ECOLE NATIONALE
DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Réponses question par question des travaux dirigés n°4

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 4 février 2005

Exercice corrigé 1

L'objet de cet exercice est de présenter la méthode de BEVERIDGE-NELSON pour représenter tout processus même intégré comme somme d'une marche aléatoire et d'une composante cyclique (stationnaire).

☞ Q1 On considère un processus auto-régressif intégré X vérifiant

$$(\mathbb{1} - L)A(L)X = \epsilon$$

où A est un polynôme sans racine de module un et ϵ un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

(a) Montrer que quitte à substituer à ϵ un bruit blanc η de variance plus faible, on peut supposer (ce que l'on fera par la suite) que toutes les racines de A sont de module strictement supérieur à un.
En déduire que $A(\mathbb{X})$ admet pour inverse une série absolument convergente $A(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$.

Le monôme $1 - \lambda\mathbb{X}$ étant inversible *ssi* $|\lambda| < 1$, posons

$$A^*(\mathbb{X}) = \left(\Pi_{|\lambda_i|<1}\left(1 - \lambda_i\mathbb{X}\right)\right)\left(\Pi_{|\lambda_i|>1}\left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\mathbb{X}\right)\right)$$

où $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ désignent les racines A.
Ainsi $A^*(L)$ est inversible.
Soit $\eta = (\mathbb{1} - L)A^*(L)X$; alors (voir TD 2, exercice 1) η est un bruit blanc, de variance $\frac{\sigma_\epsilon^2}{\Pi_{|\lambda_i|>1}\lambda_i^2}$.
On peut donc supposer sans perte de généralité, quitte à substituer A^* à A et η à ϵ, que toutes les racines de A sont de module strictement supérieur à un.
Dans ces conditions, notant $A(\mathbb{X}) = (1 - \lambda_1\mathbb{X}) \cdots (1 - \lambda_n\mathbb{X})$ il vient

$$\frac{1}{A(\mathbb{X})} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_1^k \mathbb{X}^k\right) \cdots \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_n^k \mathbb{X}^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$$

avec $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_n^{i_n}$.

(b) On suppose désormais que la série $\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \frac{1}{A(x)}\right)$ est absolument convergente. [a]
Montrer qu'il existe une série convergente (de rayon au moins 1) $\overline{A}$ telle que

$$A(\mathbb{X})^{-1} = \frac{1}{A(1)} + (1 - \mathbb{X})\overline{A}(\mathbb{X})$$

Calculer son terme général.

[a] *i.e.* de rayon de convergence au moins 1 et absolument convergente en $x = 1$.

On a

$$\frac{1}{A(\mathbb{X})} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$$

Or pour $M \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M} a_k \mathbb{X}^k &= \left(\sum_{k=0}^{M} a_k\right) + \sum_{k=0}^{M} a_k \left(\mathbb{X}^k - 1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{M} a_k 1^k + a_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{M} a_k (\mathbb{X}-1)\left(1+\mathbb{X}+\cdots+\mathbb{X}^{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{M} a_k 1^k - (1-\mathbb{X}) \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{k-1} a_k \mathbb{X}^j \\
&= \sum_{k=0}^{M} a_k 1^k - (1-\mathbb{X}) \sum_{j=0}^{M-1}\left(\sum_{k=j+1}^{M} a_k\right)\mathbb{X}^j
\end{aligned}$$

Par ailleurs A est convergente donc $\sum_{k=j+1}^{M} a_k$ admet une limite finie lorsque $M \to +\infty$, et on pose pour $j \in \mathbb{N}$

$$\boxed{b_j = -\sum_{k=j+1}^{+\infty} a_k}$$

Notons $b_j^N = -\sum_{k=j+1}^{N} a_k$; alors pour tous $M \in \mathbb{N}$ et $N \geq M+2$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{M} |b_j^N| &= \sum_{j=0}^{M}\left|\sum_{k=j+1}^{N} a_k\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{M}\sum_{k=j+1}^{N} |a_k| \\
&= \sum_{0\leq j<k\leq M+1} |a_k| + \sum_{\substack{M+2\leq k\leq N \\ 0\leq j<k}} |a_k| \\
&= \sum_{k=0}^{M+1} k|a_k| + \sum_{k=M+2}^{N} k|a_k| \\
&= \sum_{k=0}^{N} k|a_k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k| \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \frac{1}{A(x)}\right) = \sum_{k} k a_k \mathbb{X}^k \text{ est absolument convergente.}
\end{aligned}$$

donc à la limite lorsque $N \to +\infty$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{M} |b_j| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k|$$

de sorte que la série $\sum_j b_j \mathbb{X}^j$ est convergente de rayon au moins 1.

