



Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Énoncé et corrigé des travaux dirigés n° 2

Guillaume Lacôte

 Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Énoncé de l'exercice 1

On considère un processus X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \epsilon_t \quad (1)$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

- ⇒ Q1 Soit $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \frac{7}{2}\mathbb{X} + \frac{3}{2}\mathbb{X}^2$.
Factoriser Φ et décomposer $\Phi(\mathbb{X})^{-1}$ en éléments simples.
Développer chaque élément simple en série entière de \mathbb{X} ou de $\frac{1}{\mathbb{X}}$ selon les cas.
- ⇒ Q2 Montrer qu'il existe $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ telle que $Y = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \epsilon_{t-k})_{t \in \mathbb{Z}}$ existe et vérifie (1).
Vérifier que $\forall k < 0, a_k \neq 0$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall k \geq 1, \text{Cov}(\epsilon_t, Y_{t-k}) \neq 0$.
En déduire que ϵ n'est **pas** l'innovation de X .
- ⇒ Q3 Soit Θ une série entière absolument convergente, et A un processus stationnaire quelconque.
Montrer que le processus $B = \Theta(L)A$ existe bien et est stationnaire.
Vérifier que $\forall \omega \in \mathbb{R}, f_B(\omega) = |\Theta(e^{+i\omega})|^2 f_A(\omega)$, où f_Z désigne la densité spectrale de Z .
- ⇒ Q4 Montrer qu'il existe un polynôme Φ^* de degré 2, dont toutes les racines sont hors du cercle unité, et un bruit blanc η tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Phi^*(L)Y_t = \eta_t$$

En déduire qu'il existe $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, Y_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \eta_{t-k}$$

et que η est l'innovation de Y .

- ⇒ Q5 Montrer que la régression linéaire optimale de Y_t sur son passé n'est **pas** $\frac{7}{2}Y_{t-1} - \frac{3}{2}Y_{t-2}$.

Corrigé de l'exercice 1

- ⇒ Q1 On a $\Phi(\mathbb{X}) = (1 - 3\mathbb{X})(1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$; on constate que $\frac{1}{3}$ est racine de Φ et n'est **pas** hors du disque unité. Remarque : Considérons E l'espace de tous les processus stationnaires; il est métrisable (pour la distance $\mathbb{V}(\cdot - \cdot)$) et complet (l'algèbre des suites réelles \mathcal{L}^1 est un Banach $\mathbb{X} \mapsto \lambda \cdot \mathbb{X}$, $X, Y \mapsto X + Y$, $X, Y \mapsto X \times Y$). En outre si a est dans \mathcal{L}^1 alors $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X_{t-k})_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire.

L'opérateur $L : \left(\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ (X_t)_{t \in \mathbb{Z}} & \mapsto & (X_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}} \end{array} \right)$ est un morphisme (voir question 3), de norme triple $\sup_{X \in E} \frac{\|LX\|}{\|X\|} = \sup_{X \in E} \frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = 1$.

Considérons alors F l'espace des morphismes de E dans E , muni à son tour de la structure d'algèbre standard. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k \mathbb{X}^k$. Alors la série d'opérateurs de F $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k L^k$ converge dans F ssi la série réelle $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k$ converge, puisque L est de norme 1, soit si $|\lambda| < 1$.

Dans ce cas, comme $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k \mathbb{X}^k = \frac{1}{1-\lambda\mathbb{X}}$ on a : $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k L^k = (1 - \lambda L)^{-1}$ est l'opérateur inverse dans F de $(1 - \lambda L)$.

On a en l'occurrence

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(\mathbb{X})} &= \frac{1}{(1 - 3\mathbb{X})(1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1 - 3\mathbb{X}} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$ on a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mathbb{X}^k$$

A l'inverse $3 > 1$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - 3\mathbb{X})} &= \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{\mathbb{X} - \frac{1}{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)^k \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)^k \end{aligned}$$

☞ Q2 – Définissons

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } k \geq 0 \\ -\frac{6}{5} \frac{1}{3^k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors par construction $\frac{1}{\Phi(\mathbb{X})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \mathbb{X}^k$.

Par conséquent l'opérateur $\Phi(L)$ est inversible et d'inverse $\Phi(L)^{-1} = \Phi^{-1}(L) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k L^k + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_{-k} F^k$, où F désigne l'opérateur avance.

Soit donc $Y = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \epsilon_{t-k}\right)_{t \in \mathbb{Z}}$; par définition $Y = \Phi(L)^{-1} \epsilon$, c'est-à-dire $\Phi(L)Y = \epsilon$.

– Par ailleurs pour $t \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 1$ on a $\text{Cov}(\epsilon_t, Y_{t-k}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \mathbb{1}_{t=t-k-j} \sigma_\epsilon^2 = a_{-k} \sigma_\epsilon^2 \neq 0$. Or si ϵ était l'innovation de Y , alors $\forall t \in \mathbb{Z}, \epsilon_t = (Y_t - Y_t^{*+}) \perp\!\!\!\perp \langle 1, Y_{t-1}, \dots \rangle$.

Donc ϵ n'est **pas** l'innovation de Y .

☞ Q3 – A est stationnaire donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, \|a_k A_{t+k}\|_2 \leq |a_k| \|A\|_2 = |a_k| \gamma_A(0) + \mathbb{E}(A_0)^2$ et comme la série $\Theta(\mathbb{X})$ est absolument convergente, la série $\Theta(L) \circ A$ est normalement convergente.

