Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Corrigé des travaux dirigés n°3

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a tout d'abord pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rrcl} & Y_t & = & \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ \text{donc} & \left(\left(\mathbb{1} - \phi_2 L\right) Y\right)_t & = & \phi_1 \left(\left(1 - \phi_2 L\right) Y\right)_{t-1} + a \left(\left(\mathbb{1} - \phi_2 L\right) X\right)_t + (U_t - \\ & & = & \phi_1 \left(\left(1 - \phi_2 L\right) Y\right)_{t-1} + aV_t + \left(U_t - \phi_2 U_{t-1}\right) \\ \text{c'est-à-dire} & \left(\left(\mathbb{1} - \phi_1 L\right)\left(\mathbb{1} - \phi_2 L\right) Y\right)_t & = & aV_t + U_t - \phi_2 U_{t-1} \\ & \text{soit} \quad W_t & = & aV_t + \left(\left(\mathbb{1} - \phi_2 L\right) U\right)_t \end{array}$$

Alors
- $\mathbb{E}\left(W_t\right) = 0$
- pour $h \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{C}ov\left(W_t, W_{t+h}\right) = \begin{cases} a^2\sigma_V^2 + \left(1 + \phi_2^2\right)\sigma_U^2 & \text{si } h = 0 \\ -\phi_2 \sigma_U^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier W est stationnaire (et sa fonction d'auto-covariance est celle d'un proces
MA(1)). Cherchons donc Θ et ϵ bruit blanc tels que $W = \Theta(L)\epsilon$ et Θ de degré 1.

Donnons-nous pour ce faire un bruit blanc ϵ de variance $\sigma_\epsilon^2 > 0$ et $\lambda \in]-1, 1[$, et soit Z
$\left(\mathbb{1} - \lambda L\right)\epsilon$; cherchons à déterminer ϵ et λ de façon à ce que $Z = W$.

L'égalite $\gamma_Z = \gamma_W$ pour $h \in \{0, 1\}$ conduit à

$$\begin{cases} \left(1 + \lambda^2\right)\sigma_\epsilon^2 & = a^2\sigma_V^2 + \left(1 + \phi_2^2\right)\sigma_U^2 \\ -\lambda\sigma_\epsilon^2 & = -\phi_2\sigma_U^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \lambda^2 - \frac{a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right)\sigma_U^2}{\phi_2\sigma_U^2}\lambda + 1 & = 0 \\ \sigma_\epsilon^2 & = \frac{\phi_2\sigma_U^2}{\lambda} \end{cases}$$

Soit donc [1] $\lambda = \frac{a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right)\sigma_U^2 - \sqrt{\left(a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right)\sigma_U^2\right)^2 - 4\phi_2\sigma_U^2}}{2\phi_2\sigma_U^2}$; ainsi $\lambda \in]-1, 1[$. Posons alors[2] ϵ
$\left(\mathbb{1} - \lambda L\right)^{-1} W$: ϵ est par construction un bruit blanc de variance $\sigma_\epsilon^2 = \frac{\phi_2\sigma_U^2}{\lambda}$ et de plus

$$\boxed{W = \left(\mathbb{1} - \lambda L\right)\epsilon}$$

Application numérique : On a $a^2\sigma_V^2 + \left(1 + \phi_2^2\right)\sigma_U^2 = 0.10276 > 0.0192 = 2\phi_2\sigma_U^2$. Il vi
$\lambda = 0.095$ et $\sigma_\epsilon^2 = 0.101$. On vérifie que $|\lambda| < 1$ et que la représentation de W est b
canonique (donc que ϵ est bien l'innovation de W).

[1]Les deux racines sont de même signe car leur produit 1 est positif, et ce signe est positif car leur somme $\frac{a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right.}{\phi_2\sigma_U^2}$
est positive. Le produit des racines valant 1, la plus petite des deux est de module inférieur à 1, à savoir $\frac{[\cdots] - \sqrt{[\cdots]^2}}{2}$

[2]Parmi tous les bruits blancs possibles de variance $\sigma_\epsilon^2 = \frac{\phi_2\sigma_U^2}{\lambda}$ il n'y en a qu'**un seul** qui convienne, est c
nécessairement $\epsilon = \left(\mathbb{1} - \lambda L\right)^{-1} W$.

