ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Enoncé des travaux dirigés n°2

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

Enoncé de l'exercice 1

On considère un processus X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} \ = \ \epsilon_t$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

☞ Q1 Soit $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \frac{7}{2}\mathbb{X} + \frac{3}{2}\mathbb{X}^2$.
Factoriser Φ et décomposer $\Phi(\mathbb{X})^{-1}$ en éléments simples.
Développer chaque élément simple en série entière de $\mathbb{X}$ ou de $\frac{1}{\mathbb{X}}$ selon les cas.

☞ Q2 Montrer qu'il existe $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ telle que $Y = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\epsilon_{t-k}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ existe et vérifie (1).
Vérifier que $\forall k < 0,\ a_k \neq 0$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall k \geq 1,\ \mathbb{C}ov\left(\epsilon_t, Y_{t-k}\right) \neq 0$.
En déduire que ϵ n'est **pas** l'innovation de X.

☞ Q3 Soit Θ une série entière absolument convergente, et A un processus stationnaire quelconque
Montrer que le processus $B = \Theta(L)A$ existe bien et est stationnaire.
Vérifier que $\forall \omega \in \mathbb{R}, f_B(\omega) = \left|\Theta\left(e^{+i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega)$, où f_Z désigne la densité spectrale de Z.

☞ Q4 Montrer qu'il existe un polynôme Φ^* de degré 2, dont toutes les racines sont hors du cer
unité, et un bruit blanc η tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Phi^*(L)Y_t = \eta_t$$

En déduire qu'il existe $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ Y_t = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\eta_{t-k}$$

et que η est l'innovation de Y.

☞ Q5 Montrer que la régression linéaire optimale de Y_t sur son passé n'est **pas** $\frac{7}{2}Y_{t-1} - \frac{3}{2}Y_{t-2}$.

Enoncé de l'exercice 2

On considère un processus stationnaire du second ordre X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = 2X_{t-1} + \epsilon_t$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.
On suppose que l'observation de X est imprécise et qu'on n'observe que $Y = X + \eta$, où η
un bruit blanc décorrélé de ϵ et de variance $\sigma_\eta^2 = \rho\sigma_\epsilon^2,\ \rho > 0$.

☞ Q1 Montrer que $\epsilon + (\mathbb{1} - 2L)\eta$ est un processus MA(1).

☞ Q2 Montrer Y est un processus ARMA(1,1), et donner sa représentation canonique.

☞ Q3 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\right)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z},\, Y_t = e_t + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k Y_{t-k}$$

où e désigne l'innovation de Y.
Justifier l'intérêt d'une telle représentation.

Enoncé de l'exercice 3

Etant donné un processus stationnaire X, si $\rho_X(1)$ est elevée alors X_t est "assez" correlé avec X_{t-1} et X_{t-1} avec X_{t-2} ; par conséquent il semble naturel que X_t soit "relativement" corrélé avec X_{t-2}, c'est-à-dire que $\rho_X(2)$ ne soit "pas trop" faible.

L'objet de cet exercice est de déterminer précisément le domaine de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$. On définit à cet effet

$$R = \{(x,y) \in [-1,1]^2 \,/\, y \geq 2x^2 - 1\}$$

☞ Q1 Soit X un processus stationnaire quelconque (du second ordre).
Montrer que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) \in R$.

☞ Q2 On se donne réciproquement $(\rho_1, \rho_2) \in R$ et on cherche X stationnaire tel que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) = (\rho_1, \rho_2)$.
On considère pour cela le processus X défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z},\; X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$$

où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

(a) On note $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \phi_1\mathbb{X} - \phi_2\mathbb{X}^2$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (ϕ_1, ϕ_2) pour que X soit stationnaire.

(b) On note P l'ensemble des (ϕ_1, ϕ_2) tel que les racines de Φ sont hors du disque unité ; déterminer P. Que peut-on dire de ϵ si $(\phi_1, \phi_2) \in P$?

(c) Calculer $(\rho_X(1), \rho_X(2))$, et en déduire l'expression de (ϕ_1, ϕ_2) en fonction de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$.

(d) Conclure.

Enoncé de l'exercice 4

On considère un processus X stationnaire du second ordre, et on note pour $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_k = \mathbb{C}ov\left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix}\right)$$

☞ Q1 Justifier que Γ_k est indépendante de $t \in \mathbb{Z}$ et qu'elle est positive.
Que dire de X si $|\Gamma_k| = 0$?

On se donne désormais $k \in \mathbb{N}$ et on supposera que $|\Gamma_k| > 0$.

☞ Q2 Calculer les cœfficients $a_1, \ldots, a_k$ de la régression de $X_t^* = \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-k}\right)$ sur $1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-k} >$.

☞ Q3 Calculer σ_k^2, la variance de l'erreur de prévision $X_t - X_t^*$.

☞ Q4 (a) Montrer que $|\Gamma_{k+1}| = \sigma_k^2 |\Gamma_k|$.

(b) Montrer que $(\sigma_l^2)_{l\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
En déduire qu'elle admet une limite finie lorsque $l \to +\infty$, et que cette limite est σ_∞^2
$\mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots\right)\right)$ la variance de l'innovation du processus X.

(c) Montrer que $\frac{1}{l}\log|\Gamma_l| \xrightarrow[l\to+\infty]{} \log\sigma_\infty^2$.

☞ Q5 Application : on considère un processus du second ordre X vérifiant $X = (1 - \theta L)\epsilon$ p
$\theta \in]-1, 1[$, où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

(a) Montrer que X est stationnaire et calculer γ_X.

(b) Calculer $|\Gamma_k|$.

(c) Vérifier que ϵ est l'innovation de X et que $\frac{1}{k}\log|\Gamma_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \log\sigma_\epsilon^2$.
