



Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Énoncé des travaux dirigés n°3

Guillaume Lacôte

 Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Enoncé de l'exercice 1

On considère deux processus stationnaires du second ordre X et Y vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ X_t = \phi_2 X_{t-1} + V_t \end{cases}$$

où U et V sont deux bruits blancs décorrélés de variances respectives σ_U^2 et σ_V^2 .

On suppose en outre que $0 < |\phi_1| < 1$ et $0 < \phi_2 < 1$.

☞ Q1 Soit $W = (\mathbf{1} - \phi_1 L)(\mathbf{1} - \phi_2 L) \circ Y$.

Montrer que W est stationnaire et calculer γ_W .

En déduire que W est un processus MA que l'on déterminera.¹

Application numérique : $a = 1.5$, $\phi_1 = 0.4$, $\phi_2 = 0.6$, $\sigma_U^2 = 0.016$ et $\sigma_V^2 = 0.036$.

☞ Q2 Montrer que Y est un processus ARMA que l'on déterminera.

☞ Q3 Déterminer la prévision optimale $Y_t^* = \mathbb{E}\mathbb{L}(Y_t | Y_{t-1}, \dots)$ et la variance de l'erreur de prévision $Y_t - Y_t^*$.

Enoncé de l'exercice 2

On considère n processus stationnaires X^1, \dots, X^n vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mathbf{1} - \rho_i L) X^i = U^i$$

où $\rho_i \in]-1, 1[$ et U^i est un bruit blanc de variance σ_i^2 indépendant² de tout U^j pour $j \neq i$.

On définit $Z = X^1 + \dots + X^n$; on cherche à déterminer la prévision optimale de Z_{T+1} fondée sur l'observation des X^i aux dates $T, T-1, \dots$.

☞ Q1 Montrer que pour tous $t, t' \in \mathbb{Z}$ et $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X^i_t est indépendant de $X^j_{t'}$.

Déterminer $Z_{T+1}^{*X} = \mathbb{E}\mathbb{L}(Z_{T+1} | X^1_T, \dots, X^n_T, X^1_{T-1}, \dots, X^n_{T-1}, \dots)$ et la variance V_X de l'erreur de prévision associée en fonction des variances des U^i .

☞ Q2 Montrer que Z satisfait une relation de la forme

$$\Theta(L)Z = \Delta(L)\xi$$

où Θ et Δ sont des polynômes (de degrés finis) et ξ est un bruit blanc (on discutera selon que les ρ_i sont deux-à-deux distincts ou non).

¹On supposera pour ce faire que $a^2\sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2)\sigma_U^2 > 2\phi_2\sigma_U^2$.

²Et ce à toutes dates : $\forall t, t', \forall i, j, (t \neq t' \text{ ou } i \neq j) \rightarrow U^i_t$ est indépendant de $U^j_{t'}$.

- ☞ Q3 En déduire que Z est un processus ARMA dont on déterminera la forme canonique.
- ☞ Q4 Donner une condition suffisante pour que Z soit un AR pur.
On détaillera en particulier le cas $n = 2$.
- ☞ Q5 Dans le cas général, déterminer la prévision optimale $Z_{T+1}^* = \mathbb{E}\mathbb{L}(Z_{T+1}|Z_T, Z_{T-1}, \dots)$ fondée sur les observations agrégées.
Donner la variance V_Z de l'erreur de prévision associée en fonction des variances des U^i .
Comparer V_Z à V_X et conclure.

Enoncé de l'exercice 3

On considère un processus stationnaire X vérifiant

$$(1 - 2\rho \cos \theta L + \rho^2 L^2) X = \epsilon$$

où $\rho \in]-1, 1[$, $\theta \in]0, \pi[$ et ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

- ☞ Q1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés} \\ \forall t \in \mathbb{Z}, u_t - 2\rho \cos \theta u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} = 0 \end{cases}$$

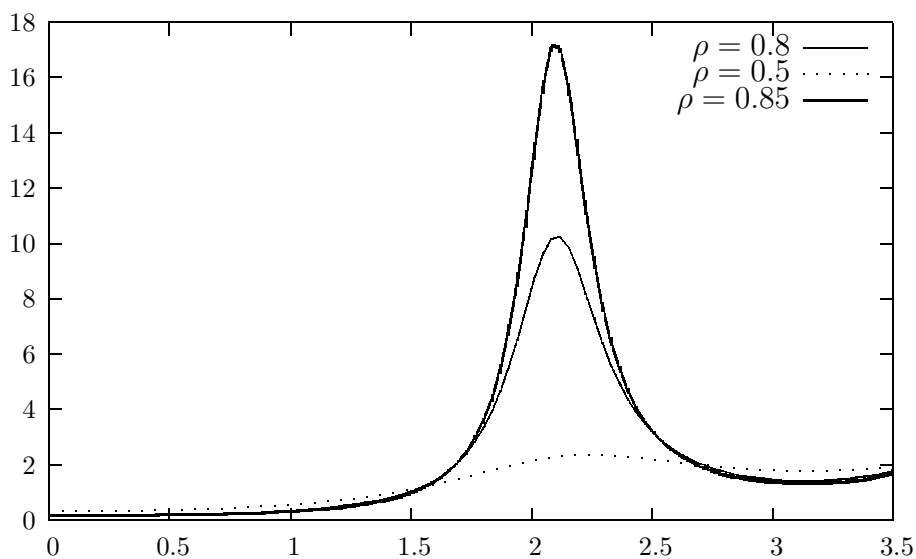
Calculer le terme général de u .

Justifier l'expression " u est quasi-périodique".

- ☞ Q2 Montrer que ϵ est l'innovation de X , et calculer γ_X .

Application numérique : Tracer γ_X lorsque $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\rho = 0.8$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

- ☞ Q3 Etudier la densité spectrale f_X de X , en particulier lorsque $\rho \rightarrow 1^-$.



Grphe de $\omega \mapsto \frac{1}{|1+2\rho e^{i\omega} + \rho^2 e^{2i\omega}|^2}$

