ENSAE

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Corrigé des travaux dirigés n°4

Guillaume Lacôte

Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ `http://ensae.no-ip.com/SE206/`

Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 (a) Le monôme $1 - \lambda\mathbb{X}$ étant inversible *ssi* $|\lambda| < 1$, posons

$$A^*(\mathbb{X}) = \left(\Pi_{|\lambda_i|<1}\left(1-\lambda_i\mathbb{X}\right)\right)\left(\Pi_{|\lambda_i|>1}\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\mathbb{X}\right)\right)$$

où $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ désignent les racines A.
Ainsi $A^*(L)$ est inversible.
Soit $\eta = (\mathbb{1} - L)A^*(L)X$; alors (voir TD 2, exercice 1) η est un bruit blanc, de variance $\frac{\sigma_\epsilon^2}{\Pi_{|\lambda_i|>1}\lambda_i^2}$.
On peut donc supposer sans perte de généralité, quitte à substituer A^* à A et η à ϵ, que toutes les racines de A sont de module strictement supérieur à un.
Dans ces conditions, notant $A(\mathbb{X}) = (1 - \lambda_1\mathbb{X}) \cdots (1 - \lambda_n\mathbb{X})$ il vient

$$\frac{1}{A(\mathbb{X})} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_1^k\mathbb{X}^k\right)\cdots\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_n^k\mathbb{X}^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\mathbb{X}^k$$

avec $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}$.

(b) On a

$$\frac{1}{A(\mathbb{X})} = \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\mathbb{X}^k$$

Or pour $M \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M}a_k\mathbb{X}^k &= \left(\sum_{k=0}^{M}a_k\right) + \sum_{k=0}^{M}a_k\left(\mathbb{X}^k-1\right)\\
&= \sum_{k=0}^{M}a_k1^k + a_0\cdot 0 + \sum_{k=1}^{M}a_k(\mathbb{X}-1)\left(1+\mathbb{X}+\cdots+\mathbb{X}^{k-1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{M}a_k1^k - (1-\mathbb{X})\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{k-1}a_k\mathbb{X}^j\\
&= \sum_{k=0}^{M}a_k1^k - (1-\mathbb{X})\sum_{j=0}^{M-1}\left(\sum_{k=j+1}^{M}a_k\right)\mathbb{X}^j
\end{aligned}$$

Par ailleurs A est convergente donc $\sum_{k=j+1}^{M}a_k$ admet une limite finie lorsque $M \to +\infty$, et on pose pour $j \in \mathbb{N}$

$$\boxed{b_j = -\sum_{k=j+1}^{+\infty}a_k}$$

Notons $b_j^N = -\sum_{k=j+1}^N a_k$; alors pour tous $M \in \mathbb{N}$ et $N \geq M+2$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{M} |b_j^N| &= \sum_{j=0}^{M} \left| \sum_{k=j+1}^{N} a_k \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{M} \sum_{k=j+1}^{N} |a_k| \\
&= \sum_{0 \leq j < k \leq M+1} |a_k| + \sum_{\substack{M+2 \leq k \leq N \\ 0 \leq j < k}} |a_k| \\
&= \sum_{k=0}^{M+1} k|a_k| + \sum_{k=M+2}^{N} k|a_k| \\
&= \sum_{k=0}^{N} k|a_k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k| \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \frac{1}{A(x)}\right) = \sum_k k a_k \mathbb{X}^k \text{ est absolument convergente.}
\end{aligned}$$

donc à la limite lorsque $N \to +\infty$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{M} |b_j| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k|$$

de sorte que la série $\sum_j b_j \mathbb{X}^j$ est convergente de rayon au moins 1.

