

Séries temporelles linéaires
Énoncé et corrigé des travaux dirigés n°3

Guillaume Lacôte
Bureau E03

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Énoncé de l'exercice 1

On considère deux processus stationnaires du second ordre X et Y vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ X_t = \phi_2 X_{t-1} + V_t \end{cases}$$

où U et V sont deux bruits blancs décorrélés de variances respectives σ_U^2 et σ_V^2 .

On suppose en outre que $0 < |\phi_1| < 1$ et $0 < \phi_2 < 1$.

☞ Q1 Soit $W = (\mathbb{1} - \phi_1 L)(\mathbb{1} - \phi_2 L) \circ Y$.

Montrer que W est stationnaire et calculer γ_W .

En déduire que W est un processus MA que l'on déterminera.¹

Application numérique : $a = 1.5$, $\phi_1 = 0.4$, $\phi_2 = 0.6$, $\sigma_U^2 = 0.016$ et $\sigma_V^2 = 0.036$.

☞ Q2 Montrer que Y est un processus ARMA que l'on déterminera.

☞ Q3 Déterminer la prévision optimale $Y_t^* = \mathbb{E}L(Y_t | Y_{t-1}, \dots)$ et la variance de l'erreur de prévision $Y_t - Y_t^*$.

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a tout d'abord pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ \text{donc } ((\mathbb{1} - \phi_2 L)Y)_t &= \phi_1 ((\mathbb{1} - \phi_2 L)Y)_{t-1} + a((\mathbb{1} - \phi_2 L)X)_t + (U_t - \phi_2 U_{t-1}) \\ &= \phi_1 ((\mathbb{1} - \phi_2 L)Y)_{t-1} + aV_t + (U_t - \phi_2 U_{t-1}) \end{aligned}$$

$$\text{c'est-à-dire } ((\mathbb{1} - \phi_1 L)(\mathbb{1} - \phi_2 L)Y)_t = aV_t + U_t - \phi_2 U_{t-1}$$

$$\text{soit } W_t = aV_t + ((\mathbb{1} - \phi_2 L)U)_t$$

Alors

$$- \mathbb{E}(W_t) = 0$$

$$- \text{pour } h \in \mathbb{Z} \text{ Cov}(W_t, W_{t+h}) = \begin{cases} a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 & \text{si } h = 0 \\ -\phi_2 \sigma_U^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier W est stationnaire (et sa fonction d'auto-covariance est celle d'un processus MA(1)). Cherchons donc Θ et ϵ bruit blanc tels que $W = \Theta(L)\epsilon$ et Θ de degré 1.

Donnons-nous pour ce faire un bruit blanc ϵ de variance $\sigma_\epsilon^2 > 0$ et $\lambda \in]-1, 1[$, et soit $Z = (\mathbb{1} - \lambda L)\epsilon$; cherchons à déterminer ϵ et λ de façon à ce que $Z = W$.

¹On supposera pour ce faire que $a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 > 2\phi_2 \sigma_U^2$.

L'égalité $\gamma_Z = \gamma_W$ pour $h \in \{0, 1\}$ conduit à

$$\begin{cases} (1 + \lambda^2) \sigma_\epsilon^2 &= a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 \\ -\lambda \sigma_\epsilon^2 &= -\phi_2 \sigma_U^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \lambda^2 - \frac{a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2}{\phi_2 \sigma_U^2} \lambda + 1 &= 0 \\ \sigma_\epsilon^2 &= \frac{\phi_2 \sigma_U^2}{\lambda} \end{cases}$$

Soit donc $\lambda = \frac{a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 - \sqrt{(a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2)^2 - 4 \phi_2 \sigma_U^2}}{2 \phi_2 \sigma_U^2}$; ainsi $\lambda \in]-1, 1[$. Posons alors $\epsilon = (\mathbf{1} - \lambda L)^{-1} W$: ϵ est par construction un bruit blanc de variance $\sigma_\epsilon^2 = \frac{\phi_2 \sigma_U^2}{\lambda}$ et de plus

$$W = (\mathbf{1} - \lambda L) \epsilon$$

Application numérique: On a $a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 = 0.10276 > 0.0192 = 2 \phi_2 \sigma_U^2$. Il vient $\lambda = 0.095$ et $\sigma_\epsilon^2 = 0.101$. On vérifie que $|\lambda| < 1$ et que la représentation de W est bien canonique (donc que ϵ est bien l'innovation de W).

☞ Q2 On a immédiatement

$$(\mathbf{1} - \phi_1 L)(\mathbf{1} - \phi_1 L)Y = (\mathbf{1} - \lambda L)\epsilon$$

A supposer que $\lambda \neq \phi_1$ et $\lambda \neq \phi_2$, Y est donc un processus ARMA(2,1) (sinon c'est un AR(1)); en outre cette représentation est canonique.

Application numérique: $(\mathbf{1} - 0.6L)(\mathbf{1} - 0.4L)Y = (\mathbf{1} - 0.095L)\epsilon$.

