Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Enoncé des travaux dirigés n°4

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 4 février 2005

Enoncé de l'exercice 1

L'objet de cet exercice est de présenter la méthode de BEVERIDGE-NELSON pour représenter tout processus même intégré comme somme d'une marche aléatoire et d'une composante cyclique (stationnaire).

☞ Q1 On considère un processus auto-régressif intégré X vérifiant

$$(\mathbb{1} - L)A(L)X = \epsilon$$

où A est un polynôme sans racine de module un et ϵ un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

(a) Montrer que quitte à substituer à ϵ un bruit blanc η de variance plus faible, on peut supposer (ce que l'on fera par la suite) que toutes les racines de A sont de module strictement supérieur à un.
En déduire que $A(\mathbb{X})$ admet pour inverse une série absolument convergente $A(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$.

(b) On suppose désormais que la série $\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \frac{1}{A(x)}\right)$ est absolument convergente. [1]
Montrer qu'il existe une série convergente (de rayon au moins 1) $\overline{A}$ telle que

$$A(\mathbb{X})^{-1} = \frac{1}{A(1)} + (1 - \mathbb{X})\overline{A}(\mathbb{X})$$

Calculer son terme général.

(c) Montrer qu'il existe deux processus T et C tels que

$$X = T + C$$

et où T est une marche aléatoire vérifiant $(\mathbb{1} - L)T = \frac{1}{A(1)}\epsilon$ et où C est stationnaire.

(d) T et C sont-ils corrélés ?

☞ Q2 On se donne un autre décomposition de X

$$\begin{cases} X = & M + S \\ (\mathbb{1} - L)M = & U \\ S = & B(L)V \end{cases}$$

où B est un polynôme dont toutes les racines sont de module strictement supérieur à 1 et U et V sont deux bruits blancs (pas nécessairement décorrélés) de variances σ_U^2 et σ_V^2.

(a) Montrer que $\frac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.
Montrer que $\sigma_U^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.

(b) Soit $Y = (\mathbb{1} - L)X$.
Exprimer Y en fonction de ϵ et en déduire l'expression de f_Y.

[1] *i.e.* de rayon de convergence au moins 1 et absolument convergente en $x = 1$.

(c) Exprimer alors Y en fonction de U et V.
En supposant que U et V sont décorrélés, en déduire l'expression de f_Y en fonctionde σ_U^2 et σ_V^2.

(d) Déduire de l'étude de f_Y au voisinage de 0 que pour certains polynômes $A(\mathbb{X})$, U et V ne peuvent **pas** être décorrélés (on pourra par exemple considérer le cas où $A(\mathbb{X}) = 1 - \rho\mathbb{X}$ où $\rho > 0$).

Enoncé de l'exercice 2

En 1978 Robert E. Hall propose et fonde empiriquement dans "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence" un modèle selon lequel la consommation des ménages suit ...une marche aléatoire ! L'objet de cet exercice est de présenter très brièvement ce résultat.

☞ Q1 On considère un agent dont l'utilité $u(\cdot)$ à chaque date t dépend uniquement de sa consommation c_t. Ses sources de revenus sont le travail, qui lui rapporte w_t entre les dates t et $t+1$, et le capital, qui lui rapporte rk_t où r désigne le taux d'intérêt réel du marché (supposé constant) et k_t le stock de capital accumulé à la date t.

(a) Montrer que la contrainte budgétaire de l'agent à chaque date $t \in \mathbb{Z}$ s'écrit

$$k_{t+1} - k_t = (rk_t + w_t) - C_t$$

(b) On suppose que les revenus du travail à la date $t+h$ sont inconnus à la date t, et modélisés par la variable aléatoire W_{t+h} ; on note $\mathcal{I}_t$ l'ensemble d'information de l'agent disponible à la date t.
Montrer que le choix *à la date* t du processus de la consommation future de l'agent est déterminé par le programme de maximisation

$$\left| \begin{array}{l} \max_{C_t, C_{t+1}, \ldots} \mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) \middle| \mathcal{I}_t\right) \\ \text{s.c. } \left\{ \ \forall h \geq 0,\ k_{t+h+1} = \left((1+r)\, k_{t+h} + w_{t+h}\right) - C_{t+h} \right. \end{array} \right.$$

(c) Ecrire le lagrangien associé et en déduire les équations d'Euler

$$\forall h \geq 1,\ \frac{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}}}{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h-1}}} = \frac{1}{1+r}$$

(d) On suppose que l'agent a une préférence pour le présent de $\delta \geq 0$.
Donner l'utilité intertemporelle $U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right)$ tirée du processus de consommation $(C_t, C_{t+1}, \ldots)$.

(e) En supposant que l'utilité $u(\cdot)$ de l'agent est quadratique et que $\delta = r$ montrer que le profil de consommation future **anticipé à la date** t est constant : $\forall h \geq 0$, $C^{*t}_{t+h} = C^{*t}_t$

(f) Montrer que pour tout $H \geq 0$

$$\sum_{h=0}^{H} \frac{C^{*t}_{t+h}}{(1+r)^h} = (1+r)k_t + \sum_{h=0}^{H} \frac{W_{t+h}}{(1+r)^h} - \frac{1}{(1+r)^H} k_{t+H+1}$$

(g) En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de cavalerie ($i.e.$ $\lim_{h\infty} \frac{k_{t+h+1}}{(1+r)^h} = 0$) montrer finalement que

$$C^{*t+1}_{t+1} - C^{*t}_t = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)\right)$$

☞ Q2 On suppose tout d'abord que les salaires futurs suivent un processus ARMA de la forme

$$\Delta(L)W = \Theta(L)\epsilon$$

où Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc. On suppose en outre qu'à toute date t, $\mathcal{I}_t$ contient $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots$

(a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A telle que $W = A(L)\epsilon$ et que ϵ est l'innovation de W.

(b) Calculer $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)$ et $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right)$ pour $h \geq 0$.

(c) En déduire que C est une marche aléatoire.

☞ Q3 On suppose cette fois que les salaires futurs suivent un ARMA autour d'une tendance déterministe, de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

où ϕ est $\mathcal{C}^\infty$, Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc.

(a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A et une fonction ψ telles que $W = \psi(t) + A(L)\epsilon$, et calculer $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)$ et $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right)$ pour $h \geq 0$.

(b) Montrer que C est une marche aléatoire.

☞ Q4 On suppose enfin que les salaires suivent un processus ARIMA autour d'une tendance déterministe,[2] de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ (\mathbb{1} - L)^d \Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

avec les mêmes hypothèses sur Δ, Θ, ϕ et ϵ, et avec $d \geq 1$.

(a) Montrer que si deux suites réelles u et v vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathbb{1} - L)^d u_n = v_n$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}^l_{n+l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 + \mathcal{C}^{d-1}_n \sum_{i=1}^{n} v_i$$

(b) En déduire que C est une marche aléatoire ; à quel bruit blanc est-elle associée ?

---

[2] La théorie macro-économique suggère en effet que le PIB est en effet intégré d'ordre 1, et que la croissance des salaires suit celle du PIB.