Enfin $\text{Cov}(B_t, B_{t-h}) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_i a_j \text{Cov}(A_{t-i}, A_{t-h-j}) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_A(h - i - j)$ ne dépend pas de $t \in \mathbb{Z}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et montrons tout d’abord que $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $f_{(1-\lambda L)A}(\omega) = |1 - \lambda e^{i\omega}|^2 f_A(\omega)$. On a tout d’abord pour $h \in \mathbb{Z}$ ¹

$$\begin{aligned} \gamma_{(1-\lambda L)A}(h) &= \text{Cov}(A_t - \lambda A_{t-1}, A_{t-h} - \lambda A_{t-h-1}) \\ &= \text{Cov}(A_t, A_{t-h}) - \bar{\lambda} \text{Cov}(A_t, A_{t-h-1}) - \lambda \text{Cov}(A_{t-1}, A_{t-h}) + \lambda \bar{\lambda} \text{Cov}(A_{t-1}, A_{t-h-1}) \\ &= (1 + |\lambda|^2) \gamma_A(h) - \bar{\lambda} \gamma_A(h-1) - \lambda \gamma_A(h+1) \end{aligned}$$

Donc pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{(1-\lambda L)A}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_{(1-\lambda L)A}(h) e^{i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} ((1 + |\lambda|^2) \gamma_A(h) - \lambda \gamma_A(h-1) - \bar{\lambda} \gamma_A(h+1)) e^{i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} ((1 + |\lambda|^2) - \lambda e^{i\omega} - \bar{\lambda} e^{-i\omega}) \gamma_A(h) e^{i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi} (1 - \lambda e^{i\omega}) (1 - \bar{\lambda} e^{-i\omega}) \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_A(h) e^{i\omega h} \\ &= |1 - \lambda e^{i\omega}|^2 \gamma_A(h) \end{aligned}$$

Par suite, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$, P est scindé et s’écrit $P(\mathbb{X}) = (1 - \lambda_1 \mathbb{X}) \cdots (1 - \lambda_n \mathbb{X})$, donc

$$\begin{aligned} f_{P(L)A}(\omega) &= |1 - \lambda_1 e^{i\omega}|^2 f_{(1-\lambda_2 \mathbb{X}) \cdots (1-\lambda_n \mathbb{X})A}(\omega) \\ &= |1 - \lambda_1 e^{i\omega}|^2 \cdots |1 - \lambda_n e^{i\omega}|^2 f_A(\omega) \\ &= |P(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega) \end{aligned}$$

Pour toute fraction rationnelle $F = \frac{P(\mathbb{X})}{Q(\mathbb{X})} \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$, on a

$$\begin{aligned} |Q(e^{i\omega})|^2 f_{F(L)A}(\omega) &= f_{Q(L)F(L)A}(\omega) \\ &= f_{P(L)A} \\ &= |P(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega) \end{aligned}$$

et donc $f_{F(L)A} = |F(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)$.

Soit enfin $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \mathbb{X}^k$ une série absolument convergente; notons $\phi_N(\mathbb{X}) = \sum_{|k| \geq N} a_k \mathbb{X}^k$. Alors $\forall N \in \mathbb{N}$, $f_{\Theta_N(L)A}(\omega) = |\Theta_N(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)$. Or Θ est absolument convergente, donc $|\Theta_N(e^{i\omega})|^2$ admet une limite finie lorsque $N \rightarrow +\infty$, à savoir $|\Theta(e^{i\omega})|^2$. Donc $f_{\Theta_N(L)A}(\omega)$ admet une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, et on a

$$f_{\Theta(L)A}(\omega) = |\Theta(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)$$

¹Attention : $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ est une forme hermitienne sur les variables aléatoires complexes, *i.e.* $\forall \mu \in \mathbb{C}$, $\text{Cov}(X, \mu Y) = \bar{\mu} \text{Cov}(X, Y)$ et pas $\mu \text{Cov}(X, Y)$.

Autre méthode :

Soit $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \mathbb{X}^k$ une série absolument convergente. Alors

$$\begin{aligned} \gamma_{\Theta(L)A}(h) &= \text{Cov} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j A_{t-j}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l A_{t-h-l} \right) \\ &= \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} a_j a_l \gamma_A(h + l - j) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_{\Theta(L)A}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j, l \in \mathbb{Z}} a_j a_l \gamma_A(h + l - j) \right) e^{i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} a_j a_l \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_A(h + l - j) e^{i\omega h} \right) \quad \text{car les séries sont absolument sommables} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} a_j a_l \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_A(m) e^{i\omega(m-i+j)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{i\omega j} \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l e^{-i\omega l} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_A(m) e^{i\omega m} \right) \quad \text{idem} \\ &= \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{i\omega j} \right|^2 f_A(\omega) \\ &= |\Theta(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega) \end{aligned}$$

⇒ Q4 Soit donc Θ une série absolument convergente, et considérons le processus $Z = \Theta(L)Y$. Alors

$$\begin{aligned} f_Z(\omega) &= |\Theta(e^{i\omega})|^2 f_Y(\omega) \\ &= |\Theta(e^{i\omega})|^2 f_{\Phi(L)^{-1}\epsilon}(\omega) \\ &= \left| \frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})} \right|^2 f_\epsilon(\omega) \end{aligned}$$

Or si η est un bruit blanc de variance σ_η^2 , alors $f_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_\eta(h) e^{i\omega} = \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$. Et comme pour tout processus A on a $\gamma_A(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f_A(\omega) e^{-i\omega h} d\omega$, la réciproque est également vraie (un processus est un bruit blanc *ssi* sa densité spectrale est constante).

