ENSAE

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Enoncé des travaux dirigés n°3

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
Guillaume.Lacote@ensae.fr
http://ensae.no-ip.com/SE206/

Enoncé de l'exercice 1

On considère deux processus stationnaires du second ordre X et Y vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} Y_t = & \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ X_t = & \phi_2 X_{t-1} + V_t \end{cases}$$

où U et V sont deux bruits blancs décorrélés de variances respectives σ_U^2 et σ_V^2.
On suppose en outre que $0 < |\phi_1| < 1$ et $0 < \phi_2 < 1$.

☞ Q1 Soit $W = (\mathbb{1} - \phi_1 L)(\mathbb{1} - \phi_2 L) \circ Y$.
Montrer que W est stationnaire et calculer γ_W.
En déduire que W est un processus MA que l'on déterminera.[1]
Application numérique : $a = 1.5$, $\phi_1 = 0.4$, $\phi_2 = 0.6$, $\sigma_U^2 = 0.016$ et $\sigma_V^2 = 0.036$.

☞ Q2 Montrer que Y est un processus ARMA que l'on déterminera.

☞ Q3 Déterminer la prévision optimale $Y_t^* = \mathbb{EL}(Y_t | Y_{t-1}, \ldots)$ et la variance de l'erreur de prévis
$Y_t - Y_t^*$.

Enoncé de l'exercice 2

On considère n processus stationnaires $X^1, \ldots, X^n$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (\mathbb{1} - \rho_i L) X^i = U^i$$

où $\rho_i \in]-1, 1[$ et U^i est un bruit blanc de variance σ_i^2 indépendant[2] de tout U^j pour $j \neq i$.
On définit $Z = X^1 + \cdots X^n$; on cherche à déterminer la prévision optimale de Z_{T+1} fondée
l'observation des X^i aux dates $T, T-1, \ldots$.

☞ Q1 Montrer que pour tous $t, t' \in \mathbb{Z}$ et $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, ${X^i}_t$ est indépendant de ${X^j}_{t'}$.
Déterminer $Z_{T+1}^{*X} = \mathbb{EL}(Z_{T+1} | {X^1}_T, \ldots, {X^n}_T, {X^1}_{T-1}, \ldots, {X^n}_{T-1}, \ldots)$ et la variance V_X de l
reur de prévision associée en fonction des variances des U^i.

☞ Q2 Montrer que Z satisfait une relation de la forme

$$\Theta(L) Z = \Delta(L) \xi$$

où Θ et Δ sont des polynômes (de degrés finis) et ξ est un bruit blanc (on discutera selon
les ρ_i sont deux-à-deux distincts ou non).

[1] On supposera pour ce faire que $a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2)\sigma_U^2 > 2\phi_2 \sigma_U^2$.
[2] Et ce à toutes dates : $\forall t, t', \forall i, j,\ (t \neq t' \text{ou} i \neq j) \rightarrow {U^i}_t$ est indépendant de ${U^j}_{t'}$

☞ Q3 En déduire que Z est un processus ARMA dont on déterminera la forme canonique.

☞ Q4 Donner une condition suffisante pour que Z soit un AR pur.
On détaillera en particulier le cas $n = 2$.

☞ Q5 Dans le cas général, déterminer la prévision optimale $Z^{*Z}_{T+1} = \mathbb{EL}\left(Z_{T+1}|Z_T, Z_{T-1}, \ldots\right)$ fondée sur les observations agrégées.
Donner la variance V_Z de l'erreur de prévision associée en fonction des variances des U^i.
Comparer V_Z à V_X et conclure.

Enoncé de l'exercice 3

On considère un processus stationnaire X vérifiant

$$\left(\mathbb{1} - 2\rho\cos\theta L + \rho^2 L^2\right) X = \epsilon$$

où $\rho \in]-1, 1[$, $\theta \in]0, \pi[$ et ϵ est un bruit blanc de variance σ^2_ϵ.

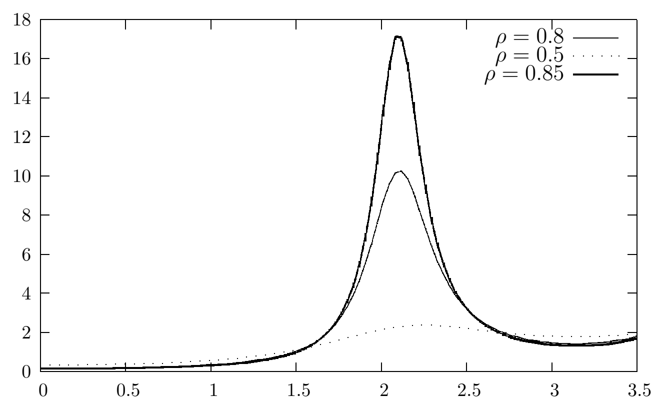
☞ Q1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ la suite *réelle* définie par

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés} \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ u_t - 2\rho\cos\theta u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} = 0 \end{cases}$$

Calculer le terme général de u.
Justifier l'expression "u est quasi-périodique".

☞ Q2 Montrer que ϵ est l'innovation de X, et calculer γ_X.
Application numérique : Tracer γ_X lorsque $\sigma^2_\epsilon = 1$, $\rho = 0.8$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

☞ Q3 Etudier la densité spectrale f_X de X, en particulier lorsque $\rho \to 1^-$.



Graphe de $\omega \mapsto \frac{1}{|1+2\rho e^{i\omega}+\rho^2 e^{2i\omega}|^2}$