On pose donc $\overline{A}(\mathbb{X}) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \mathbb{X}^j$; alors par construction comme $\sum_{k=0}^{M} a_k \xrightarrow[M\infty]{} \frac{1}{A(1)}$ on a

$$\boxed{A(\mathbb{X})^{-1} = \tfrac{1}{A(1)} + (1 - \mathbb{X})\overline{A}(\mathbb{X})}$$

(c) Montrer qu'il existe deux processus T et C tels que

$$X = T + C$$

et où T est une marche aléatoire vérifiant $(\mathbb{1} - L)T = \frac{1}{A(1)}\epsilon$ et où C est stationnaire.

Soit T la marche aléatoire d'origine 0 et vérifiant $\forall t \in \mathbb{Z}, T_t - T_{t-1} = \frac{1}{A(1)}\epsilon_t$, et notons $C = X - T$. Alors

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} - L)C &= (\mathbb{1} - L) \circ (X - T) \\
&= A(L)^{-1}\epsilon - (\mathbb{1} - L)T \\
&= \left(\frac{1}{A(1)} + (\mathbb{1} - L)\overline{A}(L)\right)\epsilon - (\mathbb{1} - L)T \\
&= (\mathbb{1} - L)\overline{A}(L)\epsilon
\end{aligned}$$

En particulier, il existe un variable fixe Z telle que $\forall t \in \mathbb{Z}$, $C_t = \overline{A}(L)\epsilon_t + Z$, et donc C est stationnaire. [1]

(d) T et C sont-ils corrélés ?

On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$T_t = \tfrac{1}{A(1)}(\epsilon_t + \cdots + \epsilon_{T-N}) + T_{t-N-1}$$
$$C_t = \alpha_0\epsilon_t + \alpha_1\epsilon_{t-1} + \cdots$$

Or $T_t \perp\!\!\!\perp \epsilon_{t+h}$ pour $h \geq 1$ et donc pour tout $N \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\,(T_t, C_t) &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{A(1)} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \sigma_\epsilon^2 + \frac{1}{A(1)} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{C}ov\,(\epsilon_{t-k}, Z) \\ +\mathbb{C}ov\left(T_{t-N-1}, \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \epsilon_{t-k}\right) + \mathbb{C}ov\,(T_{t-N-1}, Z) \end{array} \right. \\
&= \frac{\alpha_0 + \cdots + \alpha_N}{A(1)}\sigma_\epsilon^2 + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{C}ov\,(T_{t-N-1}, \epsilon_{t-k})
\end{aligned}$$

[1] On ne peut **pas** choisir Z qui est entièrement déterminée par la définition de $C = X - T$; en revanche on peut supposer que Z est décorrélée de tous les ϵ_t.

donc finalement

$$\boxed{\mathbb{C}ov\left(T_t, C_t\right) = \frac{1}{A(1)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\right)\sigma_\epsilon^2}$$

En particulier T et C sont corrélés à toutes dates sauf bien-sûr si $A(\mathbb{X}) = (1)$.

☞ Q2 On se donne un autre décomposition de X

$$\begin{cases} X = & M + S \\ (\mathbb{1} - L)M = & U \\ S = & B(L)V \end{cases}$$

où B est un polynôme dont toutes les racines sont de module strictement supérieur à 1 et U et V sont deux bruits blancs (pas nécessairement décorrélés) de variances σ_U^2 et σ_V^2.

(a) Montrer que $\frac{1}{t}\mathbb{V}\left(X_t\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.
Montrer que $\sigma_U^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.

