\left(\prod_{j=1}^{l} \frac{|\Gamma_{j+1}|}{|\Gamma_j|}\right) \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l} \log \frac{|\Gamma_{l+1}|}{|\Gamma_1|} \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l} \left(\log|\Gamma_{l+1}| - \log|\gamma_X(0|\right) \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l} \log|\Gamma_{l+1}|
\end{aligned}$$

☞ Q5 (a) On a pour $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{E}\left(X_t\right) = 0$ et pour $h \in \mathbb{Z}$

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier X est stationnaire.

(b) On a pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma_k = \sigma_\epsilon^2 \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -\theta & 1+\theta^2 & -\theta \\ 0 & \cdots & 0 & -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix}$$

On a tout d'abord

$$|\Gamma_1| = \left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2$$

$$|\Gamma_2| = \sigma_\epsilon^2 \left| \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta \\ -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix} \right| = \left(1+\theta^2+\theta^4\right)\sigma_\epsilon^4$$

puis pour $k \geq 2$, en notant $A_k = \frac{1}{\sigma_\epsilon^{2k}}\Gamma_k$

$$\begin{aligned}
|A_k| &= \left| \left(\begin{array}{c|c} 1+\theta^2 & -\theta\ 0\cdots 0 \\ \hline -\theta & \\ 0 & \\ \vdots & A_{k-1} \\ 0 & \end{array} \right) \right| \\
& \quad \textit{(en développant par rapport à la première colonne)} \\
&= (-1)^{1+1}\left(1+\theta^2\right)|A_{k-1}| + (-1)^{2+1}(-\theta) \left| \left(\begin{array}{c|cccc} -\theta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & & 0 \\ 0 & -\theta & 1+\theta^2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -\theta & 1+\theta^2 \end{array} \right) \right| \\
& \quad \textit{(en soustrayant la première ligne à la deuxième)} \\
&= \left(1+\theta^2\right)|A_{k-1}| + \theta \left| \left(\begin{array}{c|c} -\theta & 0\cdots 0 \\ \hline -\theta & \\ 0 & \\ \vdots & A_{k-2} \\ 0 & \end{array} \right) \right| \\
&= \left(1+\theta^2\right)|A_{k-1}| - \theta^2 |A_{k-2}|
\end{aligned}$$

Soit alors $k \geq 3$ tel que $\forall l < k,\ |A_l| = 1+\theta^2+\cdots+\theta^{2l}$. Alors

$$\begin{aligned}
|A_k| &= \left(1+\theta^2\right)\left(1+\theta^2+\cdots+\theta^{2k-2}\right) - \theta^2\ \left(1+\theta^2+\cdots+\theta^{2k-4}\right) \\
&= \left(1+2\theta^2+2\theta^4+\cdots+2\theta^{2k-2}+\theta^{2k}\right) - \left(\theta^2-\theta^4-\cdots-\theta^{2k-2}\right) \\
&= 1+\theta^2+\cdots+\theta^{2k}
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{|\Gamma_k|}{\sigma_\epsilon^{2k}} = 1 + \theta^2 + \cdots + \theta^{2k} = \frac{1-\theta^{2k+2}}{1-\theta^2}$
En définitive

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\Gamma_k| = \frac{1-\theta^{2k+2}}{1-\theta^2}\sigma_\epsilon^{2k}}$$

(c) $|\theta| < 1$ donc l'unique racine $\frac{1}{\theta}$ de $1 - \theta\mathbb{X}$ est hors du cercle unité (si elle existe, *i.e.* si $\theta \neq 0$) ; donc ϵ est bien l'innovation de X.
Par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} \log|\Gamma_l| &= \frac{1}{k}\left(\log\left(1-\theta^{2k+2}\right) - \log\left(1-\theta^2\right) + \log\left(\sigma_\epsilon^{2k}\right)\right) \\ &\underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{\theta^{2k+2}}{k} - \frac{\log\left(1-\theta^2\right)}{k} + \log\sigma_\epsilon^2 \\ &\xrightarrow[k\to+\infty]{} \log\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

⋆
⋆ ⋆