☞ Q2 On a immédiatement

$$(\mathbb{1}-\phi_1 L)(\mathbb{1}-\phi_1 L)\,Y = (\mathbb{1}-\lambda L)\,\epsilon$$

A supposer que $\lambda \neq \phi_1$ et $\lambda \neq \phi_2$, Y est donc un processus ARMA(2,1) (sinon c'est un AR(1)) ; en outre cette représentation est canonique.

Application numérique : $(\mathbb{1}-0.6L)(\mathbb{1}-0.4L)\,Y = (\mathbb{1}-0.095L)\,\epsilon$.

☞ Q3 Soit $\Phi(\mathbb{X}) = (1-\phi_1\mathbb{X})(1-\phi_2\mathbb{X})$; les racines $\frac{1}{\phi_1}$ et $\frac{1}{\phi_2}$ de Φ sont toutes de module supérieur à un ; donc (voir TD 2, exercice 1) Y admet un développement en série à cœfficients positifs $Y_t = \sum_{k\geq 0} a_k \epsilon_{t-k}$, et en particulier $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_t \perp\!\!\!\perp Y_{t-1}, \ldots$. Par conséquent ϵ est l'innovation de Y et en particulier $Y - Y^* = \epsilon$.
On en tire successivement que

$$\mathbb{V}\left(Y_t - Y_t^*\right) = \sigma_\epsilon^2$$

et de plus que

$$\begin{aligned}
Y^* &= Y - \epsilon \\
&= \left(\mathbb{1} - \Phi(L)\,(\mathbb{1}-\lambda L)^{-1}\right) Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - (\phi_1+\phi_2)\,L + \phi_1\phi_2 L^2\right) \circ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k L^k\right) Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \left(\lambda^2 - \lambda\,(\phi_1+\phi_2) + \phi_1\phi_2\right) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k L^k\right) Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \lambda^2 \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot (\mathbb{1}-\lambda L)^{-1}\right) \circ Y
\end{aligned}$$

Application numérique : $\left\{\begin{array}{l} y_t^* = y_{t-1} - 0.24 y_{t-2} - 1.045 \sum_{k\geq 1} 0.095^k y_{t-k} \\ \\ \text{et par ailleurs } \mathbb{V}\left(Y_t - Y_t^*\right) = 0.101 \end{array}\right.$

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Pour tous $i \neq j$ et toutes dates t, t', ${U^i}_t, {U^i}_{t-1}, {U^i}_{t'}, {U^i}_{t'-1}, {U^j}_t, {U^j}_{t-1}, {U^j}_{t'}, {U^j}_{t'-1}$ sont tous deux-à-deux indépendants. Donc ${X^i}_t$ et ${X^j}_{t'}$ sont indépendants.

En particulier

$$\begin{aligned}
Z^{*X}_{T+1} &= \mathbb{EL}\left(\sum_{i=1}^n {X^i}_{T+1} \middle| {X^1}_T, \ldots, {X^n}_T, {X^1}_{T-1}, \ldots, {X^n}_{T-1}, \ldots\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{EL}\left({X^i}_{T+1} \middle| {X^1}_T, \ldots, {X^n}_T, {X^1}_{T-1}, \ldots, {X^n}_{T-1}, \ldots\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{EL}\left({X^i}_{T+1} \middle| {X^i}_T, {X^i}_{T-1}, \ldots\right) \\
&= {X^{1*}}_{T+1} + \cdots + {X^{n*}}_{T+1} \\
&= \boxed{\rho_1 {X^1}_T + \cdots + \rho_n {X^n}_T} \quad \text{puisque } \mathbb{1} - \rho_i L \text{ est sous forme canonique car } |\rho_i| <
\end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(Z_{T+1} - Z^{*X}_{T+1}\right) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n {X^i}_{T+1} - \sum_{i=1}^n \rho_i {X^i}_T\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \left(\rho_i {X^i}_T + {U^i}_T\right) - \sum_{i=1}^n \rho_i {X^i}_T\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n {U^i}_T\right) \\
&= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2
\end{aligned}$$

☞ Q2 Observons que $Z = (\mathbb{1}-\rho_1 L)^{-1} U^1 + \cdots + (\mathbb{1}-\rho_n L)^{-1} U^n$, de sorte que pour tout polynô
Θ on a

$$\Theta(L) Z = \Theta(L)\,(\mathbb{1}-\rho_1 L)^{-1} U^1 + \cdots + \Theta(L)\,(\mathbb{1}-\rho_n L)^{-1} U^n$$