On pose donc $\overline{A}(\mathbb{X}) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \mathbb{X}^j$; alors par construction comme $\sum_{k=0}^{M} a_k \underset{M\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{A(1)}$ on a

$$\boxed{A(\mathbb{X})^{-1} = \tfrac{1}{A(1)} + (1-\mathbb{X})\overline{A}(\mathbb{X})}$$

(c) Soit T la marche aléatoire d'origine 0 et vérifiant $\forall t \in \mathbb{Z}, T_t - T_{t-1} = \frac{1}{A(1)}\epsilon_t$, et notons $C = X - T$. Alors

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} - L)C &= (\mathbb{1} - L) \circ (X - T) \\
&= A(L)^{-1}\epsilon - (\mathbb{1} - L)T \\
&= \left(\frac{1}{A(1)} + (\mathbb{1} - L)\overline{A}(L)\right)\epsilon - (\mathbb{1} - L)T \\
&= (\mathbb{1} - L)\overline{A}(L)\epsilon
\end{aligned}$$

En particulier, il existe un variable fixe Z telle que $\forall t \in \mathbb{Z}$, $C_t = \overline{A}(L)\epsilon_t + Z$, et donc C est stationnaire. [1]

[1] On ne peut **pas** choisir Z qui est entièrement déterminée par la définition de $C = X - T$; en revanche on peut supposer que Z est décorrélée de tous les ϵ_t.

(d) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} T_t &= \tfrac{1}{A(1)}\left(\epsilon_t + \cdots + \epsilon_{T-N}\right) + T_{t-N-1} \\ C_t &= \alpha_0\epsilon_t + \alpha_1\epsilon_{t-1} + \cdots \end{aligned}$$

Or $T_t \perp\!\!\!\perp \epsilon_{t+h}$ pour $h \geq 1$ et donc pour tout $N \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\left(T_t, C_t\right) &= \begin{cases} \tfrac{1}{A(1)}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\sigma_\epsilon^2 + \tfrac{1}{A(1)}\sum_{k=0}^{N}\mathbb{C}ov\left(\epsilon_{t-k}, Z\right) \\ +\mathbb{C}ov\left(T_{t-N-1}, \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\epsilon_{t-k}\right) + \mathbb{C}ov\left(T_{t-N-1}, Z\right) \end{cases} \\ &= \frac{\alpha_0 + \cdots + \alpha_N}{A(1)}\sigma_\epsilon^2 + \sum_{k=N+1}^{+\infty}\alpha_k\mathbb{C}ov\left(T_{t-N-1}, \epsilon_{t-k}\right) \end{aligned}$$

donc finalement

$$\boxed{\mathbb{C}ov\left(T_t, C_t\right) = \tfrac{1}{A(1)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\right)\sigma_\epsilon^2}$$

En particulier T et C sont corrélés à toutes dates sauf bien-sûr si $A(\mathbb{X}) = (1)$.

☞ Q2 (a) On a pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(M_t\right) &= \mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right) + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ &= t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

donc par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & t\sigma_U^2 - \sqrt{\mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \sqrt{\mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & t\sigma_U^2 - \underbrace{\sqrt{\mathbb{V}\left(t\sigma_U^2\right)}}_{\underset{t \to +\infty}{\sim}\sqrt{t\sigma_U^2}}\sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \underbrace{\sqrt{\mathbb{V}\left(t\sigma_U^2\right)}}_{\underset{t \to +\infty}{\sim}\sqrt{t\sigma_U^2}}\sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{V}\left(M_t\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} t\sigma_U^2$$

Or $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(M_t) + 2\mathbb{C}ov(M_t, S_t) + \mathbb{V}(S_t)$ et donc

$$\mathbb{V}(M_t) - 2\sqrt{\mathbb{V}(M_t)}\sqrt{\mathbb{V}(S_t)} + \mathbb{V}(S_t) \leq \mathbb{V}(X_t) \leq \mathbb{V}(M_t) + 2\sqrt{\mathbb{V}(M_t)}\sqrt{\mathbb{V}(S_t)} + \mathbb{V}(S_t)$$

et comme S est stationnaire (donc de variance $\mathbb{V}(S_t)$ indépendante de t)

$$\mathbb{V}(X_t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathbb{V}(M_t)$$