En particulier, si Θ est tel que $\left| \frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})} \right|$ est indépendante de ω , alors Z est un bruit blanc.

C'est pourquoi on considère $\Phi^*(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{3}\mathbb{X})(1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$: Φ^* a toutes ses racines hors du cercle

unité par construction, et en outre en notant $\eta = \Phi^*(L)Y$ on a

$$\begin{aligned} f_\eta(\omega) &= \left| \frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\ &= \left| \frac{1 - \frac{1}{3}e^{i\omega}}{1 - 3e^{i\omega}} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\ &= \left| \frac{1}{3}e^{i\omega} \right|^2 \left| \frac{3e^{-i\omega} - 1}{1 - 3e^{i\omega}} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\ &= \left| \frac{1}{3}e^{i\omega} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\ &= \frac{1}{9} \frac{\sigma^2}{2\pi} \end{aligned}$$

Ainsi

η est un bruit blanc de variance $\frac{\sigma^2}{9}$ tel que $\Phi^*(L)Y = \eta$

Φ^* ayant toutes ses racines de module strictement supérieur à 1 il admet un développement en série entière à indices positifs uniquement, à savoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi^*(\mathbb{X})} &= (-2) \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\mathbb{X}} + 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}} \\ &= -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \mathbb{X}^k + 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mathbb{X}^k \end{aligned}$$

Posons donc pour $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = 3 \cdot 2^{-k} - 2 \cdot 3^{-k}$$

Alors par construction $\forall t \in \mathbb{Z}, Y = \Phi^{*-1}(L)\eta = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \eta_{t-k}$.

En particulier, η est l'innovation de Y .

☞ Q5 Par définition de l'innovation on a pour tout $t \in \mathbb{Z}, \eta_t = Y_t - \mathbb{E}L(Y_t | Y_{t-1}, \dots)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}L(Y_t | Y_{t-1}, \dots) &= Y_t - \eta_t \\ &= ((1 - \Phi^*(L))Y)_t \\ &= \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} \\ &\neq \frac{7}{2}Y_{t-1} - \frac{3}{2}Y_{t-2} \quad \text{en général} \end{aligned}$$

★
★ ★

Énoncé de l'exercice 2

On considère un processus stationnaire du second ordre X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = 2X_{t-1} + \epsilon_t$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

On suppose que l'observation de X est imprécise et qu'on n'observe que $Y = X + \eta$, où η est un bruit blanc décorrélé de ϵ et de variance $\sigma_\eta^2 = \rho\sigma_\epsilon^2$, $\rho > 0$.

☞ Q1 Montrer que $\epsilon + (\mathbf{1} - 2L)\eta$ est un processus MA(1).

☞ Q2 Montrer Y est un processus ARMA(1,1), et donner sa représentation canonique.

☞ Q3 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, Y_t = e_t + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k Y_{t-k}$$

où e désigne l'innovation de Y .

Justifier l'intérêt d'une telle représentation.

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Soit $V = \epsilon + (\mathbf{1} - 2L)\eta$.

On a pour $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{E}(V) = 0$ et de plus

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_t, V_{t-h}) &= \text{Cov}(\epsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}, \epsilon_{t-h} + \eta_{t-h} - 2\eta_{t-h-1}) \\ &= \begin{cases} (1 + 5\rho)\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ -2\rho\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi V est stationnaire et sa fonction d'auto-corrélation est celle d'un processus MA(1).

Soit alors $\theta \in \mathbb{R}$ et μ un bruit blanc de variance σ_μ^2 , et notons $W = (\mathbf{1} - \theta L)\mu$.

Cherchons θ et σ_μ^2 tels que $\gamma_W = \gamma_V$.

$$\text{On a } \gamma_W(h) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma_\mu^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta\sigma_\mu^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Fixons donc

$$\begin{cases} \theta = \frac{\frac{1+5\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(\frac{1+5\rho}{2\rho}\right)^2 - 1}}{2} \\ \sigma_\mu^2 = \frac{2\sigma_\epsilon^2}{\frac{1+\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(\frac{1+5\rho}{2\rho}\right)^2 - 1}} \end{cases}$$

Alors² par construction

$$\begin{cases} \theta^2 - \frac{1+5\rho}{2\rho}\theta + 1 = 0 \\ \text{et } \sigma_\mu^2 = \frac{1}{\theta^2-2\theta+1}\sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (1 + \theta^2) \sigma_\mu^2 = (1 + 5\rho)\sigma_\epsilon^2 \\ -\theta\sigma_\mu^2 = -2\rho\sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

et donc $\gamma_V = \gamma_W$.

En particulier, comme le polynôme MA d'un processus MA se déduit de ses auto-corrélations par les équations de Yule-Walker, V et W suivent le même processus MA : V suit donc le processus MA de polynôme $(1 - \theta\mathbb{X})$.³

Définissons donc $\nu = (\mathbb{1} - \theta L)^{-1}V$; alors par construction ν est un bruit blanc de variance $\sigma_\nu^2 = \sigma_\mu^2$.

Ainsi V vérifie

$$V = (\mathbb{1} - \theta L)\nu$$

où ν est un bruit blanc de variance $\sigma_\nu^2 = \frac{1}{\theta^2-2\theta+1}\sigma_\epsilon^2$.

⇒ Q2 On a $\epsilon = (\mathbb{1} - 2L)X$ et donc $V = (\mathbb{1} - 2L) \circ (X + \eta) = (\mathbb{1} - 2L)Y$. Autrement dit

$$(\mathbb{1} - 2L)Y = (\mathbb{1} - \theta L)\mu$$

et donc Y suit un ARMA(1,1) (car $\theta \neq 2$).