En particulier dès que $\Theta(\mathbb{X})$ est un multiple de tous les $(1-\rho_i\mathbb{X})$ l'expression (1) est poly
miale des deux côtés. Soit donc Θ le ppcm (au sens de la division euclidienne de polynôm
de $1-\rho_1\mathbb{X}, \ldots, 1-\rho_n\mathbb{X}$. Alors Z vérifie

$$\Theta(L) Z = \sum_{i=1}^n \Lambda_i(L) U^i$$

où $\Lambda_i(\mathbb{X}) = \frac{\Theta(\mathbb{X})}{1-\rho_i\mathbb{X}} = \Pi_{\left\{\begin{array}{l}\rho \in \{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \\ \rho \neq \rho_i\end{array}\right.} (1-\rho\mathbb{X})$ est un polynôme de degré $n_i \leq n-1$.
Considérons alors $V^i = \Lambda_i(L) U^i$ tous stationnaires, et soit $V = V^1 + \cdots + V^n$.
Alors

$$\mathbb{C}ov\left(V_t, V_{t+h}\right) = \gamma_{V^1}(h) + \cdots + \gamma_{V^n}(h)$$

En particulier $\mathbb{C}ov\left(V_t, V_{t+h}\right)$ est indépendant de t et donc (comme bien-sûr $\mathbb{E}\left(V_t\right) = 0$) V
stationnaire. En outre $\gamma_V(h) = 0$ dès que $h \geq \max_i n_i$, ce qui caractérise un MA d'ordre *au p*
$\max_i n_i$.[3]

[3] Attention, si $k = l$ et $\gamma_A(k-1) + \gamma_B(l-1) = 0$ alors $A + B$ est un MA d'ordre a plus $k-1$ ...

Plus précisément, soit $d = \max\{i \,/\, \gamma_V(i) \neq 0\}$, et donnons-nous $\delta_1, \ldots, \delta_d$ et η un bruit blanc de variance σ_η^2 ; notons $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \delta_1\mathbb{X} - \cdots - \delta_d\mathbb{X}^d$. Alors l'égalité $\gamma_{\Delta(L)\eta} = \gamma_V$ revient à un système de $d+1$ équations (a priori non-linéaire)

$$\left\{ \ \mathcal{E}_h : \gamma_{\Delta(L)\eta}(h) = \gamma_V(h) \quad \text{pour } h \in [\![0, d]\!] \right.$$

correspondant aux équations de Yule-Walker, et dont on tire $\sigma_\eta^2, \delta_1, \ldots, \delta_d$.
Soit alors $\Delta^*(\mathbb{X}) = 1 + \delta_1\mathbb{X} + \cdots + \delta_r\mathbb{X}^r$, et notons Δ le polynôme canonique associé (celui dont toutes les racines sont de module supérieur à un, voir TD 2, exercice 1). Définissons enfin $\xi = \Delta(L)^{-1}V$. Alors par construction ξ est un bruit blanc, et en outre $V = \Delta(L)\xi$.
Ainsi

$$\boxed{\Theta(L)Z = \Delta(L)\xi}$$

avec $d^\circ\Theta \leq n$ et $d^\circ\Delta \leq \max_i n_i \leq n-1$ et toutes les racines de Θ et Δ sont de module supérieur (ou égal) à 1.

☞ Q3 On sait que 1 n'est racine d'aucun $1 - \rho_i\mathbb{X}$, donc n'est pas racine de $\Theta(\mathbb{X})$. Montrons que par ailleurs V n'est pas intégré.
<u>*Attention :*</u>
Il ne suffit pas que Z (et donc $\Theta(L)Z$) soit stationnaire pour interdire que Θ ait une racine unitaire : $X = (\mathbb{1} - L)\epsilon$ est par exemple stationnaire TD 1, exercice 1 ...
Dans le cas contraire, soit s l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans Δ, et soit $\overline{\Delta}(\mathbb{X})$ le polynôme $\frac{\Delta(\mathbb{X})}{(1-\mathbb{X})^s}$; on note $\overline{\xi} = \overline{\Delta}(L)\xi$.
Soit alors $N \in \mathbb{N}$; comme $(1 - \mathbb{X})\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k = 1 - \mathbb{X}^{N+1}$ on a d'une part

$$\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \circ V_t = \left(1 - L^{N+1}\right)(\mathbb{1} - L)^{s-1} \circ \overline{\xi}_t$$

et d'autre part

$$\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \circ V_t = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^N L^k\right)^s \times \Lambda_i(L) \circ {U^i}_t$$