En particulier

$$\boxed{\tfrac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sigma_U^2 > 0}$$

Or $X = T + C$ où T est une marche aléatoire associée à $\eta = \frac{1}{A(1)}\epsilon$ et C stationnaire, donc de façon similaire

$$\frac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{A(1)^2}\sigma_\epsilon^2$$

En particulier

$$\boxed{\sigma_U^2 = \tfrac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}}$$

Ainsi, quelle que soit la décomposition retenue la marche aléatoire est associée à un bruit blanc de variance $\frac{1}{A(1)^2}\sigma_\epsilon^2$.

(b) On a immédiatement $Y = (\mathbb{1} - L)X = A(L)^{-1}\epsilon$ et donc [2]

$$f_Y(\omega) = \frac{1}{|A(e^{i\omega})|^2} f_\epsilon(\omega) = \frac{1}{|A(e^{i\omega})|^2}\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}$$

(c) On a par ailleurs

$$Y = (\mathbb{1} - L)M + (\mathbb{1} - L)S = U + (\mathbb{1} - L)B(L)V$$

Or à supposer que U et V sont décorrélés il en va de même pour U et $(\mathbb{1} - L)B(L)V$, donc pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_{U+(1-L)B(L)V}(h) = \gamma_U(h) + \gamma_{(1-L)B(L)V}(h)$$

[2] η est un bruit blanc de variance σ_η^2 *ssi* $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $f_\eta(\omega) = \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$.
L'implication découle de ce que $f_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_\eta(h)e^{i\omega h} = \frac{\gamma_\eta(0)}{2\pi}$, et la réciproque de ce que $\mathbb{C}ov(\eta_t, \eta_{t-h}) = \frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,+\pi[} f_\eta(\omega)e^{-i\omega h}d\omega = \mathbb{1}_{h=0}f_\eta(0)$ (par symétrie de l'intégrale sur $]-\pi, 0$ et $]0, \pi[$).

de sorte que

$$\begin{aligned}
f_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_{U+(1-L)B(L)V}(h)e^{+i\omega h} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_U(h)e^{+i\omega h} + \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_{(1-L)B(L)V}(h)e^{+i\omega h} \\
&= f_U(\omega) + f_{(1-L)B(L)V}(\omega) \\
&= \frac{\sigma_U^2}{2\pi} + \left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\frac{\sigma_V^2}{2\pi}
\end{aligned}$$

(d) Soit donc ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \phi(\omega) = \frac{1}{\left|A\left(e^{i\omega}\right)\right|^2}\sigma_\epsilon^2 = \sigma_U^2 + \left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\sigma_V^2$$

Alors pour ce qui concerne la deuxième égalité

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 \geq 0$$

et donc

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \phi(\omega)\geq\phi(0)$$

Or par ailleurs $\phi(0) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$ et donc

$$\forall\omega\in\mathbb{R}, \frac{1}{\left|A\left(e^{i\omega}\right)\right|^2} \geq \frac{1}{|A(1)|^2}$$

Considérons alors le cas où $A(\mathbb{X}) = 1-\rho\mathbb{X}$ où $\rho>0$: on a

$$|A(-1)|^2 = |1+\rho|^2 = 1+2\rho+\rho^2 > 1-2\rho+\rho^2 = |A(1)|^2$$

ce qui contredit le résultat précédent, de sorte que U et V ne peuvent **pas** être décorrélés. Ceci reste vrai plus généralement si $\rho\in\mathbb{C}$ avec $\Re(\rho)>0$: notant $\rho = a+ib$ il vient

$$\left|A\left(\frac{\overline{\rho}}{|\rho|}\right)\right|^2 = \left|1-\rho\frac{\overline{\rho}}{|\rho|}\right|^2 = |1+|\rho||^2 = 1+2\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2 > a^2+b^2+1-2a = |A(1)|^2$$

puis de façon plus générale si A est un polynôme quelconque (sous forme canonique) dont les racines sont toutes de partie réelle positive.