☞ Q3 Soit $\Phi(\mathbb{X}) = (1 - \phi_1 \mathbb{X})(1 - \phi_2 \mathbb{X})$; les racines $\frac{1}{\phi_1}$ et $\frac{1}{\phi_2}$ de Φ sont toutes de module supérieur à un; donc (voir TD 2, exercice 1) Y admet un développement en série à coefficients positifs $Y_t = \sum_{k \geq 0} a_k \epsilon_{t-k}$, et en particulier $\forall t \in \mathbb{Z}, \epsilon_t \perp\!\!\!\perp Y_{t-1}, \dots$. Par conséquent ϵ est l'innovation de Y et en particulier $Y - Y^* = \epsilon$.

On en tire successivement que

$$\mathbb{V}(Y_t - Y_t^*) = \sigma_\epsilon^2$$

²Les deux racines sont de même signe car leur produit 1 est positif, et ce signe est positif car leur somme $\frac{a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2}{\phi_2 \sigma_U^2}$ est positive. Le produit des racines valant 1, la plus petite des deux est de module inférieur à 1, à savoir $\frac{[\dots] - \sqrt{[\dots]^2 - 4}}{2}$.

³Parmi tous les bruits blancs possibles de variance $\sigma_\epsilon^2 = \frac{\phi_2 \sigma_U^2}{\lambda}$ il n'y en a qu'un seul qui convienne, est c'est nécessairement $\epsilon = (\mathbf{1} - \lambda L)^{-1} W$.

et de plus que

$$\begin{aligned} Y^* &= Y - \epsilon \\ &= (\mathbf{1} - \Phi(L)(\mathbf{1} - \lambda L)^{-1})Y \\ &= \left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - (\phi_1 + \phi_2)L + \phi_1 \phi_2 L^2) \circ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k L^k \right) Y \\ &= \left(\mathbf{1} - (\lambda^2 - \lambda(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1 \phi_2) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k L^k \right) Y \\ &= \left(\mathbf{1} - \lambda^2 \Phi \left(\frac{1}{\lambda} \right) \cdot (\mathbf{1} - \lambda L)^{-1} \right) \circ Y \end{aligned}$$

Application numérique:
$$\begin{cases} y_t^* = y_{t-1} - 0.24y_{t-2} - 1.045 \sum_{k \geq 1} 0.095^k y_{t-k} \\ \text{et par ailleurs } \mathbb{V}(Y_t - Y_t^*) = 0.101 \end{cases}$$

*
* *

Enoncé de l'exercice 2

On considère n processus stationnaires X^1, \dots, X^n vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mathbf{1} - \rho_i L)X^i = U^i$$

où $\rho_i \in]-1, 1[$ et U^i est un bruit blanc de variance σ_i^2 indépendant⁴ de tout U^j pour $j \neq i$. On définit $Z = X^1 + \dots + X^n$; on cherche à déterminer la prévision optimale de Z_{T+1} fondée sur l'observation des X^i aux dates $T, T-1, \dots$.

☞ Q1 Montrer que pour tous $t, t' \in \mathbb{Z}$ et $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X^i_t est indépendant de $X^j_{t'}$. Déterminer $Z_{T+1}^{X^i} = \mathbb{E}\mathbb{L}(Z_{T+1} | X^1_T, \dots, X^n_T, X^1_{T-1}, \dots, X^n_{T-1}, \dots)$ et la variance V_X de l'erreur de prévision associée en fonction des variances des U^i .

☞ Q2 Montrer que Z satisfait une relation de la forme

$$\Theta(L)Z = \Delta(L)\xi$$

où Θ et Δ sont des polynômes (de degrés finis) et ξ est un bruit blanc (on discutera selon que les ρ_i sont deux-à-deux distincts ou non).

☞ Q3 En déduire que Z est un processus ARMA dont on déterminera la forme canonique.

☞ Q4 Donner une condition suffisante pour que Z soit un AR pur.

On détaillera en particulier le cas $n = 2$.

⁴Et ce à toutes dates: $\forall t, t', \forall i, j, (t \neq t' \text{ ou } i \neq j) \rightarrow U^i_t$ est indépendant de $U^j_{t'}$

- ☞ Q5 Dans le cas général, déterminer la prévision optimale $Z_{T+1}^* = \mathbb{E}\mathbb{L}(Z_{T+1}|Z_T, Z_{T-1}, \dots)$ fondée sur les observations agrégées.
Donner la variance V_Z de l'erreur de prévision associée en fonction des variances des U^i .
Comparer V_Z à V_X et conclure.