Considérons donc pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $N \in \mathbb{N}$ le polynôme $\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})$; comme les racines de Λ_i sont parmi les ρ_i, $1 - \mathbb{X}$ ne divise pas Λ_i et donc

$$\left(1 - \mathbb{X}^{N+1}\right) = \left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)(1 - \mathbb{X}) \text{ ne divise pas } \left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})$$

Notons pour tout polynôme P $\nu(P)$ le nombre de cœfficients non-nuls de P : alors $\nu(\Lambda_i(\mathbb{X})) \geq 1$ car Λ_i est de degré $n_i \geq 1$. Par conséquent pour $N \geq n_i$ on a [4]

$$\nu\left(\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})\right) \geq N - n_i$$

[4] Soit $P(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^p a_k\mathbb{X}^k$ un polynôme de degré P n'admettant pas 1 pour racine, et développons successivement

Donc en particulier

$$\mathbb{V}\left(\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \times \Lambda_i(L) \circ {U^i}_t\right) = \sum_{j=0}^{N+n_i} {\alpha_j}^2\mathbb{V}\left({U^i}_{t-j}\right) \geq (N - n_i)\left(\min_{\alpha_j \neq 0}|\alpha_j|\right)^2 \sigma_i^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Autrement dit pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{V}\left(\left(\mathbb{1} - L^{N+1}\right)^s \overline{\xi}_t\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.
Soit donc $\eta = \left(\mathbb{1} - L^{N+1}\right)^{s-1}\overline{\xi} = \left(\mathbb{1} - L^{N+1}\right)^{s-1}\overline{\Delta}(L)\xi$: η est stationnaire puisque ξ est bruit blanc.
Or $\mathbb{V}(\eta_t - \eta_{t-N-1}) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, et donc $\gamma_\eta(h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty$, et donc

$$\gamma_V(h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty$$

Pourtant, les U^i sont indépendants donc $\gamma_V(h) = \sum_{i=1}^n \gamma_{\Lambda_i(L)U^i}(h)$ et donc comme chac $\Lambda_i(L)U^i$ est un processus Ma son auto-covariance est nulle à partir d'un certain rang (n_i l'occurence), et en particulier

$$\gamma_V(h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $(1 - \mathbb{X})^s$ ne peut diviser $\Delta(\mathbb{X})$; on montre de façon identique qu'il en va de même po toute racine de module 1, de sorte que V n'est pas intégré.
En conclusion,

$$\boxed{Z \text{ est un processus } \textsc{Arma}(p, r), \text{ où } p = d^\circ\Theta \text{ et } r \leq \max_i n_i}$$

Notons que les racines $\frac{1}{\rho_1}, \ldots, \frac{1}{\rho_n}$ de Θ sont toutes de module inférieur à 1 ; en outre par constr tion il en va de même pour celles de Δ.
Enfin, comme $\Theta(\mathbb{X})$ est le ppcm des $1 - \rho_i\mathbb{X}$, il n'admet aucune racine commune avec Δ (sinon, Δ admet par exemple ρ_1, donc il en va de même pour Δ^* car $|\rho_1| < 1$, et on mon que $1 - \rho_1\mathbb{X}$ divise *tous* les $\Lambda_i(\mathbb{X})$ ce qui viole le fait que Θ soit le ppcm des $1 - \rho_i\mathbb{X}$). Ains représentation est canonique.

$\mathbb{X}^j P(\mathbb{X})$: il vient

	1	$\mathbb{X}$	$\mathbb{X}^2$	$\cdots$	$\mathbb{X}^p$	$\mathbb{X}^{p+1}$	$\cdots$	$\mathbb{X}^{N-p}$	$\cdots$	$\mathbb{X}^{p+N}$
$P(\mathbb{X})$	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_p	0	$\cdots$		$\cdots$	0
$\mathbb{X}P(\mathbb{X})$	0	a_0	a_1	$\cdots$	a_{p-1}	a_p	$\cdots$		$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$	$\ddots$				$\vdots$
$\mathbb{X}^N P(\mathbb{X})$	0							a_0	$\cdots$	a_p
$\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right)P(\mathbb{X})$	a_0	$a_0 + a_1$		$\cdots$	$a_0 + \cdots + a_p$	$a_0 + \cdots + a_p$	$\cdots$	$a_0 + \cdots + a_p$	$\cdots$	a_p