Ainsi, il n'est pas toujours possible de décomposer un processus MA intégré en somme d'une marche aléatoire et d'une tendance dont les bruits blancs associés sont décorrélés. En revanche la décomposition de BEVERIDGE-NELSON est toujours possible (sous réserve que $A'(\mathbb{X})$ soit convergente).

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 (a) Les revenus de l'agent entre les dates t et $t+1$ sont les revenus du capital rk_t et du travail w_t, le seul emploi étant la consommation C_t entre ces dates. Le flux net de revenu est donc la variation du capital entre les deux dates, soit

$$\boxed{k_{t+1} - k_t = (rk_t + w_t) - C_t}$$

(b) Compte-tenu des informations $\mathcal{I}_t$ en sa possession à la date t un agent rationnel cherche à maximiser son utilité intertemporelle espérée (car il est neutre au risque) $\mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1},\right)\right)$ par un choix judicieux de consommations futures, sans néanmoins violer sa contrainte budgétaire **à aucune date future** (il n'a pas accès au crédit).

(c) Le Lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(C_t, C_{t+1}, \ldots, k_t, k_{t+1}, \ldots, \lambda_0, \lambda_1, \ldots\right) &= \mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) \middle| \mathcal{I}_t\right) \\ &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \lambda_h \left(k_{t+h+1} - (1+r)\, k_{t+h} - w_{t+h} + C_{t+h}\right)\end{aligned}$$

On a pour tout $h \geq 1$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+h}} = \frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}} + \lambda_h$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+h+1}} = (1+r)\lambda_{h+1} - \lambda_h$.
Une condition nécessaire du premier ordre est donc que

$$\frac{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h+1}}}{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}}} = \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = \frac{1}{1+r}$$

(d) L'utilité attendue à la date t d'un choix de consommation futur $C_t, C_{t+1}, \ldots$ est [3]

$$\boxed{U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) = \delta \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\delta)^h} u\left(C_{t+h}\right)}$$

(e) u étant quadratique, $u'(x)$ est proportionnel à x ; comme par ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \mathbb{E}\left(u(x)|\mathcal{I}_t\right)\right) = \left(x \mapsto \frac{\partial \mathbb{E}\left(u(x)|\mathcal{I}_t\right)}{\partial x}\right)$$

il vient pour $h \geq 0$

$$\frac{\frac{1}{(1+\delta)^{h+1}} C_{t+h+1}}{\frac{1}{(1+\delta)^h} C_{t+h}} = \frac{1}{1+r}$$

c'est-à-dire comme $\delta = r$

$$\boxed{\forall h \geq 0,\ C_{t+h}^{*t} = C_t^{*t}}$$

[3] le cœfficient δ sert à normaliser $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\delta)^h} = \frac{1}{\delta}$. De tout façon puisqu'une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern est définie à une transformation affine positive près, cela ne change rien à la suite.

(f) On a successivement pour $H \geq 1$

$$\begin{array}{rcccccccl}
C_t & = & W_t & + & (1+r)k_t & - & k_{t+1} & & \\
C_{t+1} & = & W_{t+1} & + & (1+r)k_{t+1} & - & k_{t+2} & & \times \frac{1}{1+r} \\
& \vdots & & & & & & & \vdots \\
C_{t+H} & = & W_{t+H} & + & (1+r)k_{t+H} & - & k_{t+H+1} & & \times \frac{1}{(1+r)^H} \\
\hline
\text{donc} \quad \sum_{h=0}^{H} \frac{C_{t+h}}{(1+r)^h} & = & \sum_{h=0}^{H} \frac{W_{t+h}}{(1+r)^h} & + & (1+r)k_t & - & k_{t+H+1} & &
\end{array}$$