Corrigé de l'exercice 2

- ☞ Q1 Pour tous $i \neq j$ et toutes dates $t, t', U^i_t, U^i_{t-1}, U^i_{t'}, U^i_{t'-1}, U^j_t, U^j_{t-1}, U^j_{t'}, U^j_{t'-1}$ sont tous deux-à-deux indépendants. Donc X^i_t et $X^j_{t'}$ sont indépendants.
En particulier

$$\begin{aligned} Z_{T+1}^* &= \mathbb{E}\mathbb{L}\left(\sum_{i=1}^n X^i_{T+1} | X^1_T, \dots, X^n_T, X^1_{T-1}, \dots, X^n_{T-1}, \dots\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\mathbb{L}(X^i_{T+1} | X^1_T, \dots, X^n_T, X^1_{T-1}, \dots, X^n_{T-1}, \dots) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\mathbb{L}(X^i_{T+1} | X^i_T, X^i_{T-1}, \dots) \\ &= X^1_{T+1} + \dots + X^n_{T+1} \\ &= \boxed{\rho_1 X^1_T + \dots + \rho_n X^n_T} \text{ puisque } \mathbf{1} - \rho_i L \text{ est sous forme canonique car } |\rho_i| < 1 \end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z_{T+1} - Z_{T+1}^*) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X^i_{T+1} - \sum_{i=1}^n \rho_i X^i_T\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n (\rho_i X^i_T + U^i_T) - \sum_{i=1}^n \rho_i X^i_T\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n U^i_T\right) \\ &= \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \end{aligned}$$

- ☞ Q2 Observons que $Z = (\mathbf{1} - \rho_1 L)^{-1} U^1 + \dots + (\mathbf{1} - \rho_n L)^{-1} U^n$, de sorte que pour tout polynôme Θ on a

$$\Theta(L)Z = \Theta(L)(\mathbf{1} - \rho_1 L)^{-1} U^1 + \dots + \Theta(L)(\mathbf{1} - \rho_n L)^{-1} U^n \tag{1}$$

En particulier dès que $\Theta(\mathbb{X})$ est un multiple de tous les $(1 - \rho_i \mathbb{X})$ l'expression (1) est polynomiale des deux côtés. Soit donc Θ le ppcm (au sens de la division euclidienne de polynômes)

de $1 - \rho_1 \mathbb{X}, \dots, 1 - \rho_n \mathbb{X}$. Alors Z vérifie

$$\Theta(L)Z = \sum_{i=1}^n \Lambda_i(L)U^i$$

où $\Lambda_i(\mathbb{X}) = \frac{\Theta(\mathbb{X})}{1 - \rho_i \mathbb{X}} = \Pi \begin{cases} \rho \in \{\rho_1, \dots, \rho_n\} \\ \rho \neq \rho_i \end{cases}$ ($1 - \rho \mathbb{X}$) est un polynôme de degré $n_i \leq n - 1$.

Considérons alors $V^i = \Lambda_i(L)U^i$ tous stationnaires, et soit $V = V^1 + \dots + V^n$.
Alors

$$\text{Cov}(V_t, V_{t+h}) = \gamma_{V^1}(h) + \dots + \gamma_{V^n}(h)$$

En particulier $\text{Cov}(V_t, V_{t+h})$ est indépendant de t et donc (comme bien-sûr $\mathbb{E}(V_t) = 0$) V stationnaire. En outre $\gamma_V(h) = 0$ dès que $h \geq \max_i n_i$, ce qui caractérise un MA d'ordre au plus $\max_i n_i$.⁵

Plus précisément, soit $d = \max\{i / \gamma_V(i) \neq 0\}$, et donnons-nous $\delta_1, \dots, \delta_d$ et η un bruit blanc de variance σ_η^2 ; notons $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \delta_1 \mathbb{X} - \dots - \delta_d \mathbb{X}^d$. Alors l'égalité $\gamma_{\Delta(L)\eta} = \gamma_V$ revient à système de $d + 1$ équations (a priori non-linéaire)

$$\{ \mathcal{E}_h : \gamma_{\Delta(L)\eta}(h) = \gamma_V(h) \text{ pour } h \in \llbracket 0, d \rrbracket \}$$

correspondant aux équations de Yule-Walker, et dont on tire $\sigma_\eta^2, \delta_1, \dots, \delta_d$.

Soit alors $\Delta^*(\mathbb{X}) = 1 + \delta_1 \mathbb{X} + \dots + \delta_r \mathbb{X}^r$, et notons Δ le polynôme canonique associé (celui de toutes les racines sont de module supérieur à un, voir TD 2, exercice 1). Définissons enfin $\xi = \Delta(L)^{-1}V$. Alors par construction ξ est un bruit blanc, et en outre $V = \Delta(L)\xi$.

Ainsi

$$\Theta(L)Z = \Delta(L)\xi$$

avec $d^\circ \Theta \leq n$ et $d^\circ \Delta \leq \max_i n_i \leq n - 1$ et toutes les racines de Θ et Δ sont de module supérieur (ou égal) à 1.

- ☞ Q3 On sait que 1 n'est racine d'aucun $1 - \rho_i \mathbb{X}$, donc n'est pas racine de $\Theta(\mathbb{X})$. Montrons que 1 n'est pas racine de $\Delta(\mathbb{X})$ ailleurs V n'est pas intégré.

