



Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Énoncé des travaux dirigés n°2

Guillaume Lacôte

 Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Enoncé de l'exercice 1

On considère un processus X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \epsilon_t \quad (1)$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

⇒ Q1 Soit $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \frac{7}{2}\mathbb{X} + \frac{3}{2}\mathbb{X}^2$.

Factoriser Φ et décomposer $\Phi(\mathbb{X})^{-1}$ en éléments simples.

Développer chaque élément simple en série entière de \mathbb{X} ou de $\frac{1}{\mathbb{X}}$ selon les cas.

⇒ Q2 Montrer qu'il existe $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ telle que $Y = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \epsilon_{t-k})_{t \in \mathbb{Z}}$ existe et vérifie (1).

Vérifier que $\forall k < 0, a_k \neq 0$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall k \geq 1, \text{Cov}(\epsilon_t, Y_{t-k}) \neq 0$.

En déduire que ϵ n'est **pas** l'innovation de X .

⇒ Q3 Soit Θ une série entière absolument convergente, et A un processus stationnaire quelconque.

Montrer que le processus $B = \Theta(L)A$ existe bien et est stationnaire.

Vérifier que $\forall \omega \in \mathbb{R}, f_B(\omega) = |\Theta(e^{+i\omega})|^2 f_A(\omega)$, où f_Z désigne la densité spectrale de Z .

⇒ Q4 Montrer qu'il existe un polynôme Φ^* de degré 2, dont toutes les racines sont hors du cercle unité, et un bruit blanc η tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Phi^*(L)Y_t = \eta_t$$

En déduire qu'il existe $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, Y_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \eta_{t-k}$$

et que η est l'innovation de Y .

⇒ Q5 Montrer que la régression linéaire optimale de Y_t sur son passé n'est **pas** $\frac{7}{2}Y_{t-1} - \frac{3}{2}Y_{t-2}$.

Enoncé de l'exercice 2

On considère un processus stationnaire du second ordre X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = 2X_{t-1} + \epsilon_t$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

On suppose que l'observation de X est imprécise et qu'on n'observe que $Y = X + \eta$, où η est un bruit blanc décorrélé de ϵ et de variance $\sigma_\eta^2 = \rho\sigma_\epsilon^2, \rho > 0$.

- ⇒ Q1 Montrer que $\epsilon + (1 - 2L)\eta$ est un processus MA(1).
- ⇒ Q2 Montrer Y est un processus ARMA(1,1), et donner sa représentation canonique.
- ⇒ Q3 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, Y_t = e_t + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k Y_{t-k}$$

où e désigne l'innovation de Y .
Justifier l'intérêt d'une telle représentation.

Enoncé de l'exercice 3

Etant donné un processus stationnaire X , si $\rho_X(1)$ est élevée alors X_t est "assez" corrélé avec X_{t-1} et X_{t-1} avec X_{t-2} ; par conséquent il semble naturel que X_t soit "relativement" corrélé avec X_{t-2} , c'est-à-dire que $\rho_X(2)$ ne soit "pas trop" faible.

L'objet de cet exercice est de déterminer précisément le domaine de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$. On définit à cet effet

$$R = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 / y \geq 2x^2 - 1\}$$

- ⇒ Q1 Soit X un processus stationnaire quelconque (du second ordre).
Montrer que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) \in R$.
- ⇒ Q2 On se donne réciproquement $(\rho_1, \rho_2) \in R$ et on cherche X stationnaire tel que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) = (\rho_1, \rho_2)$.
On considère pour cela le processus X défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

- (a) On note $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \phi_1 \mathbb{X} - \phi_2 \mathbb{X}^2$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (ϕ_1, ϕ_2) pour que X soit stationnaire.
- (b) On note P l'ensemble des (ϕ_1, ϕ_2) tel que les racines de Φ sont hors du disque unité; déterminer P . Que peut-on dire de ϵ si $(\phi_1, \phi_2) \in P$?
- (c) Calculer $(\rho_X(1), \rho_X(2))$, et en déduire l'expression de (ϕ_1, ϕ_2) en fonction de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$.
- (d) Conclure.

Enoncé de l'exercice 4

On considère un processus X stationnaire du second ordre, et on note pour $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_k = \text{Cov} \left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \right)$$

- ⇒ Q1 Justifier que Γ_k est indépendante de $t \in \mathbb{Z}$ et qu'elle est positive.
Que dire de X si $|\Gamma_k| = 0$?
On se donne désormais $k \in \mathbb{N}$ et on supposera que $|\Gamma_k| > 0$.
- ⇒ Q2 Calculer les coefficients a_1, \dots, a_k de la régression de $X_t^* = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-k})$ sur $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-k} \rangle$.
- ⇒ Q3 Calculer σ_k^2 , la variance de l'erreur de prévision $X_t - X_t^*$.
- ⇒ Q4 (a) Montrer que $|\Gamma_{k+1}| = \sigma_k^2 |\Gamma_k|$.
(b) Montrer que $(\sigma_l^2)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
En déduire qu'elle admet une limite finie lorsque $l \rightarrow +\infty$, et que cette limite est $\sigma_\infty^2 = \mathbb{V}(X_t - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t | 1, X_{t-1}, \dots))$ la variance de l'innovation du processus X .
(c) Montrer que $\frac{1}{l} \log |\Gamma_l| \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \log \sigma_\infty^2$.
- ⇒ Q5 Application : on considère un processus du second ordre X vérifiant $X = (1 - \theta L)\epsilon$ pour $\theta \in]-1, 1[$, où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .
(a) Montrer que X est stationnaire et calculer γ_X .
(b) Calculer $|\Gamma_k|$.
(c) Vérifier que ϵ est l'innovation de X et que $\frac{1}{k} \log |\Gamma_k| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \log \sigma_\epsilon^2$.