(g) En l'absence de cavalerie il vient

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{C_{t+h}^{*t}}{(1+r)^h} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^h} + (1+r)k_t$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^h} + (1+r)k_t$$

soit

$$C_t^{*t} = rk_t + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^{h+1}}$$

et donc finalement, comme $k_{t+1} = (1+r)k_t + W_t - C_t^{*t}$

$$\boxed{C_{t+1}^{*t+1} - C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)\right)}$$

☞ Q2 (a) Δ étant supposé sous forme canonique, ses racines sont toutes de module strictement supérieur à un et donc (voir TD 2, exercice 1) il admet une inverse sous la forme $\Delta(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k$.

Soit alors $A(\mathbb{X}) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k\right) \Theta(\mathbb{X})$: A est absolument convergente car Θ est de degré fini ; en outre $W = \Delta(L)^{-1}\Theta(L)\epsilon = A(L)\epsilon$ et la série $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k\right) \Theta(\mathbb{X})$ est absolument convergente.

De façon similaire Θ est inversible et en notant $\Delta(\mathbb{X})\Theta(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \mathbb{X}^k$ il vient pour $t \in \mathbb{Z}$ $W_t = -\sum_{k\geq 1} \beta_k W_{t-k} + \epsilon_t$ et donc ϵ est l'innovation de W.

(b) Notons $A(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$.

On a tout d'abord pour $h \geq 0$

$$W_{t+h+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right) = \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}}$$

De façon similaire on a

$$\boxed{\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) = \sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}}$$

(c) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} C_{t+1} - C_t &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}\right) - \left(\sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}\right)\right) \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+h} \epsilon_{t+1-k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+h} \epsilon_{t+1-k}\right)\right) \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} a_h \epsilon_{t+1} \\ &= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r a_h}{(1+r)^{h+1}}\right) \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

et donc C est une marche aléatoire, qui plus est associée au bruit blanc $L^{-1}\epsilon$.

☞ Q3 (a) Posons $A(\mathbb{X}) = \Delta(\mathbb{X})^{-1}\Theta(\mathbb{X})$ (développée en série absolument convergente) et ψ : $(t \mapsto \Delta(L)^{-1}\phi(t))$: il vient

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ W_t = \psi(t) + A(L) \circ \epsilon_t$$

En outre ϵ est l'innovation de A.
Par ailleurs on a pour $h \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right) = \psi(t+h+1) + \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \\ \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) = \psi(t+h+1) + \sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \end{array} \right.$$

(b) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} C_{t+1} - C_t &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\psi(t+1) + \sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}\right) - \left(\psi(t+1) + \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}\right)\right) \\ &= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r a_h}{(1+r)^{h+1}}\right) \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

et donc C est une marche aléatoire, encore associée au bruit blanc $L^{-1}\epsilon$.

☞ Q4 (a) Montrons tout d'abord par récurrence sur $d \geq 1$ que

$$u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l} \left(\mathbb{1} - L\right)^l u_0 + \sum_{1 \leq i_d \leq \cdots \leq i_1 \leq n} v_{i_d}$$

– Lorsque $d=1$ on a immédiatement (avec la convention $\mathcal{C}_n^0=1$)

$$u_n - u_{n-1} = v_n \ \rightarrow \ u_n = u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}$$

– Soit alors $d \geq 2$ tel que la formule soit vérifiée lorsque $(\mathbb{1}-L)^{d-1}u_n = v_n$.
Alors en appliquant le résultat pour $d=1$ à $\left((\mathbb{1}-L)^{d-1}u_n\right)$ il vient

$$(\mathbb{1}-L)^{d-1}u_n = (\mathbb{1}-L)^{d-1}u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}$$

donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à u et $\left((\mathbb{1}-L)^{d-1}u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ il vient