Cependant le polynôme $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - 2\mathbb{X}$ admet $\frac{1}{2}$ pour racine qui n'est pas hors du cercle unité : cette représentation n'est donc pas canonique.

De la même façon que dans l'exercice 1 on définit $\Phi^*(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$.

Notons $\xi = (\mathbb{1} - \theta L)\Phi^{*-1}(L)\mu$; alors ξ est un bruit blanc de variance

$$\left| \frac{\Phi^*(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})} \right|^2 \sigma_\mu^2 = \left| \frac{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega}}{1 - 2e^{i\omega}} \right|^2 \sigma_\mu^2 = \frac{1}{4}\sigma_\mu^2$$

Ainsi Y suit l'ARMA(1,1) sous forme canonique

$$(\mathbb{1} - \frac{1}{2}L)Y = (\mathbb{1} - \theta L)\xi, \text{ où } \xi \text{ est un bruit blanc de variance } \frac{1}{4}\sigma_\mu^2$$

⇒ Q3 D'après le résultat précédent l'innovation du processus Y est ξ . Par ailleurs la fraction rationnelle

²Le choix de $\frac{1+5\rho - \sqrt{(1+\frac{5}{2\rho})^2 - 1}}{2}$ plutôt que $\frac{1+5\rho + \sqrt{(1+\frac{5}{2\rho})^2 - 1}}{2}$ permet de garantir que $|\theta| < 1$.

³En toute rigueur, il faudrait préalablement montrer que si un processus X stationnaire a son auto-corrélation nulle à partir du rang q , alors il suit un processus MA d'ordre au plus q . Pour ce faire, il faut définir le polynôme moyenne-mobile Δ issu des équations de Yule-Walker, puis vérifier que $f_{\Delta(L)^{-1} \circ X}(\omega)$ est constante, ce qui garantit que $\Delta(L)^{-1} \circ X$ est bien un bruit blanc. Voir aussi TD 3, exercice 1

$\frac{1}{1-\theta X}$ est développable en série entière et on a $\frac{1}{1-\theta X} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \theta^k X^k$ de sorte que

$$\begin{aligned} \xi &= (\mathbb{1} - \theta L)^{-1} \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} L \right) Y \\ &= \left(\left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} L \right) \times \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \theta^k L^k \right) \right) \circ Y \\ &= \left(\mathbb{1} - \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \sum_{k \geq 1} \theta^{k-1} L^k \right) \circ Y \end{aligned}$$

et donc en définissant pour $k \geq 1$ $a_k = \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \theta^{k-1}$ on a $\forall t \in \mathbb{Z}, \xi_t = Y_t - \sum_{k \geq 1} a_k Y_{t-k}$ et donc

$$\forall t \in \mathbb{Z}, Y_t = \xi_t + \sum_{k \geq 1} a_k Y_{t-k}$$

En d'autres termes on a pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{E}L(Y_t | Y_{t-1}, \dots) = \sum_{k \geq 1} a_k Y_{t-k}$. Cette représentation permet de *prédire* en moyenne sans erreur la prochaine valeur de Y compte-tenu de l'observation de son passé. En outre, la série étant géométrique le nombre de termes nécessaires pour atteindre une précision δ donnée ne croît que logarithmiquement avec cette précision (et bien-sûr avec $\gamma_Y(0)$).⁴

★
★ ★

Énoncé de l'exercice 3

Étant donné un processus stationnaire X , si $\rho_X(1)$ est élevée alors X_t est "assez" corrélé avec X_{t-1} et X_{t-1} avec X_{t-2} ; par conséquent il semble naturel que X_t soit "relativement" corrélé avec X_{t-2} , c'est-à-dire que $\rho_X(2)$ ne soit "pas trop" faible.

L'objet de cet exercice est de déterminer précisément le domaine de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$. On définit à cet effet

$$R = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 / y \geq 2x^2 - 1\}$$

☞ Q1 Soit X un processus stationnaire quelconque (du second ordre).

Montrer que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) \in R$.

☞ Q2 On se donne réciproquement $(\rho_1, \rho_2) \in R$ et on cherche X stationnaire tel que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) = (\rho_1, \rho_2)$.

On considère pour cela le processus X défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

⁴Attention, l'erreur *systématique* due à la troncature de la série réelle $\sum_{k=1}^N$ n'a rien à voir avec l'*intervalle de confiance* de cette prévision, qui donne un domaine raisonnable pour réalisation de Y_{t+1} fondé sur la série complète.

- (a) On note $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \phi_1\mathbb{X} - \phi_2\mathbb{X}^2$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (ϕ_1, ϕ_2) pour que X soit stationnaire.
- (b) On note P l'ensemble des (ϕ_1, ϕ_2) tel que les racines de Φ sont hors du disque unité ; déterminer P . Que peut-on dire de ϵ si $(\phi_1, \phi_2) \in P$?
- (c) Calculer $(\rho_X(1), \rho_X(2))$, et en déduire l'expression de (ϕ_1, ϕ_2) en fonction de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$.
- (d) Conclure.