Attention :

Il ne suffit pas que Z (et donc $\Theta(L)Z$) soit stationnaire pour interdire que Θ ait une racine unitaire : $X = (\mathbf{1} - L)\epsilon$ est par exemple stationnaire TD 1, exercice 1 ...

Dans le cas contraire, soit s l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans Δ , et soit $\bar{\Delta}(\mathbb{X})$ polynôme $\frac{\Delta(\mathbb{X})}{(1-\mathbb{X})^s}$; on note $\bar{\xi} = \bar{\Delta}(L)\xi$.

Soit alors $N \in \mathbb{N}$; comme $(1 - \mathbb{X}) \sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k = 1 - \mathbb{X}^{N+1}$ on a d'une part

$$\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \circ V_t = (1 - L^{N+1})(\mathbf{1} - L)^{s-1} \circ \bar{\xi}_t$$

⁵Attention, si $k = l$ et $\gamma_A(k-1) + \gamma_B(l-1) = 0$ alors $A + B$ est un MA d'ordre $k-1$...

et d'autre part

$$\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \circ V_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^N L^k\right)^s \times \Lambda_i(L) \circ U^i_t$$

Considérons donc pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $N \in \mathbb{N}$ le polynôme $\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right) \Lambda_i(\mathbb{X})$; comme les racines de Λ_i sont parmi les ρ_i , $1 - \mathbb{X}$ ne divise pas Λ_i et donc

$$(1 - \mathbb{X}^{N+1}) = \left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right) (1 - \mathbb{X}) \text{ ne divise pas } \left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right) \Lambda_i(\mathbb{X})$$

Notons pour tout polynôme P $\nu(P)$ le nombre de coefficients non-nuls de P : alors $\nu(\Lambda_i(\mathbb{X})) \geq 1$ car Λ_i est de degré $n_i \geq 1$. Par conséquent pour $N \geq n_i$ on a ⁶

$$\nu\left(\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right) \Lambda_i(\mathbb{X})\right) \geq N - n_i$$

Donc en particulier

$$\mathbb{V}\left(\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \times \Lambda_i(L) \circ U^i_t\right) = \sum_{j=0}^{N+n_i} \alpha_j^2 \mathbb{V}(U^i_{t-j}) \geq (N - n_i) \left(\min_{\alpha_j \neq 0} |\alpha_j|\right)^2 \sigma_i^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

Autrement dit pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{V}\left(\left(\mathbf{1} - L^{N+1}\right)^s \bar{\xi}_t\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit donc $\eta = \left(\mathbf{1} - L^{N+1}\right)^{s-1} \bar{\xi} = \left(\mathbf{1} - L^{N+1}\right)^{s-1} \bar{\Delta}(L)\xi$: η est stationnaire puisque ξ est un bruit blanc.

Or $\mathbb{V}(\eta_t - \eta_{t-N-1}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc $\gamma_\eta(h) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc

$$\gamma_V(h) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} +\infty$$

Pourtant, les U^i sont indépendants donc $\gamma_V(h) = \sum_{i=1}^n \gamma_{\Lambda_i(L)U^i}(h)$ et donc comme chaque $\Lambda_i(L)U^i$ est un processus MA son auto-covariance est nulle à partir d'un certain rang (n_i en l'occurrence), et en particulier

$$\gamma_V(h) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$$

⁶Soit $P(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^p a_k \mathbb{X}^k$ un polynôme de degré p n'admettant pas 1 pour racine, et développons successivement $\mathbb{X}^j P(\mathbb{X})$: il vient

	1	\mathbb{X}	\mathbb{X}^2	...	\mathbb{X}^p	\mathbb{X}^{p+1}	...	\mathbb{X}^{N-p}	...	\mathbb{X}^{p+N}
$P(\mathbb{X})$	a_0	a_1	a_2	...	a_p	0	0
$\mathbb{X}P(\mathbb{X})$	0	a_0	a_1	...	a_{p-1}	a_p	0
\vdots	\vdots		\ddots		\ddots	\ddots				\vdots
$\mathbb{X}^N P(\mathbb{X})$	0							a_0	...	a_p
$\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right) P(\mathbb{X})$	a_0	$a_0 + a_1$...	$a_0 + \dots + a_p$	$a_0 + \dots + a_p$...	$a_0 + \dots + a_p$...	a_p

Le polynôme $\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right) P(\mathbb{X})$ est de degré au plus $N + p$, et au moins $N - \nu(P)$ monômes \mathbb{X}^k ont pour coefficient $a_0 + \dots + a_p$. Donc si $\nu\left(\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right) P(\mathbb{X})\right) < N - \nu(P) + 1$ coefficients sont nuls, donc l'une au moins de $N - \nu(P)$ colonnes $a_1 + \dots + a_p$ est nulle. Dans ce cas, $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P ! Or 1 n'est pas racine de Λ_i , donc $\nu\left(\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right) \Lambda_i(\mathbb{X})\right) \geq \nu(\Lambda_i)$.