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l}(\mathbb{1}-L)^l u_0 + \sum_{1\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} \left((\mathbb{1}-L)^{d-1}u_0 + \sum_{i_d=1}^{i_{d-1}} v_{i_d} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l}(\mathbb{1}-L)^l u_0 + \sum_{1\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} (\mathbb{1}-L)^{d-1}u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} \\
&= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l}(\mathbb{1}-L)^l u_0 + \left(\sum_{1\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} 1 \right) (\mathbb{1}-L)^{d-1}u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d}
\end{aligned}$$

Or pour $p, q \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i_p\leq\cdots\leq i_1\leq q} 1 &= |\{(a_1,\ldots,a_p)/1\leq a_1\leq\cdots\leq a_p\leq q\}| \\
&= |\{(a_1,a_2+1,\ldots,a_p+p-1)/1\leq a_1\leq\cdots\leq a_p\leq q\}| \\
&= |\{(b_1,\ldots,b_p)/1\leq b_1<\cdots<b_p\leq q+p-1\}| \\
&= \mathcal{C}_{q+p-1}^{p}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l}(\mathbb{1}-L)^l u_0 + \mathcal{C}_{n+d-1}^{d-1}(\mathbb{1}-L)^{d-1}u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} \\
&= \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l}(\mathbb{1}-L)^l u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
Enfin, comme

$$\sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} = \sum_{i_d=1}^{n} \left(\sum_{i_d\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} 1 \right) v_{i_d} = \mathcal{C}_n^{d-1} \sum_{i_d=1}^{n} v_{i_d}$$

il vient

$$\boxed{u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 \; + \; \mathcal{C}_n^{d-1} \sum_{i=1}^{n} v_i}$$

(b) Soit $A(\mathbb{X}) = \Delta(\mathbb{X})^{-1}\Theta(\mathbb{X})$; alors

$$\forall t \in \mathbb{Z},\; (\mathbb{1} - L)^d W_{t+h} = \psi(t) + A(L)\epsilon_{t+h}$$

Donc d'après le résultat précédent pour tout $h \geq 0$

$$\forall t \in \mathbb{Z},\; W_{t+h+1} \;=\; \sum_{l=1}^{d-1} \mathcal{C}_{h+l}^{l-1} (\mathbb{1} - L)^l W_t \; + \; \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=1}^{h+1} \left(\psi(t+l) \; + \; A(L)\epsilon_{t+l}\right)$$

Or

$$(1 - \mathbb{X})^l \;=\; \sum_{k=0}^{l} C_l^k (-1)^{l-k}\, \mathbb{X}^k$$

donc pour $h \geq 0$ et $t \in \mathbb{Z}$ (avec la convention $\mathcal{C}_{\cdot}^{-1} = 0$)

$$W_{t+h+1} = \sum_{0 \leq k \leq l \leq d-1} \mathcal{C}_{h+l}^{l-1} \mathcal{C}_l^k (-1)^{l+k} W_{t-k} \; + \; \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} \left(\psi(t+l) \; + \; A(L)\epsilon_{t+l}\right)$$

Or pour $0 \leq k \leq l \leq d-1$ on a

$$\mathbb{E}\left(W_{t-k} | \mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t-k} | \mathcal{I}_t\right) = W_{t-k} - W_{t-k} = 0$$

Donc en notant $A(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_t\right) \\
= \;& \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} \,\middle|\, \mathcal{I}_{t+1} \right) - \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} \,\middle|\, \mathcal{I}_t \right) \right) \\
= \;& \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} \left(\sum_{k=l}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} - \sum_{k=l+1}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} \right) \\
= \;& \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned}
C_{t+1} - C_t \;&=\; \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1} \right) \\
&=\; \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\boxed{C \text{ est une marche aléatoire, associée au bruit blanc } L^{-1}\epsilon}$$

Ainsi, aussi général que soit le modèle linéaire régissant les revenus du travail, la consommation reste une marche aléatoire ; la seule hypothèse forte est de nature économique, et postule que la fonction d'utilité instantanée est quadratique.

⋆

⋆ ⋆