Le polynôme $\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right)P(\mathbb{X})$ est de degré au plus $N + p$, et au moins $N - \nu(P)$ monômes $\mathbb{X}^k$ ont pour cœffic $a_0 + \cdots + a_p$. Donc si $\nu\left(\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right)P(\mathbb{X})\right) < N - \nu(P)$, alors au moins $2\nu(P) + 1$ cœfficients sont nuls, donc l'une moins de $N - \nu(P)$ colonnes $a_1 + \cdots + a_p$ est nulle. Dans ce cas, $P(1) = 0$, *i.e.* 1 est racine de P ! Or 1 n'est pas rac de Λ_i, donc $\nu\left(\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})\right) \geq \nu(\Lambda_i)$.

Notons enfin que si les $(\rho_i)_i$ sont deux-à-deux distincts, $\Theta(\mathbb{X}) = (1-\rho_1\mathbb{X})\cdots(1-\rho_n\mathbb{X})$ et Z est un Arma(n,n-1).

Remarque : Le résultat reste vrai si l'on substitue à $1-\rho_i\mathbb{X}$ un polynôme canonique $R_i(\mathbb{X})$ quelconque : $\Theta(\mathbb{X})$ reste le ppcm des $R_i(\mathbb{X})$, et s'ils sont tous premiers entre eux Z est un processus Arma($\sum_{i=1}^n d^\circ R_i$, $\max_i d^\circ \Lambda_i$).

☞ Q4 Z est un Ar pur *ssi* V est un bruit blanc, soit si $r=0$, soit encore si $(0,\dots,0)$ est solution du système de Yule-Walker $\left\{\ \mathcal{E}_h : \gamma_{\Delta(L)\xi}(h) = 0 \quad \text{pour } h \in [\![1,d]\!] \right.$.
Notons alors $\Lambda_i(\mathbb{X}) = \lambda_0^i + \lambda_1^i\mathbb{X} + \cdots + \lambda_{n_i}^i\mathbb{X}^{n_i}$, avec $\lambda_0^i = 1$. Alors pour $t\in\mathbb{Z}$

$$V_t = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_k^i {U^i}_{t-k}$$

et donc pour $h \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(V_t, V_{t-h}\right) &= \sum_{1\le i,j\le n} \sum_{\substack{0\le k\le n_i\\ 0\le l\le n_j}} \lambda_k^i\lambda_l^j \mathbb{C}ov\left({U^i}_{t-k}, {U^j}_{t-h-l}\right)\\
&= \sum_{1\le i,j\le n} \sum_{\substack{0\le k\le n_i\\ 0\le l\le n_j}} \lambda_k^i\lambda_l^j \mathbb{1}_{i=j}\mathbb{1}_{t-k=t-h-l}\,\sigma_i^2\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=h}^{n_i} \lambda_k^i\lambda_{k-h}^i\sigma_i^2
\end{aligned}$$

Par conséquent Z est un Ar pur *ssi*

$$\boxed{\forall h\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n \left(\lambda_0^i\lambda_h^i + \cdots + \lambda_{n_i-h}^i\lambda_{n_i}^i\right)\sigma_i^2 = 0}$$

En particulier dans le cas où $n=2$ et $\rho_1\neq\rho_2$ on a $\Theta(\mathbb{X}) = 1-(\rho_1+\rho_2)\mathbb{X}+\rho_1\rho_2\mathbb{X}^2$, $\Lambda_1(\mathbb{X}) = 1-\rho_2\mathbb{X}$ et $\Lambda_2(\mathbb{X}) = 1-\rho_1\mathbb{X}$.
Donc Z est au plus un Arma(2,1), et c'est un Ar(2) pur *ssi* [5]

$$\boxed{\rho_1\sigma_1^2 + \rho_2\sigma_2^2 = 0}$$

☞ Q5 Comme aucune racine de $\Theta(L)$ n'est de module 1, ξ est l'innovation de Z, et donc $\forall t\in\mathbb{Z}, \xi_t = Z_t - Z_t^{*Z}$; en particulier

$$Z^{*Z} = Z - \xi = \left(\mathbb{1} - \Delta(L)\Theta^{-1}(L)\right) Z$$

où $\Theta(\mathbb{X})^{-1}$ admet un développement en puissances positives de $\mathbb{X}$.