Ainsi, $(1 - \mathbb{X})^s$ ne peut diviser $\Delta(\mathbb{X})$; on montre de façon identique qu'il en va de même pour toute racine de module 1, de sorte que V n'est pas intégré.

En conclusion,

$$Z \text{ est un processus ARMA}(p, r), \text{ où } p = d^\circ \Theta \text{ et } r \leq \max_i n_i$$

Notons que les racines $\frac{1}{\rho_1}, \dots, \frac{1}{\rho_n}$ de Θ sont toutes de module inférieur à 1; en outre par construction il en va de même pour celles de Δ .

Enfin, comme $\Theta(\mathbb{X})$ est le ppcm des $1 - \rho_i \mathbb{X}$, il n'admet aucune racine commune avec Δ (sinon, Δ admet par exemple ρ_1 , donc il en va de même pour Δ^* car $|\rho_1| < 1$, et on montre que $1 - \rho_1 \mathbb{X}$ divise tous les $\Lambda_i(\mathbb{X})$ ce qui viole le fait que Θ soit le ppcm des $1 - \rho_i \mathbb{X}$). Ainsi la représentation est canonique.

Notons enfin que si les $(\rho_i)_i$ sont deux-à-deux distincts, $\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \rho_1 \mathbb{X}) \dots (1 - \rho_n \mathbb{X})$ et Z est un ARMA(n,n-1).

Remarque: Le résultat reste vrai si l'on substitue à $1 - \rho_i \mathbb{X}$ un polynôme canonique $R_i(\mathbb{X})$ quelconque: $\Theta(\mathbb{X})$ reste le ppcm des $R_i(\mathbb{X})$, et s'ils sont tous premiers entre eux Z est un processus ARMA $\sum_{i=1}^n d^\circ R_i, \max_i d^\circ \Lambda_i$.

Q4 Z est un AR pur ssi V est un bruit blanc, soit si $r = 0$, soit encore si $(0, \dots, 0)$ est solution du système de Yule-Walker $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_h : \gamma_{\Delta(L)\xi}(h) = 0 \text{ pour } h \in \llbracket 1, d \rrbracket \end{array} \right.$.

Notons alors $\Lambda_i(\mathbb{X}) = \lambda_0^i + \lambda_1^i \mathbb{X} + \dots + \lambda_{n_i}^i \mathbb{X}^{n_i}$, avec $\lambda_0^i = 1$. Alors pour $t \in \mathbb{Z}$

$$V_t = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_k^i U^i_{t-k}$$

et donc pour $h \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_t, V_{t-h}) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n_i \\ 0 \leq l \leq n_j}} \lambda_k^i \lambda_l^j \text{Cov}(U^i_{t-k}, U^j_{t-h-l}) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n_i \\ 0 \leq l \leq n_j}} \lambda_k^i \lambda_l^j \mathbf{1}_{i=j} \mathbf{1}_{t-k=t-h-l} \sigma_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=h}^{n_i} \lambda_k^i \lambda_{k-h}^i \sigma_i^2 \end{aligned}$$

Par conséquent Z est un AR pur ssi

$$\forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n (\lambda_0^i \lambda_h^i + \dots + \lambda_{n_i-h}^i \lambda_{n_i}^i) \sigma_i^2 = 0$$

En particulier dans le cas où $n = 2$ et $\rho_1 \neq \rho_2$ on a $\Theta(\mathbb{X}) = 1 - (\rho_1 + \rho_2)\mathbb{X} + \rho_1\rho_2\mathbb{X}^2$, $\Lambda_1(\mathbb{X}) = 1 - \rho_2\mathbb{X}$ et $\Lambda_2(\mathbb{X}) = 1 - \rho_1\mathbb{X}$.

Donc Z est au plus un ARMA(2,1), et c'est un AR(2) pur ssi ⁷

$$\rho_1\sigma_1^2 + \rho_2\sigma_2^2 = 0$$

☞ Q5 Comme aucune racine de $\Theta(L)$ n'est de module 1, ξ est l'innovation de Z , et donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \xi_t = Z_t - Z_t^*$; en particulier

$$Z^{*Z} = Z - \xi = (\mathbf{1} - \Delta(L)\Theta^{-1}(L))Z$$

où $\Theta(\mathbb{X})^{-1}$ admet un développement en puissances positives de \mathbb{X} .

Par ailleurs 1 n'est pas racine de Δ , donc toutes les racines de Δ sont de module strictement supérieur à un; on définit donc $\frac{\Lambda_i(\mathbb{X})}{\Delta(\mathbb{X})} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^i \mathbb{X}^k$. Notons que $a_0^i = \frac{\Lambda_i(0)}{\Delta(0)} = \frac{1}{1} = 1$. Il vient alors

$$\begin{aligned} V_Z &= \mathbb{V}(Z_{T+1} - Z_{T+1}^*) \\ &= \mathbb{V}(\xi_{T+1}) \\ &= \mathbb{V}\left(\Delta(L)^{-1}(\Lambda_1(L)U^1 + \dots + \Lambda_n(L)U^n)\right)_{T+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^i L^k\right) \circ U^i\right)_{T+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^i)^2\right) \sigma_i^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^n (a_0^i)^2 \sigma_i^2 \\ &= \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \\ &= V_X \end{aligned}$$

Ainsi la prévision fondée sur les observations agrégées est moins bonne que celle fondée sur les observations individuelles, et ce alors même que les U^i sont indépendants!