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 On a bien-sûr $\forall m \in \mathbb{N}, \rho_X(m)^2 = \left(\frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-m})}{\text{V}(X_t)} \right)^2 \leq \left(\frac{\text{V}(X_t)\text{V}(X_{t-m})}{\text{V}(X_t)\text{V}(X_{t-m})} \right)^2 = 1$

Notons $\Gamma_m(X) = \text{Cov} \left(\begin{pmatrix} X \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m} \end{pmatrix} \right)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma_m(X)$ est positive (c'est un produit scalaire) ; en particulier $|\Gamma_m| \geq 0$, ce qui s'écrit lorsque $m = 2$

$$\begin{aligned} |\Gamma_2(X)| &= \left| \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \gamma_X(2) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) & \gamma_X(1) & \gamma_X(0) \end{pmatrix} \right| \\ &= \gamma_X(0)^3 + 2\gamma_X(2)\gamma_X(1)^2 - \gamma_X(0)\gamma_X(2)^2 - 2\gamma_X(0)\gamma_X(1)^2 \\ &= \gamma_X(0)^3 (1 - \rho_X(2)) (1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Si $\gamma_X(0) = 0$, le processus est (presque sûrement) déterministe et par Cauchy-Schwartz $\gamma_X(1) \leq \sqrt{\gamma_X(0)^2} = 0$; ainsi dans tous les cas $(1 - \rho_X(2)) (1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2) \geq 0$.

Supposons alors par l'absurde que $(1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2) < 0$; alors $|\rho_X(2)| \geq 1$, et donc $\rho_X(2) = 1$. Mais alors $1 + 1 - 2\rho_X(1)^2 < 0$, soit $\rho_X(1)^2 > 1$!

Par suite

$$1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2 \geq 0$$

Remarque : $(\rho_X(m))_{m \in \mathbb{N}}$ est donc soumise à une infinité de contraintes (polynomiales) ; voir aussi "Séries temporelles et modèles dynamiques", C. Gouriéroux et A. Monfort, 5.2 p 155.

On notera en particulier que pour que $\rho_X(2) = 0$ il faut que $|\rho_X(1)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

⇒ Q2 (a) Pour que X soit stationnaire, il faut et il suffit qu'aucune racine de Φ ne soit unitaire.

Or les racines de Φ sont $\omega^- = \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$ et $\omega^+ = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$, avec la convention $\sqrt{x} = i\sqrt{-x}$ si $x < 0$.

Si les racines sont complexes conjuguées z et \bar{z} , alors $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z} = -\frac{1}{\phi_2}$. Donc si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ une condition nécessaire et suffisante est que $\phi_2 \neq -1$. Sinon, les deux racines sont réelles et alors

$$\begin{aligned} |\omega^\pm| \neq 1 &\Leftrightarrow \left(-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}\right)^2 \neq 4\phi_2^2 \\ &\Leftrightarrow \phi_1^2 + (\phi_1^2 + 4\phi_2) - 4\phi_2^2 \neq \pm 2\phi_1\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} \\ &\Leftrightarrow \phi_1^2 + 2\phi_2 - 2\phi_2^2 \neq \pm \phi_1\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} \\ &\Leftrightarrow \phi_1^4 + 4\phi_2^2 + 4\phi_2^4 + 4\phi_1^2\phi_2 - 4\phi_1^2\phi_2^2 - 8\phi_2^3 \neq \phi_1^2(\phi_1^2 + 4\phi_2) \\ &\Leftrightarrow \phi_2^2 + \phi_2^4 - \phi_1^2\phi_2^2 - 2\phi_2^3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (\phi_2 \neq 0 \text{ ou } \phi_1 \neq \pm 1) \text{ et } \phi_2^2 - \phi_1^2 - 2\phi_2 + 1 \neq 0 \quad (\text{car } \phi_2 = 0 \Leftrightarrow \Phi(\mathbb{X}) = 1 - \phi_1\mathbb{X}) \end{aligned}$$

(b) On a

– Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$: en particulier $\phi_2 < 0$ et de plus

$$\begin{aligned} |\omega^\pm| > 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{-\phi_1 \pm i\sqrt{-(\phi_1^2 + 4\phi_2)}}{2\phi_1} \right|^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\phi_1^2 - (\phi_1^2 + 4\phi_2)}{4\phi_2^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\phi_2} > 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \phi_2 < 0 \end{aligned}$$

– Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$:

Si $\phi_1 = 0$ alors $\phi_2 = 0$, et inversement si $\phi_2 = 0$ alors $\phi_1 = 1$; dans ce cas $X = \epsilon$.⁵

Sinon $\omega^- = \omega^+$ et on a

$$\begin{aligned} |\omega^\pm| > 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{-\phi_1}{2\phi_2} \right|^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow |\phi_2| < \frac{1}{2}|\phi_1| \\ &\Leftrightarrow \left| \left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 \right| < \frac{1}{2}|\phi_1| \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{\phi_1}{2} \right|^2 < \left| \frac{\phi_1}{2} \right| \\ &\Leftrightarrow 0 < \left| \frac{\phi_1}{2} \right| < 1 \end{aligned}$$

⁵Ce cas dégénéré est exclu par la suite : $\rho_X(1) = \rho_X(2) = 0$ et X ne convient pas sauf bien-sûr si $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Ainsi dans tous les cas $|\omega^\pm| > 1 \Leftrightarrow |\phi_1| \leq 1$.

– Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$: Si $\phi_2 = 0$, $\phi_1 \neq 0$ et $\omega^- = \omega^+ = \frac{1}{\phi_1}$, donc $|\omega^\pm| > 1 \Leftrightarrow 0 < |\phi_1| < 1$.
Sinon, $\omega^- < \omega^+$, et donc

$$\begin{aligned} |\omega^\pm| > 1 &\Leftrightarrow \omega^+ < -1 \text{ ou } \omega^- > +1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} - \phi_1}{2\phi_2} < -1 \text{ ou } \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} > 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } \phi_2 > 0 : \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < \phi_1 - 2\phi_2 \text{ ou } \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < -\phi_1 - 2\phi_2 \\ \text{Si } \phi_2 < 0 : \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} > \phi_1 - 2\phi_2 \text{ ou } \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} > -\phi_1 - 2\phi_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } \phi_2 > 0 : \phi_1^2 + 4\phi_2 < (\phi_1 - 2\phi_2)^2 \text{ ou } \phi_1^2 + 4\phi_2 < (\phi_1 + 2\phi_2)^2 \\ \text{Si } \phi_2 < 0 : \phi_1^2 + 4\phi_2 > (\phi_1 - 2\phi_2)^2 \text{ ou } \phi_1^2 + 4\phi_2 > (\phi_1 + 2\phi_2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \phi_2 - \phi_1 > 1 \text{ ou } \phi_2 + \phi_1 > 1 \\ &\Leftrightarrow \phi_2 - |\phi_1| > 1 \end{aligned}$$

Conclusion : une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de Φ soient toutes de module supérieur à un est :

$$\left\| \begin{array}{ll} \phi_1^2 + 4\phi_2 < 0 & \text{et } -1 < \phi_2 < 0 \\ \text{ou } \phi_1^2 + 4\phi_2 = 0 & \text{et } |\phi_1| < 1 \\ \text{ou } \phi_1^2 + 4\phi_2 > 0 & \text{et } \phi_2 < 1 - |\phi_1| \end{array} \right.$$

Bien entendu lorsque cette condition est vérifiée le processus X est décrit sous forme MA canonique et donc ϵ est l'innovation de X .

(c) X étant supposée stationnaire et sous forme canonique, on a

$$\begin{aligned} \gamma_X(1) &= \text{Cov}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t, X_{t-1}) \\ &= \phi_1 \mathbb{V}(X_{t-1}) + \phi_2 \text{Cov}(X_{t-2}, X_{t-1}) \quad \text{car } \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}, \dots \\ &= \phi_1 \gamma_X(0) + \phi_2 \gamma_X(1) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\rho_X(1) = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \gamma_X(2) &= \text{Cov}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t, X_{t-2}) \\ &= \phi_1 \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) + \phi_2 \mathbb{V}(X_{t-2}) \quad \text{car } \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}, \dots \\ &= \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(0) \end{aligned}$$

et donc $\rho_X(2) = \phi \rho_X(1) + \phi_2$ i.e.

$$\rho_X(2) = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_1} + \phi_2$$

Remarque : d'une façon plus générale le développement de $\text{Cov}(\Phi(L)X_t, \epsilon_t)$ assure que pour $m \geq d = d^\circ\Phi$, $\rho_X(m)$ suit la récurrence linéaire de polynôme caractéristique Φ . En particulier il existe des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que $\forall m, \rho_X(m) = \lambda_1\omega_1^m + \dots + \lambda_d\omega_d^m$.

Exprimons alors (ϕ_1, ϕ_2) en fonction de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$: on a

$$\begin{cases} \rho_X(1) &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \\ \rho_X(2) &= \phi_1\rho_X(1) + \phi_2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \phi_1 &= \rho_X(1)(1-\phi_2) \\ \rho_X(2) &= \rho_X(1)^2(1-\phi_2) + \phi_2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \phi_1 &= \frac{\rho_X(1)(1-\rho_X(2))}{1-\rho_X(1)^2} \\ \phi_2 &= \frac{\rho_X(2)-\rho_X(1)^2}{1-\rho_X(1)^2} \end{cases}$$

(d) Soit

$$\begin{cases} \phi_1 &= \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \\ \phi_2 &= \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} \end{cases}$$

et définissons le processus X par $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \eta_t$ où η est un bruit blanc.

Or $(\rho_1, \rho_2) \in R$, et donc⁶ $(\phi_1, \phi_2) \in P$, de sorte que X est stationnaire et sous forme canonique. Par conséquent, $(\rho_X(1), \rho_X(2)) = (\rho_1, \rho_2)$.

*
* *

Énoncé de l'exercice 4

On considère un processus X stationnaire du second ordre, et on note pour $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_k = \text{Cov} \left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \right)$$

☞ Q1 Justifier que Γ_k est indépendante de $t \in \mathbb{Z}$ et qu'elle est positive.
Que dire de X si $|\Gamma_k| = 0$?

⁶Calcul non développé ici ...

On se donne désormais $k \in \mathbb{N}$ et on supposera que $|\Gamma_k| > 0$.

- ☞ Q2 Calculer les coefficients a_1, \dots, a_k de la régression de $X_t^* = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t | 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-k})$ sur $\langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-k} \rangle$.
- ☞ Q3 Calculer σ_k^2 , la variance de l'erreur de prévision $X_t - X_t^*$.
- ☞ Q4 (a) Montrer que $|\Gamma_{k+1}| = \sigma_k^2 |\Gamma_k|$.
 (b) Montrer que $(\sigma_l^2)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
 En déduire qu'elle admet une limite finie lorsque $l \rightarrow +\infty$, et que cette limite est $\sigma_\infty^2 = \mathbb{V}(X_t - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t | 1, X_{t-1}, \dots))$ la variance de l'innovation du processus X .
 (c) Montrer que $\frac{1}{l} \log |\Gamma_l| \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \log \sigma_\infty^2$.
- ☞ Q5 Application : on considère un processus du second ordre X vérifiant $X = (1 - \theta L)\epsilon$ pour $\theta \in]-1, 1[$, où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .
 (a) Montrer que X est stationnaire et calculer γ_X .
 (b) Calculer $|\Gamma_k|$.
 (c) Vérifier que ϵ est l'innovation de X et que $\frac{1}{k} \log |\Gamma_k| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \log \sigma_\epsilon^2$.