[5] La condition s'écrit pour $h=1$: « $\left(\lambda_0^1\lambda_1^1 + \lambda_0^1\lambda_1^1\right)\sigma_1^2 + \left(\lambda_0^2\lambda_1^2 + \lambda_0^2\lambda_1^2\right)\sigma_2^2 = 0$ » c'est-à-dire, compte-tenu de ce que $\lambda_0^i = 1$ et $\lambda_1^i = \rho_i$: « $2\rho_1\sigma_1^2 + 2\rho_2\sigma_2^2 = 0$ ».

Par ailleurs 1 n'est pas racine de Δ, donc toutes les racines de Δ sont de module strictem
supérieur à un ; on définit donc $\frac{\Lambda_i(\mathbb{X})}{\Delta(\mathbb{X})} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^i\mathbb{X}^k$. Notons que $a_0^i = \frac{\Lambda_i(0)}{\Delta(0)} = \frac{1}{1} = 1$. Il vi
alors

$$\begin{aligned}
V_Z &= \mathbb{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*Z}\right)\\
&= \mathbb{V}\left(\xi_{T+1}\right)\\
&= \mathbb{V}\left(\Delta(L)^{-1}\left(\Lambda_1(L)U^1 + \cdots + \Lambda_n(L)U^n\right)_{T+1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^i L^k\right)\circ {U^i}_{T+1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(a_k^i\right)^2\right)\sigma_i^2\\
&\ge \sum_{i=1}^n \left(a_0^i\right)^2\sigma_i^2\\
&= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2\\
&= V_X
\end{aligned}$$

Ainsi la prévision fondée sur les observations agrégées est moins bonne que celle fondée sur
observations individuelles, et ce alors même que les U^i sont indépendants !
Notons enfin qu'il n'y a égalité que si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in\mathbb{N}^*, a_k^i = 0$ c'est-à-dire
$\Delta(\mathbb{X}) = \Lambda_i(\mathbb{X})$, soit finalement si

$$\rho_1 = \cdots = \rho_n$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Soit $U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1}\end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2\rho\cos\theta & \rho^2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Alors A est inversible et de plus $\forall t\in\mathbb{Z}, U$
$A^t\times U_0$. Or les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A(\mathbb{X}) = 1 - 2\rho\cos\theta\mathbb{X} + \rho^2\mathbb{X}^2$
savoir $\rho e^{+i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Soit donc P inversible telle que $A = P^{-1}\times\begin{pmatrix}\rho e^{+i\theta} & 0\\ 0 & \rho e^{-i\theta}\end{pmatrix}\times P$; al
$U_t = P^{-1}\times\begin{pmatrix}\rho^t e^{+it\theta} & 0\\ 0 & \rho^t e^{-it\theta}\end{pmatrix}PU_0$, donc soient α,β tels que

$$\forall t\in\mathbb{Z}, u_t = \alpha\rho^t e^{+it\theta} + \beta\rho^t e^{-it\theta}$$

En particulier on a

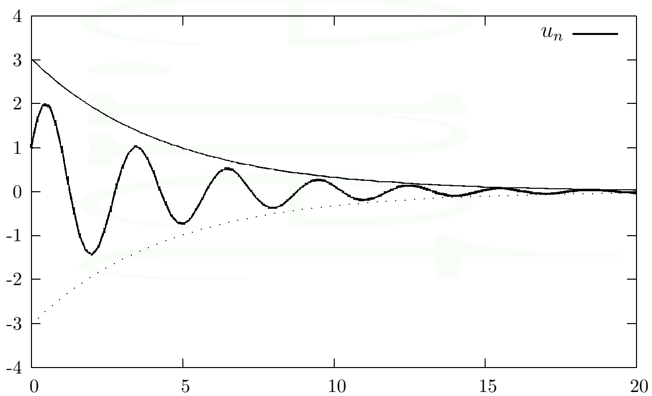
$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta &=& u_0\\ \rho\left(\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}\right) &=& u_1\end{array}\right.$$

d'où on tire

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{u_1}{\rho}\frac{1}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} - u_0 \\ \beta &= u_0 - \alpha \end{cases}$$

et donc finalement

$$\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = (\alpha+\beta)\rho^t\cos(t\theta) + i(\alpha-\beta)\rho^t sin(t\theta) = u_0\rho^t\cos(t\theta) + \left(\frac{u_1}{\rho\sin\theta} - \frac{u_0}{\tan\theta}\right)\rho^t\sin(t\theta) - \underbrace{iu_0}_{\notin\mathbb{R}}\rho^t\sin(t\theta)$$



$(u_n)_{n\in[\![0,20]\!]}$ *lorsque* $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\rho = 0.8$ *et* $u_0 = u_1 = 1$

L'expression "quasi-périodique" tient à ce que u est bornée et que $\left(\frac{u_t}{\rho^t}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ est périodique.