Notons enfin qu'il n'y a égalité que si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}^*, a_k^i = 0$ c'est-à-dire si $\Delta(\mathbb{X}) = \Lambda_i(\mathbb{X})$, soit finalement si

$$\rho_1 = \dots = \rho_n$$

*
* *

Enoncé de l'exercice 3

⁷La condition s'écrit pour $h = 1$: “ $(\lambda_0^1\lambda_1^1 + \lambda_0^1\lambda_1^1)\sigma_1^2 + (\lambda_0^2\lambda_1^2 + \lambda_0^2\lambda_1^2)\sigma_2^2 = 0$ ” c'est-à-dire, compte-tenu de ce que $\lambda_0^i = 1$ et $\lambda_1^i = \rho_i$: “ $2\rho_1\sigma_1^2 + 2\rho_2\sigma_2^2 = 0$ ”.

On considère un processus stationnaire X vérifiant

$$(\mathbf{1} - 2\rho \cos \theta L + \rho^2 L^2) X = \epsilon$$

où $\rho \in]-1, 1[$, $\theta \in]0, \pi[$ et ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

☞ Q1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés} \\ \forall t \in \mathbb{Z}, u_t - 2\rho \cos \theta u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} = 0 \end{cases}$$

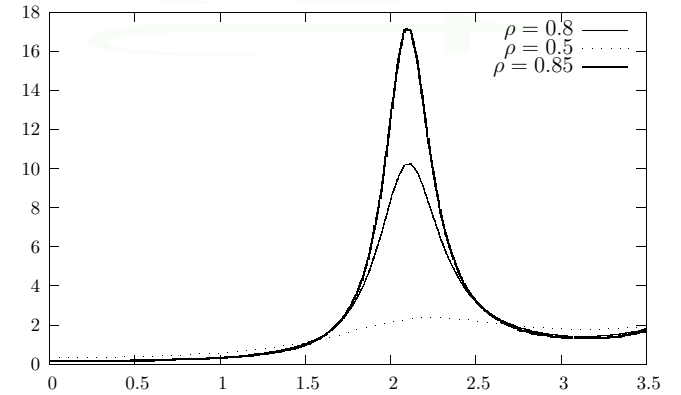
Calculer le terme général de u .

Justifier l'expression “ u est quasi-périodique”.

☞ Q2 Montrer que ϵ est l'innovation de X , et calculer γ_X .

Application numérique : Tracer γ_X lorsque $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\rho = 0.8$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

☞ Q3 Etudier la densité spectrale f_X de X , en particulier lorsque $\rho \rightarrow 1^-$.



Graphe de $\omega \mapsto \frac{1}{|1 + 2\rho e^{i\omega} + \rho^2 e^{2i\omega}|^2}$

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Soit $U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2\rho \cos \theta & \rho^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors A est inversible et de plus $\forall t \in \mathbb{Z}, U_t = A^t \times U_0$. Or les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A(\mathbb{X}) = 1 - 2\rho \cos \theta \mathbb{X} + \rho^2 \mathbb{X}^2$

savoir $\rho e^{+i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Soit donc P inversible telle que $A = P^{-1} \times \begin{pmatrix} \rho e^{+i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{pmatrix} \times P$; alors

$$U_t = P^{-1} \times \begin{pmatrix} \rho^t e^{+it\theta} & 0 \\ 0 & \rho^t e^{-it\theta} \end{pmatrix} P U_0, \text{ donc soient } \alpha, \beta \text{ tels que}$$

$$\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = \alpha \rho^t e^{+it\theta} + \beta \rho^t e^{-it\theta}$$

En particulier on a

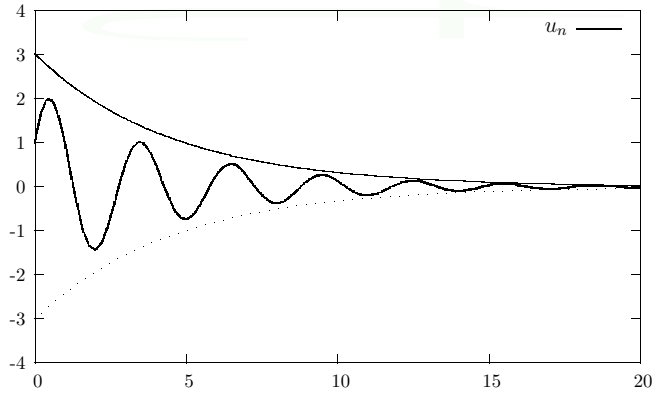
$$\begin{cases} \alpha + \beta & = u_0 \\ \rho(\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}) & = u_1 \end{cases}$$