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 On a pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_{t-1}) & \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) & \cdots & \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) \\ \text{Cov}(X_{t-2}, X_{t-1}) & \mathbb{V}(X_{t-1}) & \cdots & \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_{t-k}, X_{t-1}) & \text{Cov}(X_{t-k}, X_{t-1}) & \cdots & \mathbb{V}(X_{t-k}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(k-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(k-1) & \gamma_X(k-2) & \cdots & \gamma_X(0) \end{pmatrix}$$

En particulier Γ_k ne dépend pas de t et est symétrique réelle à diagonale positive, donc positive. Par ailleurs, si k est tel que $|\Gamma_k| = 0$, alors comme il est montré dans TD 1, exercice 4 conditionnellement à un nombre fini de réalisations X_1, \dots, X_r le processus X est presque-sûrement déterministe.

☞ Q2 Notons $X_t^* = a_0 + a_1 X_{t-1} + \dots + a_{m-1} X_{t-m+1}$; on en tire tout d'abord comme X est stationnaire que $a_0 = \mathbb{E}(X_t) (1 - a_1 - \dots - a_k)$. Par ailleurs X_t^* est caractérisé par⁷

$$(X_t - X_t^*) \perp\!\!\!\perp 1 \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, (X_t - X_t^*) \perp\!\!\!\perp X_j$$

⁷Voir aussi TD 1, exercice 4 .

ce qui s'écrit pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathbb{E}((X_t - X_t^{*+}) \cdot X_{t-j}) \\
 \text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) &= a_0 \mathbb{E}(X_t) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \dots + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\
 \text{soit } \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) &= (1 - a_1 - \dots - a_{m-1}) \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \dots \\
 &\quad + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\
 &= \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 (\mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) + \dots \\
 &\quad + a_{m-1} (\mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1}) \mathbb{E}(X_{t-j})) \\
 \text{soit } \gamma_X(j) &= a_1 \gamma_X(j-1) + \dots + a_{m-1} \gamma_X(j-m+1)
 \end{aligned}$$

et donc en définitive

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_t) (1 - a_1 - \dots - a_k) \\ \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} = (\Gamma_k)^{-1} \times \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}$$

☞ Q3 On a

$$\begin{aligned}
 X_t - X_t^* &= X_t - a_0 - (a_1, \dots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \\
 &= X_t - (\mathbb{E}(X_t) - a_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) - \dots - a_k \mathbb{E}(X_{t-k})) - (a_1, \dots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \\
 &= (X_t - \mathbb{E}(X_t)) - (a_1, \dots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix} \\
 &= (X_t - \mathbb{E}(X_t)) - (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) \times (\Gamma'_k)^{-1} \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^*)$ et Γ_k est symétrique, donc

$$\mathbb{V}(X_t - X_t^*) = \mathbb{E}((X_t - X_t^*)^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{aligned} &\mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2) \\ &- 2\mathbb{E} \left((X_t - \mathbb{E}(X_t)) \cdot (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) \times (\Gamma_k)^{-1} \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix} \right) \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &(\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) (\Gamma_k)^{-1} \\ &\times \mathbb{E} \left((X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}), \dots, X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k})) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix} \right) \\ &\times (\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\mathbb{V}(X_t) \\ &- 2(\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) \times (\Gamma_k)^{-1} \times \mathbb{E} \left((X_t - \mathbb{E}(X_t)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix}}_{(\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k))'} \right) \\ &+ (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) (\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \\
 &= \mathbb{V}(X_t) - (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) (\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

☞ Q4 (a) On a

$$\Gamma_{k+1} = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(k) \\ \hline \gamma_X(1) & & & \\ \vdots & & & \\ \gamma_X(k) & & & \Gamma_k \end{array} \right)$$

puisque Γ_k ne dépend pas de la date t considérée.

Soit alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ et considérons $A(\lambda) = \Gamma_{k+1} - \lambda_1 C_2 - \dots - \lambda_k C_{k+1}$ où $C_{i+1} =$

$\begin{pmatrix} \gamma_X(i) \\ \gamma_X(i-1) \\ \gamma_X(i-2) \\ \vdots \\ \gamma_X(i-k) \end{pmatrix}$ est la i -ième colonne de Γ_{k+1} .

Alors $|A(\lambda)| = |\Gamma_{k+1}|$.

Or la première colonne C_A de $A(\lambda)$ s'écrit

$$C_A = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_X(0) - \lambda_1 \gamma_X(1) - \dots - \lambda_k \gamma_X(k)}{\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} - (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \times \Gamma_k} \end{pmatrix}$$

Posons donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1}$; il vient

$$C_A = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k))}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \end{pmatrix}$$

de sorte que ⁸

$$\begin{aligned} |\Gamma_{k+1}| &= \left(\gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) \right) \cdot |\Gamma_k| \\ &= \boxed{\sigma_k^2 \cdot |\Gamma_k|} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ $|\Gamma_l| = \sigma_{l-1}^2 \dots \sigma_1^2 |\Gamma_1| = \sigma_{l-1}^2 \dots \sigma_1^2 \gamma_X(0)$

⁸ Γ_k est symétrique et $\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k))$ est un réel (donc égal à son transposé) et donc

$$\gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} (\Gamma_k)^{-1} (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) = \gamma_X(0) - (\gamma_X(1), \dots, \gamma_X(k)) (\Gamma_k')^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} = \sigma_k^2$$

(b) Notons $\mathcal{E}_k = \langle 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-k} \rangle$. Alors

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1}^2 &= \mathbb{V}(X_t - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t|\mathcal{E}_{k+1})) \\ &= \min_{Y \in \mathcal{E}_{k+1}} \mathbb{V}(X_t - Y) \\ &\leq \min_{Y \in \mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_{k+1}} \mathbb{V}(X_t - Y) \\ &\leq \mathbb{V}(X_t - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t|\mathcal{E}_k)) \\ &= \sigma_k^2 \end{aligned}$$

La suite $(\sigma_l^2)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée (par 0), donc convergente.