On a pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(M_t\right) &= \mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right) + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ &= t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

donc par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & t\sigma_U^2 - \sqrt{\mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \sqrt{\mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & t\sigma_U^2 - \underbrace{\sqrt{\mathbb{V}\left(t\sigma_U^2\right)}}_{\underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t\sigma_U^2}} \sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \underbrace{\sqrt{\mathbb{V}\left(t\sigma_U^2\right)}}_{\underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t\sigma_U^2}} \sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{V}\left(M_t\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} t\sigma_U^2$$

Or $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(M_t) + 2\mathbb{C}ov(M_t, S_t) + \mathbb{V}(S_t)$ et donc

$$\mathbb{V}(M_t) - 2\sqrt{\mathbb{V}(M_t)}\sqrt{\mathbb{V}(S_t)} + \mathbb{V}(S_t) \le \mathbb{V}(X_t) \le \mathbb{V}(M_t) + 2\sqrt{\mathbb{V}(M_t)}\sqrt{\mathbb{V}(S_t)} + \mathbb{V}(S_t)$$

et comme S est stationnaire (donc de variance $\mathbb{V}(S_t)$ indépendante de t)

$$\mathbb{V}(X_t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \mathbb{V}(M_t)$$

En particulier

$$\boxed{\frac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sigma_U^2 > 0}$$

Or $X = T + C$ où T est une marche aléatoire associée à $\eta = \frac{1}{A(1)}\epsilon$ et C stationnaire, donc de façon similaire

$$\frac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{A(1)^2}\sigma_\epsilon^2$$

En particulier

$$\boxed{\sigma_U^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}}$$

Ainsi, quelle que soit la décomposition retenue la marche aléatoire est associée à un bruit blanc de variance $\frac{1}{A(1)^2}\sigma_\epsilon^2$.

(b) Soit $Y = (\mathbb{1} - L)X$.
Exprimer Y en fonction de ϵ et en déduire l'expression de f_Y.

On a immédiatement $Y = (\mathbb{1} - L)X = A(L)^{-1}\epsilon$ et donc [2]

$$f_Y(\omega) = \frac{1}{|A(e^{i\omega})|^2} f_\epsilon(\omega) = \frac{1}{|A(e^{i\omega})|^2}\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}$$

(c) Exprimer alors Y en fonction de U et V.
En supposant que U et V sont décorrélés, en déduire l'expression de f_Y en fonctionde σ_U^2 et σ_V^2.

On a par ailleurs

$$Y = (\mathbb{1} - L)M + (\mathbb{1} - L)S = U + (\mathbb{1} - L)B(L)V$$

[2] η est un bruit blanc de variance σ_η^2 *ssi* $\forall\omega \in \mathbb{R}$, $f_\eta(\omega) = \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$.
L'implication découle de ce que $f_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_\eta(h)e^{i\omega h} = \frac{\gamma_\eta(0)}{2\pi}$, et la réciproque de ce que $\mathbb{C}ov(\eta_t, \eta_{t-h}) = \frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,+\pi[} f_\eta(\omega)e^{-i\omega h}d\omega = \mathbb{1}_{h=0}f_\eta(0)$ (par symétrie de l'intégrale sur $]-\pi, 0$ et $]0, \pi[$).

Or à supposer que U et V sont décorrélés il en va de même pour U et $(1\!\!1 - L)B(L)V$, donc pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_{U+(1-L)B(L)V}(h) = \gamma_U(h) + \gamma_{(1-L)B(L)V}(h)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_{U+(1-L)B(L)V}(h)e^{+i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_U(h)e^{+i\omega h} + \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_{(1-L)B(L)V}(h)e^{+i\omega h} \\ &= f_U(\omega) + f_{(1-L)B(L)V}(\omega) \\ &= \frac{\sigma_U^2}{2\pi} + \left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\frac{\sigma_V^2}{2\pi} \end{aligned}$$

(d) Déduire de l'étude de f_Y au voisinage de 0 que pour certains polynômes $A(\mathbb{X})$, U et V ne peuvent **pas** être décorrélés (on pourra par exemple considérer le cas où $A(\mathbb{X}) = 1 - \rho\mathbb{X}$ où $\rho > 0$).

