



Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Énoncé des travaux dirigés n°4

Guillaume Lacôte

Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Version du 20050121-11h02, révisée le 4 février 2005

Énoncé de l'exercice 1

L'objet de cet exercice est de présenter la méthode de BEVERIDGE-NELSON pour représenter tout processus même intégré comme somme d'une marche aléatoire et d'une composante cyclique (stationnaire).

☞ Q1 On considère un processus auto-régressif intégré X vérifiant

$$(\mathbf{1} - L)A(L)X = \epsilon$$

où A est un polynôme sans racine de module un et ϵ un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

(a) Montrer que quitte à substituer à ϵ un bruit blanc η de variance plus faible, on peut supposer (ce que l'on fera par la suite) que toutes les racines de A sont de module strictement supérieur à un.

En déduire que $A(\mathbb{X})$ admet pour inverse une série absolument convergente $A(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$.

(b) On suppose désormais que la série $\frac{\partial}{\partial x} \left(x \mapsto \frac{1}{A(x)} \right)$ est absolument convergente.¹

Montrer qu'il existe une série convergente (de rayon au moins 1) \bar{A} telle que

$$A(\mathbb{X})^{-1} = \frac{1}{A(1)} + (1 - \mathbb{X})\bar{A}(\mathbb{X})$$

Calculer son terme général.

(c) Montrer qu'il existe deux processus T et C tels que

$$X = T + C$$

et où T est une marche aléatoire vérifiant $(\mathbf{1} - L)T = \frac{1}{A(1)}\epsilon$ et où C est stationnaire.

(d) T et C sont-ils corrélés ?

☞ Q2 On se donne une autre décomposition de X

$$\begin{cases} X = M + S \\ (\mathbf{1} - L)M = U \\ S = B(L)V \end{cases}$$

où B est un polynôme dont toutes les racines sont de module strictement supérieur à 1 et U et V sont deux bruits blancs (pas nécessairement décorrélés) de variances σ_U^2 et σ_V^2 .

(a) Montrer que $\frac{1}{t} \mathbb{V}(X_t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.

Montrer que $\sigma_U^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.

(b) Soit $Y = (\mathbf{1} - L)X$.

Exprimer Y en fonction de ϵ et en déduire l'expression de f_Y .

¹i.e. de rayon de convergence au moins 1 et absolument convergente en $x = 1$.

- (c) Exprimer alors Y en fonction de U et V .
En supposant que U et V sont décorrélés, en déduire l'expression de f_Y en fonction de σ_U^2 et σ_V^2 .
- (d) Déduire de l'étude de f_Y au voisinage de 0 que pour certains polynômes $A(\mathbb{X})$, U et V ne peuvent **pas** être décorrélés (on pourra par exemple considérer le cas où $A(\mathbb{X}) = 1 - \rho\mathbb{X}$ où $\rho > 0$).

Enoncé de l'exercice 2

En 1978 Robert E. Hall propose et fonde empiriquement dans "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence" un modèle selon lequel la consommation des ménages suit ... une marche aléatoire! L'objet de cet exercice est de présenter très brièvement ce résultat.

☞ Q1 On considère un agent dont l'utilité $u(\cdot)$ à chaque date t dépend uniquement de sa consommation c_t . Ses sources de revenus sont le travail, qui lui rapporte w_t entre les dates t et $t + 1$, et le capital, qui lui rapporte rk_t où r désigne le taux d'intérêt réel du marché (supposé constant) et k_t le stock de capital accumulé à la date t .

- (a) Montrer que la contrainte budgétaire de l'agent à chaque date $t \in \mathbb{Z}$ s'écrit

$$k_{t+1} - k_t = (rk_t + w_t) - C_t$$

- (b) On suppose que les revenus du travail à la date $t+h$ sont inconnus à la date t , et modélisés par la variable aléatoire W_{t+h} ; on note \mathcal{I}_t l'ensemble d'information de l'agent disponible à la date t .

Montrer que le choix à la date t du processus de la consommation future de l'agent est déterminé par le programme de maximisation

$$\left| \begin{array}{l} \max_{C_t, C_{t+1}, \dots} \mathbb{E}(U(C_t, C_{t+1}, \dots) | \mathcal{I}_t) \\ \text{s.c. } \{ \forall h \geq 0, k_{t+h+1} = ((1+r)k_{t+h} + w_{t+h}) - C_{t+h} \} \end{array} \right.$$

- (c) Ecrire le lagrangien associé et en déduire les équations d'Euler

$$\forall h \geq 1, \frac{\frac{\partial \mathbb{E}(U | \mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}}}{\frac{\partial \mathbb{E}(U | \mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h-1}}} = \frac{1}{1+r}$$

- (d) On suppose que l'agent a une préférence pour le présent de $\delta \geq 0$.
Donner l'utilité intertemporelle $U(C_t, C_{t+1}, \dots)$ tirée du processus de consommation (C_t, C_{t+1}, \dots) .

- (e) En supposant que l'utilité $u(\cdot)$ de l'agent est quadratique et que $\delta = r$ montrer que le profil de consommation future **anticipé à la date** t est constant : $\forall h \geq 0, C_{t+h}^{*t} = C_t^{*t}$
- (f) Montrer que pour tout $H \geq 0$

$$\sum_{h=0}^H \frac{C_{t+h}^{*t}}{(1+r)^h} = (1+r)k_t + \sum_{h=0}^H \frac{W_{t+h}}{(1+r)^h} - \frac{1}{(1+r)^H} k_{t+H+1}$$

- (g) En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de cavalerie (*i.e.* $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{k_{t+h+1}}{(1+r)^h} = 0$) montrer finalement que

$$C_{t+1}^{*t+1} - C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} (\mathbb{E}(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_{t+1}) - \mathbb{E}(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_t))$$

☞ Q2 On suppose tout d'abord que les salaires futurs suivent un processus ARMA de la forme

$$\Delta(L)W = \Theta(L)\epsilon$$

où Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc. On suppose en outre qu'à toute date t , \mathcal{I}_t contient $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \dots$

- (a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A telle que $W = A(L)\epsilon$ et que ϵ est l'innovation de W .
- (b) Calculer $\mathbb{E}(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_t)$ et $\mathbb{E}(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_{t+1})$ pour $h \geq 0$.
- (c) En déduire que C est une marche aléatoire.

☞ Q3 On suppose cette fois que les salaires futurs suivent un ARMA autour d'une tendance déterministe, de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

où ϕ est \mathcal{C}^∞ , Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc.

- (a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A et une fonction ψ telles que $W = \psi(t) + A(L)\epsilon$, et calculer $\mathbb{E}(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_t)$ et $\mathbb{E}(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_{t+1})$ pour $h \geq 0$.
- (b) Montrer que C est une marche aléatoire.

☞ Q4 On suppose enfin que les salaires suivent un processus ARIMA autour d'une tendance déterministe,² de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z}, (\mathbb{1} - L)^d \Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

avec les mêmes hypothèses sur Δ , Θ , ϕ et ϵ , et avec $d \geq 1$.

- (a) Montrer que si deux suites réelles u et v vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathbb{1} - L)^d u_n = v_n$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{l=0}^{d-1} C_{n+l}^l (\mathbb{1} - L)^l u_0 + C_n^{d-1} \sum_{i=1}^n v_i$$

- (b) En déduire que C est une marche aléatoire; à quel bruit blanc est-elle associée?

²La théorie macro-économique suggère en effet que le PIB est en effet intégré d'ordre 1, et que la croissance des salaires suit celle du PIB.