Notons enfin $\mathcal{E}_\infty = \langle 1, X_{t-1}, \dots \rangle$; alors pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$\sigma_\infty^2 = \mathbb{V}(X_t - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t|\mathcal{E}_\infty)) = \min_{Y \in \mathcal{E}} \mathbb{V}(X_t - Y) \leq \min_{Y \in \mathcal{E}_k} \mathbb{V}(X_t - Y) = \sigma_k^2$$

Et réciproquement, $(\sigma_l^2 - \sigma_\infty^2) \leq \|\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t|\mathcal{E}_l) - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t|\mathcal{E}_\infty)\|^2 \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$ de sorte que

$$\sigma_l^2 \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \sigma_\infty^2$$

(c) On a alors

$$\begin{aligned} \log(\sigma_\infty^2) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \log \frac{|\Gamma_{k+1}|}{|\Gamma_k|} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \log \frac{|\Gamma_{j+1}|}{|\Gamma_j|} \quad \text{par Césaro} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log \left(\prod_{j=1}^l \frac{|\Gamma_{j+1}|}{|\Gamma_j|} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log \frac{|\Gamma_{l+1}|}{|\Gamma_1|} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} (\log |\Gamma_{l+1}| - \log |\gamma_X(0)|) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log |\Gamma_{l+1}| \end{aligned}$$

☞ Q5 (a) On a pour $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{E}(X_t) = 0$ et pour $h \in \mathbb{Z}$

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta \sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier X est stationnaire.

(b) On a pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma_k = \sigma_\epsilon^2 \begin{pmatrix} 1 + \theta^2 & -\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1 + \theta^2 & -\theta & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -\theta & 1 + \theta^2 & -\theta \\ 0 & \cdots & 0 & -\theta & 1 + \theta^2 \end{pmatrix}$$

On a tout d'abord

$$|\Gamma_1| = (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2$$

$$|\Gamma_2| = \sigma_\epsilon^2 \left| \begin{pmatrix} 1 + \theta^2 & -\theta \\ -\theta & 1 + \theta^2 \end{pmatrix} \right| = (1 + \theta^2 + \theta^4) \sigma_\epsilon^4$$

puis pour $k \geq 2$, en notant $A_k = \frac{1}{\sigma_\epsilon^{2k}} \Gamma_k$

$$|A_k| = \left| \left(\begin{array}{c|cccc} 1 + \theta^2 & -\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -\theta & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) \right|$$

(en développant par rapport à la première colonne)

$$= (-1)^{1+1} (1 + \theta^2) |A_{k-1}| + (-1)^{2+1} (-\theta) \left| \begin{pmatrix} -\theta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1 + \theta^2 & -\theta & & 0 \\ 0 & -\theta & 1 + \theta^2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -\theta & 1 + \theta^2 \end{pmatrix} \right|$$

(en soustrayant la première ligne à la deuxième)

$$= (1 + \theta^2) |A_{k-1}| + \theta \left| \begin{pmatrix} -\theta & 0 \cdots 0 \\ \hline -\theta & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \right|$$

$$= (1 + \theta^2) |A_{k-1}| - \theta^2 |A_{k-2}|$$

Soit alors $k \geq 3$ tel que $\forall l < k, |A_l| = 1 + \theta^2 + \cdots + \theta^{2l}$. Alors

$$\begin{aligned} |A_k| &= (1 + \theta^2) (1 + \theta^2 + \cdots + \theta^{2k-2}) - \theta^2 (1 + \theta^2 + \cdots + \theta^{2k-4}) \\ &= (1 + 2\theta^2 + 2\theta^4 + \cdots + 2\theta^{2k-2} + \theta^{2k}) - (\theta^2 - \theta^4 - \cdots - \theta^{2k-2}) \\ &= 1 + \theta^2 + \cdots + \theta^{2k} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|\Gamma_k|}{\sigma_\epsilon^{2k}} = 1 + \theta^2 + \dots + \theta^{2k} = \frac{1-\theta^{2k+2}}{1-\theta^2}$

En définitive

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |\Gamma_k| = \frac{1-\theta^{2k+2}}{1-\theta^2} \sigma_\epsilon^{2k}$$

(c) $|\theta| < 1$ donc l'unique racine $\frac{1}{\theta}$ de $1 - \theta X$ est hors du cercle unité (si elle existe, *i.e.* si $\theta \neq 0$); donc ϵ est bien l'innovation de X .

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \log |\Gamma_l| &= \frac{1}{k} (\log (1 - \theta^{2k+2}) - \log (1 - \theta^2) + \log (\sigma_\epsilon^{2k})) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\frac{\theta^{2k+2}}{k} - \frac{\log (1 - \theta^2)}{k} + \log \sigma_\epsilon^2 \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \log \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

*
* *