d'où on tire

$$\begin{cases} \alpha & = \frac{u_1}{\rho} \frac{1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} - u_0 \\ \beta & = u_0 - \alpha \end{cases}$$

et donc finalement

$$\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = (\alpha + \beta)\rho^t \cos(t\theta) + i(\alpha - \beta)\rho^t \sin(t\theta) = u_0 \rho^t \cos(t\theta) + \underbrace{\left(\frac{u_1}{\rho \sin \theta} - \frac{u_0}{\tan \theta}\right)}_{\notin \mathbb{R}} \rho^t \sin(t\theta)$$



$(u_n)_{n \in [0,20]}$ lorsque $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\rho = 0.8$ et $u_0 = u_1 = 1$

L'expression "quasi-périodique" tient à ce que u est bornée et que $\left(\frac{u_t}{\rho^t}\right)_{t \in \mathbb{Z}}$ est périodique.

Q2 Les racines de $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - 2\rho \cos \theta \mathbb{X} + \rho^2 \mathbb{X}^2 = (1 - \rho e^{i\theta} \mathbb{X})(1 - \rho e^{-i\theta} \mathbb{X})$ sont de module $\frac{1}{\rho} > 1$; par conséquent la représentation " $\Phi(L) \circ X = \epsilon$ " est la représentation MA canonique, et ϵ est l'innovation de X .

En particulier, pour tout $h \geq 1$ ϵ_t est indépendant de X_{t-h} ce qui s'écrit

$$\forall h \geq 1, \text{Cov}(1 - 2\rho \cos \theta X_{t-1} + \rho^2 X_{t-2}, X_{t-h}) = 0$$

soit encore

$$\forall h \geq 1, \gamma_X(h) = 2\rho \cos \theta \gamma_X(h-1) + \rho^2 \gamma_X(h-2)$$

et donc

γ_X suit la récurrence de polynôme Φ

En particulier d'après la question précédente γ_X est quasi-périodique.

Pour déterminer explicitement γ_X il reste à déterminer $\gamma_X(0)$: on a en l'occurrence lorsque $h = 0$

$$\text{Cov}(X_t - 2\rho \cos \theta X_{t-1} + \rho^2 X_{t-2}, \epsilon_t) = \text{V}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$$

ce qui s'écrit encore

$$\gamma_X(0) - 2\rho \cos \theta \gamma_X(1) + \rho^2 \gamma_X(2) = \sigma_\epsilon^2$$

Pour calculer $\gamma_X(0)$ il suffit de constater que γ_X est paire et donc en associant l'équation récurrence pour $h \in \{1, 2\}$ il vient

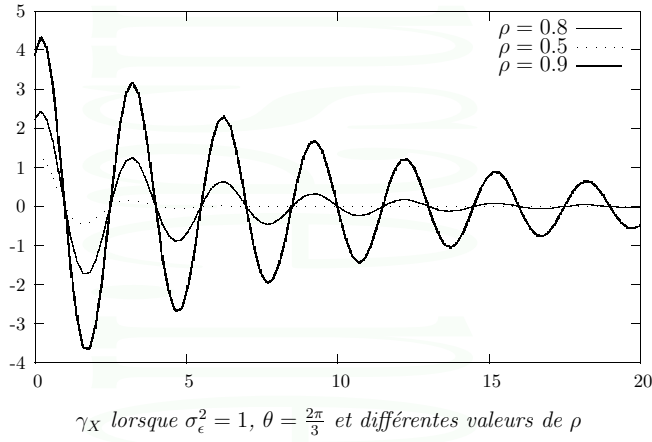
$$\begin{cases} \gamma_X(0) - 2\rho \cos \theta \gamma_X(1) + \rho^2 \gamma_X(2) & = \sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_X(1) - 2\rho \cos \theta \gamma_X(0) + \rho^2 \gamma_X(-1) & = 0 \\ \gamma_X(2) - 2\rho \cos \theta \gamma_X(1) + \rho^2 \gamma_X(0) & = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore

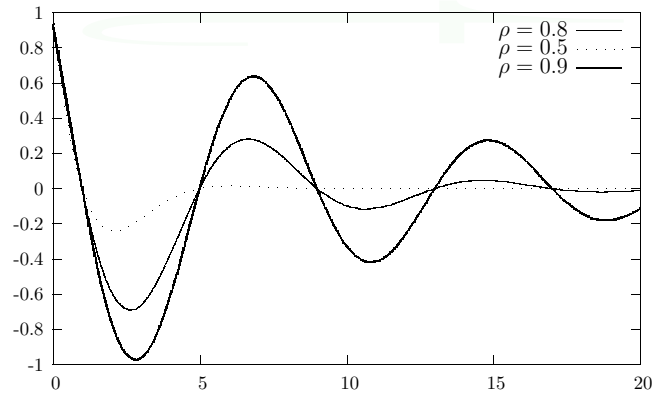
$$\begin{cases} \gamma_X(0) - 2\rho \cos \theta \gamma_X(1) + \rho^2 \gamma_X(2) & = \sigma_\epsilon^2 \\ -2\rho \cos \theta \gamma_X(0) + (1 + \rho^2) \gamma_X(1) & = 0 \\ \rho^2 \gamma_X(0) - 2\rho \cos \theta \gamma_X(1) + \gamma_X(2) & = 0 \end{cases}$$