Soit donc ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \phi(\omega) = \frac{1}{\left|A\left(e^{i\omega}\right)\right|^2}\sigma_\epsilon^2 = \sigma_U^2 + \left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\sigma_V^2$$

Alors pour ce qui concerne la deuxième égalité

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 \geq 0$$

et donc

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \phi(\omega)\geq\phi(0)$$

Or par ailleurs $\phi(0) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$ et donc

$$\forall\omega\in\mathbb{R}, \frac{1}{\left|A\left(e^{i\omega}\right)\right|^2} \geq \frac{1}{|A(1)|^2}$$

Considérons alors le cas où $A(\mathbb{X}) = 1 - \rho\mathbb{X}$ où $\rho > 0$: on a

$$|A(-1)|^2 = |1+\rho|^2 = 1 + 2\rho + \rho^2 > 1 - 2\rho + \rho^2 = |A(1)|^2$$

ce qui contredit le résultat précédent, de sorte que U et V ne peuvent **pas** être décorrélés. Ceci reste vrai plus généralement si $\rho\in\mathbb{C}$ avec $\Re(\rho) > 0$: notant $\rho = a + ib$ il vient

$$\left|A\left(\frac{\overline{\rho}}{|\rho|}\right)\right|^2 = \left|1 - \rho\frac{\overline{\rho}}{|\rho|}\right|^2 = |1 + |\rho||^2 = 1 + 2\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + b^2 > a^2 + b^2 + 1 - 2a = |A(1)|^2$$

puis de façon plus générale si A est un polynôme quelconque (sous forme canonique) dont les racines sont toutes de partie réelle positive.

Ainsi, il n'est pas toujours possible de décomposer un processus Ma intégré en somme d'une marche aléatoire et d'une tendance dont les bruits blancs associés sont décorrélés. En revanche la décomposition de Beveridge-Nelson est toujours possible (sous réserve que $A'(\mathbb{X})$ soit convergente).

Exercice corrigé 2

En 1978 Robert E. Hall propose et fonde empiriquement dans "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence" un modèle selon lequel la consommation des ménages suit ... une marche aléatoire ! L'objet de cet exercice est de présenter très brièvement ce résultat.

☞ Q1 On considère un agent dont l'utilité $u(\cdot)$ à chaque date t dépend uniquement de sa consommation c_t. Ses sources de revenus sont le travail, qui lui rapporte w_t entre les dates t et $t+1$, et le capital, qui lui rapporte rk_t où r désigne le taux d'intérêt réel du marché (supposé constant) et k_t le stock de capital accumulé à la date t.

(a) Montrer que la contrainte budgétaire de l'agent à chaque date $t \in \mathbb{Z}$ s'écrit

$$k_{t+1} - k_t = (rk_t + w_t) - C_t$$

Les revenus de l'agent entre les dates t et $t+1$ sont les revenus du capital rk_t et du travail w_t, le seul emploi étant la consommation C_t entre ces dates. Le flux net de revenu est donc la variation du capital entre les deux dates, soit

$$\boxed{k_{t+1} - k_t = (rk_t + w_t) - C_t}$$

(b) On suppose que les revenus du travail à la date $t+h$ sont inconnus à la date t, et modélisés par la variable aléatoire W_{t+h} ; on note $\mathcal{I}_t$ l'ensemble d'information de l'agent disponible à la date t.
Montrer que le choix *à la date t* du processus de la consommation future de l'agent est déterminé par le programme de maximisation

$$\left| \begin{array}{l} \max_{C_t, C_{t+1}, \dots} \mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1}, \dots\right) \middle| \mathcal{I}_t\right) \\ \text{s.c.} \left\{ \ \forall h \geq 0,\ k_{t+h+1} = \left((1+r)\, k_{t+h} + w_{t+h}\right) - C_{t+h} \right. \end{array} \right.$$

Compte-tenu des informations $\mathcal{I}_t$ en sa possession à la date t un agent rationnel cherche à maximiser son utilité intertemporelle espérée (car il est neutre au risque) $\mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1}, \right)\right)$ par un choix judicieux de consommations futures, sans néanmoins violer sa contrainte budgétaire **à aucune date future** (il n'a pas accès au crédit).

(c) Ecrire le lagrangien associé et en déduire les équations d'Euler

$$\forall h \geq 1,\ \frac{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}}}{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h-1}}} = \frac{1}{1+r}$$

Le Lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(C_t, C_{t+1}, \ldots, k_t, k_{t+1}, \ldots, \lambda_0, \lambda_1, \ldots\right) &= \mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) \middle| \mathcal{I}_t\right) \\ &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \lambda_h \left(k_{t+h+1} - (1+r)\, k_{t+h} - w_{t+h} + C_{t+h}\right)\end{aligned}$$

On a pour tout $h \geq 1$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+h}} = \frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}} + \lambda_h$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+h+1}} = (1+r)\lambda_{h+1} - \lambda_h$.
Une condition nécessaire du premier ordre est donc que

$$\frac{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h+1}}}{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}}} = \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = \frac{1}{1+r}$$

(d) On suppose que l'agent a une préférence pour le présent de $\delta \geq 0$.
Donner l'utilité intertemporelle $U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right)$ tirée du processus de consommation $(C_t, C_{t+1}, \ldots)$.