☞ Q2 Les racines de $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - 2\rho\cos\theta\mathbb{X} + \rho^2\mathbb{X}^2 = \left(1-\rho e^{i\theta}\mathbb{X}\right)\left(1-\rho e^{-i\theta}\mathbb{X}\right)$ sont de module $\frac{1}{\rho} > 1$; par conséquent la représentation "$\Phi(L)\circ X = \epsilon$" est la représentation MA canonique, et ϵ est l'innovation de X.

En particulier, pour tout $h \geq 1$ ϵ_t est indépendant de X_{t-h} ce qui s'écrit

$$\forall h \geq 1,\ \mathbb{C}ov\left(1 - 2\rho\cos\theta X_{t-1} + \rho^2 X_{t-2}, X_{t-h}\right) = 0$$

soit encore

$$\forall h \geq 1, \gamma_X(h) = 2\rho\cos\theta\gamma_X(h-1) + \rho^2\gamma_X(h-2)$$

et donc

$$\boxed{\gamma_X \text{ suit la récurrence de polynôme } \Phi}$$

En particulier d'après la question précédente γ_X est quasi-périodique.

Pour déterminer explicitement γ_X il reste à déterminer $\gamma_X(0)$: on a en l'occurence lorsque $h = 0$

$$\mathbb{C}ov\left(X_t - 2\rho\cos\theta X_{t-1} + \rho^2 X_{t-2}, \epsilon_t\right) = \mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$$

ce qui s'écrit encore

$$\gamma_X(0) - 2\rho\cos\theta\gamma_X(1) + \rho^2\gamma_X(2) = \sigma_\epsilon^2$$

Pour calculer $\gamma_X(0)$ il suffit de constater que γ_X est paire et donc en associant l'équation récurrence pour $h \in \{1,2\}$ il vient

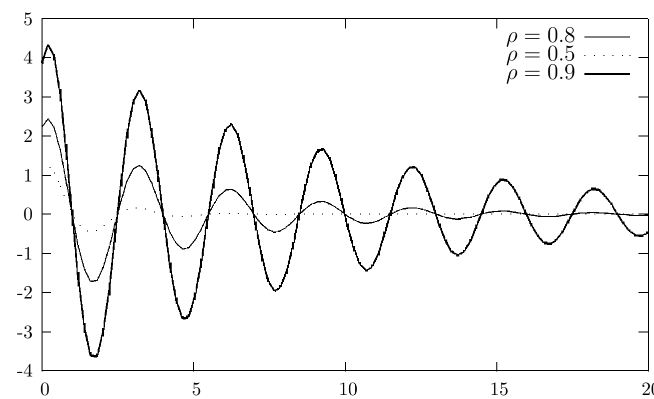
$$\begin{cases} \gamma_X(0) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & +\rho^2 & \gamma_X(2) & = & \sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_X(1) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(0) & +\rho^2 & \gamma_X(-1) & = & 0 \\ \gamma_X(2) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & +\rho^2 & \gamma_X(0) & = & 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore

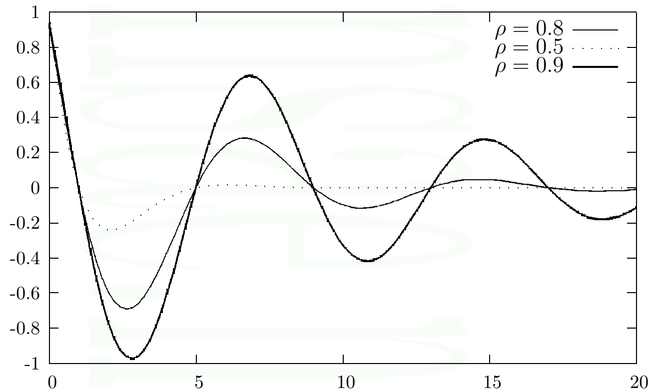
$$\begin{cases} & \gamma_X(0) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & +\rho^2 & \gamma_X(2) & = & \sigma_\epsilon^2 \\ -2\rho\cos\theta & \gamma_X(0) & +(1+\rho^2) & \gamma_X(1) & & & = & 0 \\ \rho^2 & \gamma_X(0) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & & \gamma_X(2) & = & 0 \end{cases}$$