ce dont on tire que

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2 & -2\rho \cos \theta & \rho^2 \\ 0 & 1 + \rho^2 & 0 \\ 0 & -2\rho \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 & -2\rho \cos \theta & \rho^2 \\ -2\rho \cos \theta & 1 + \rho^2 & 0 \\ \rho^2 & -2\rho \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon (1 + \rho^2)}{(1 + \rho^2) + 4\rho^4 (\cos \theta)^2 - \rho^4 (1 + \rho^2) + 4\rho^2 (\cos \theta)^2} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon (1 + \rho^2)}{1 + ((2 \cos \theta)^2 - 1)(\rho^4 + \rho^2) - \rho^6} \end{aligned}$$



γ_X lorsque $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et différentes valeurs de ρ



γ_X lorsque $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et différentes valeurs de ρ

On observe que γ_X est pseudo-périodique et que le facteur important est sa “vitesse d’aplatissement” ρ .

Q3 On a pour $\omega \in]-\pi, \pi[$

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{|\Phi(e^{i\omega})|^2} \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - 2\rho \cos \theta e^{i\omega} + \rho^2 e^{2i\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1 - 2\rho \cos \theta \cos \omega + \rho^2 \cos(2\omega))^2 + (-2\rho \cos \theta \sin \omega + \rho^2 \sin(2\omega))^2} \end{aligned}$$

Soit donc $g(\omega) = \frac{2\pi}{\sigma_\epsilon^2} \frac{1}{f_X(\omega)}$; il vient

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \begin{cases} 1 + 4\rho^2 (\cos \theta)^2 (\cos \omega)^2 + \rho^4 (\cos(2\omega))^2 - 4\rho \cos \theta \cos \omega - 2\rho^2 \cos(2\omega) \\ -2\rho^3 \cos \theta \cos \omega \cos(2\omega) + 4\rho^2 (\cos \theta)^2 (\sin \omega)^2 + \rho^4 (\sin(2\omega))^2 - 2\rho^3 \cos \theta \sin \omega \sin(2\omega) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(1 + 4\rho^2 (\cos \theta)^2 + \rho^4) - 4\rho \cos \theta \cos \omega \\ -2\rho^2 \cos(2\omega) - 2\rho^3 \cos \theta (\cos \omega \cos(2\omega) + \sin \omega \sin(2\omega)) \end{cases} \end{aligned}$$

Or $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ donc

$$g(\omega) = 2(1 + 4\rho^2 (\cos \theta)^2 + \rho^4) - 4\rho \cos \theta \cos \omega - 2\rho^2 \cos(2\omega) - 2\rho^3 \cos \theta \cos(3\omega)$$

Donc

$$g'(\omega) = 4 \cos \theta \rho \sin \omega - 4\rho^2 \sin(2\omega) - 6\rho^3 \cos \theta \sin(3\omega)$$

En particulier g' s’annule et change de signe sur $]0, \pi[$, de sorte que g admet un minimum $\omega_0 \in]0, \pi[$.⁸ Donc f_X admet un extremum en ω_0 .

Lorsque $\rho \rightarrow 1$, $\Phi(\mathbb{X})$ converge normalement vers $1 - 2 \cos \theta \mathbb{X} + \mathbb{X}^2 = (\mathbb{X} - e^{i\theta})(\mathbb{X} - e^{-i\theta})$, donc toutes les racines sont unitaires. On peut montrer en outre⁹ que $\omega_0 \xrightarrow{\rho \rightarrow 1^-} \theta$: ainsi dans le

cas limite où X devient un processus intégré, la densité spectrale de X converge (simplement) vers la masse de Dirac sur $\{\theta\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

*
* * *

⁸Le calcul explicite de ω_0 , par exemple dans le cas où $\theta = \frac{2\pi}{3}$, est tout-à-fait passionnant et laissé à la sagacité du lecteur.

⁹Essentiellement, $(\rho, \omega) \mapsto g_\rho(\omega)$ est C^1 , et θ est l’unique racine sur $]0, \pi[$ de $g_1(\omega)$. ω_0 vérifie lorsque $\rho \rightarrow 1$ l’équation $4 \cos \theta \rho \sin \omega_0 - 4 \sin(2\omega_0) - 6 \cos \theta \sin(3\omega_0) = 0$ dont l’unique solution sur $]0, \pi[$ est $\omega_0 = \theta$.