L'utilité attendue à la date t d'un choix de consommation futur $C_t, C_{t+1}, \ldots$ est [3]

$$\boxed{U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) = \delta \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\delta)^h} u\left(C_{t+h}\right)}$$

(e) En supposant que l'utilité $u(\cdot)$ de l'agent est quadratique et que $\delta = r$ montrer que le profil de consommation future **anticipé à la date** t est constant : $\forall h \geq 0,\ C^{*t}_{t+h} = C^{*t}_t$

u étant quadratique, $u'(x)$ est proportionnel à x ; comme par ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \mathbb{E}\left(u(x)|\mathcal{I}_t\right)\right) = \left(x \mapsto \frac{\partial \mathbb{E}\left(u(x)|\mathcal{I}_t\right)}{\partial x}\right)$$

il vient pour $h \geq 0$

$$\frac{\frac{1}{(1+\delta)^{h+1}} C_{t+h+1}}{\frac{1}{(1+\delta)^h} C_{t+h}} = \frac{1}{1+r}$$

c'est-à-dire comme $\delta = r$

$$\boxed{\forall h \geq 0,\ C^{*t}_{t+h} = C^{*t}_t}$$

[3] le cœfficient δ sert à normaliser $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\delta)^h} = \frac{1}{\delta}$. De tout façon puisqu'une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern est définie à une transformation affine positive près, cela ne change rien à la suite.

(f) Montrer que pour tout $H \geq 0$

$$\sum_{h=0}^{H} \frac{C_{t+h}^{*t}}{(1+r)^h} = (1+r)k_t + \sum_{h=0}^{H} \frac{W_{t+h}}{(1+r)^h} - \frac{1}{(1+r)^H} k_{t+H+1}$$

On a successivement pour $H \geq 1$

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_t & = & W_t & + & (1+r)k_t & - & k_{t+1} & & \\
C_{t+1} & = & W_{t+1} & + & (1+r)k_{t+1} & - & k_{t+2} & & \times\frac{1}{1+r} \\
 & \vdots & & & & & & & \vdots \\
C_{t+H} & = & W_{t+H} & + & (1+r)k_{t+H} & - & k_{t+H+1} & & \times\frac{1}{(1+r)^H} \\
\hline
\text{donc } \sum_{h=0}^{H} \frac{C_{t+h}}{(1+r)^h} & = & \sum_{h=0}^{H} \frac{W_{t+h}}{(1+r)^h} & + & (1+r)k_t & - & k_{t+H+1} & &
\end{array}$$

(g) En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de cavalerie ($i.e.$ $\lim_{h\infty} \frac{k_{t+h+1}}{(1+r)^h} = 0$) montrer finalement que

$$C_{t+1}^{*t+1} - C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)\right)$$

En l'absence de cavalerie il vient

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{C_{t+h}^{*t}}{(1+r)^h} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^h} + (1+r)k_t$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^h} + (1+r)k_t$$

soit

$$C_t^{*t} = rk_t + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^{h+1}}$$

et donc finalement, comme $k_{t+1} = (1+r)k_t + W_t - C_t^{*t}$

$$\boxed{C_{t+1}^{*t+1} - C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)\right)}$$

☞ Q2 On suppose tout d'abord que les salaires futurs suivent un processus ARMA de la forme

$$\Delta(L)W = \Theta(L)\epsilon$$

où Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc. On suppose en outre qu'à toute date t, $\mathcal{I}_t$ contient $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots$

(a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A telle que $W = A(L)\epsilon$ et que ϵ est l'innovation de W.