ce dont on tire que

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2 & -2\rho\cos\theta & \rho^2 \\ 0 & 1+\rho^2 & 0 \\ 0 & -2\rho\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 & -2\rho\cos\theta & \rho^2 \\ -2\rho\cos\theta & 1+\rho^2 & 0 \\ \rho^2 & -2\rho\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon\left(1+\rho^2\right)}{(1+\rho^2) + 4\rho^4(\cos\theta)^2 - \rho^4\left(1+\rho^2\right) + 4\rho^2(\cos\theta)^2} \\ &= \boxed{\frac{\sigma_\epsilon\left(1+\rho^2\right)}{1+\left((2\cos\theta)^2-1\right)\left(\rho^4+\rho^2\right)-\rho^6}} \end{aligned}$$



γ_X *lorsque* $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ *et différentes valeurs de* ρ



γ_X lorsque $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et différentes valeurs de ρ

On observe que γ_X est pseudo-périodique et que le facteur important est sa "vitesse d'aplatissement" ρ.

☞ Q3 On a pour $\omega \in]-\pi, \pi[$

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{|\Phi(e^{i\omega})|^2} \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - 2\rho\cos\theta e^{i\omega} + \rho^2 e^{2i\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1 - 2\rho\cos\theta\cos\omega + \rho^2\cos(2\omega))^2 + (-2\rho\cos\theta\sin\omega + \rho^2\sin(2\omega))^2} \end{aligned}$$

Soit donc $g(\omega) = \frac{2\pi}{\sigma_\epsilon^2}\frac{1}{f_X(\omega)}$; il vient

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \left\{ \begin{array}{r} 1 + 4\rho^2(\cos\theta)^2(\cos\omega)^2 + \rho^4(\cos(2\omega))^2 - 4\rho\cos\theta\cos\omega - 2\rho^2\cos(2\omega) \\ -2\rho^3\cos\theta\cos\omega\cos(2\omega) + 4\rho^2(\cos\theta)^2(\sin\omega)^2 + \rho^4(\sin(2\omega))^2 - 2\rho^3\cos\theta\sin\omega\sin(2\omega) \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{r} 2\left(1 + 4\rho^2(\cos\theta)^2 + \rho^4\right) - 4\rho\cos\theta\cos\omega \\ -2\rho^2\cos(2\omega) - 2\rho^3\cos\theta(\cos\omega\cos(2\omega) + \sin\omega\sin(2\omega)) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$ donc

$$\boxed{g(\omega) = 2\left(1 + 4\rho^2(\cos\theta)^2 + \rho^4\right) - 4\rho\cos\theta\cos\omega - 2\rho^2\cos(2\omega) - 2\rho^3\cos\theta\cos(3\omega)}$$

Donc

$$g'(\omega) = 4\cos\theta\rho\sin\omega - 4\rho^2\sin(2\omega) - 6\rho^3\cos\theta\sin(3\omega)$$

En particulier g' s'annule et change de signe sur $]0, \pi[$, de sorte que g admet un minimum
$\omega_0 \in]0, \pi[$.[6] Donc f_X admet un extremum en ω_0.
Lorsque $\rho \to 1$, $\Phi(\mathbb{X})$ converge normalement vers $1 - 2\cos\theta\mathbb{X} + \mathbb{X}^2 = \left(\mathbb{X} - e^{i\theta}\right)\left(\mathbb{X} - e^{-i\theta}\right)$, d
toutes les racines sont unitaires. On peut montrer en outre[7] que $\omega_0 \xrightarrow[\rho \to 1^-]{} \theta$: ainsi dans le
limite où X devient un processus intégré, la densité spectrale de X converge (simplement) v
la masse de Dirac sur $\{\theta\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

⋆
⋆ ⋆

[6] Le calcul explicite de ω_0, par exemple dans le cas où $\theta = \frac{2\pi}{3}$, est tout-à-fait passionnant et laissé à la sagacité
lecteur.

[7] Essentiellement, $(\rho, \omega) \mapsto g_\rho(\omega)$ est C^1, et θ est l'unique racine sur $]0, \pi[$ de $g_1(\omega)$. ω_0 vérifie lorsque $\rho \to 1$
$4\cos\theta\sin\omega_0 - 4\sin(2\omega_0) - 6\cos\theta\sin(3\omega_0) = 0$ dont l'unique solution sur $]0, \pi[$ est $\omega_0 = \theta$.