Δ étant supposé sous forme canonique, ses racines sont toutes de module strictement supérieur à un et donc (voir TD 2, exercice 1) il admet une inverse sous la forme $\Delta(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k$.
Soit alors $A(\mathbb{X}) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k\right) \Theta(\mathbb{X})$: A est absolument convergente car Θ est de degré fini ; en outre $W = \Delta(L)^{-1}\Theta(L)\epsilon = A(L)\epsilon$ et la série $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k\right) \Theta(\mathbb{X})$ est absolument convergente.
De façon similaire Θ est inversible et en notant $\Delta(\mathbb{X})\Theta(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \mathbb{X}^k$ il vient pour $t \in \mathbb{Z}$ $W_t = -\sum_{k\geq 1} \beta_k W_{t-k} + \epsilon_t$ et donc ϵ est l'innovation de W.

(b) Calculer $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)$ et $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right)$ pour $h \geq 0$.

Notons $A(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$.
On a tout d'abord pour $h \geq 0$

$$W_{t+h+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right) = \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}}$$

De façon similaire on a

$$\boxed{\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) = \sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}}$$

(c) En déduire que C est une marche aléatoire.

On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
C_{t+1} - C_t &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}\right) - \left(\sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}\right)\right) \\
&= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+h} \epsilon_{t+1-k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+h} \epsilon_{t+1-k}\right)\right) \\
&= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} a_h \epsilon_{t+1} \\
&= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r a_h}{(1+r)^{h+1}}\right) \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

et donc C est une marche aléatoire, qui plus est associée au bruit blanc $L^{-1}\epsilon$.

☞ Q3 On suppose cette fois que les salaires futurs suivent un Arma autour d'une tendance déterministe, de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

où ϕ est $\mathcal{C}^\infty$, Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc.

(a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A et une fonction ψ telles que $W = \psi(t) + A(L)\epsilon$, et calculer $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)$ et $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right)$ pour $h \geq 0$.

Posons $A(\mathbb{X}) = \Delta(\mathbb{X})^{-1}\Theta(\mathbb{X})$ (développée en série absolument convergente) et ψ : $(t \mapsto \Delta(L)^{-1}\phi(t))$: il vient

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ W_t = \psi(t) + A(L) \circ \epsilon_t$$

En outre ϵ est l'innovation de A.

Par ailleurs on a pour $h \geq 0$

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right) = \psi(t+h+1) + \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k\epsilon_{t+h+1-k} \\ \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) = \psi(t+h+1) + \sum_{k=h}^{+\infty} a_k\epsilon_{t+h+1-k} \end{cases}$$

(b) Montrer que C est une marche aléatoire.

On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} C_{t+1} - C_t &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\psi(t+1) + \sum_{k=h}^{+\infty} a_k\epsilon_{t+h+1-k}\right) - \left(\psi(t+1) + \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k\epsilon_{t+h+1-k}\right)\right) \\ &= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{ra_h}{(1+r)^{h+1}}\right)\epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

et donc C est une marche aléatoire, encore associée au bruit blanc $L^{-1}\epsilon$.

☞ Q4 On suppose enfin que les salaires suivent un processus Arima autour d'une tendance déterministe,[4] de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ (\mathbb{1} - L)^d\Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

avec les mêmes hypothèses sur Δ, Θ, ϕ et ϵ, et avec $d \geq 1$.

(a) Montrer que si deux suites réelles u et v vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathbb{1} - L)^d u_n = v_n$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^l (\mathbb{1} - L)^l u_0 + \mathcal{C}_n^{d-1} \sum_{i=1}^n v_i$$

[4] La théorie macro-économique suggère en effet que le Pib est en effet intégré d'ordre 1, et que la croissance des salaires suit celle du Pib.

Montrons tout d'abord par récurrence sur $d \geq 1$ que

$$u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l} \left(\mathbb{1} - L\right)^{l} u_0 \; + \sum_{1 \leq i_d \leq \cdots \leq i_1 \leq n} v_{i_d}$$

– Lorsque $d = 1$ on a immédiatement (avec la convention $\mathcal{C}_n^0 = 1$)

$$u_n - u_{n-1} = v_n \;\rightarrow\; u_n = u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}$$

– Soit alors $d \geq 2$ tel que la formule soit vérifiée lorsque $(\mathbb{1} - L)^{d-1} u_n = v_n$.
Alors en appliquant le résultat pour $d = 1$ à $\left((\mathbb{1} - L)^{d-1} u_n\right)$ il vient

$$(\mathbb{1} - L)^{d-1} u_n = (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}$$

donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à u et $\left((\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ il vient

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^{l} u_0 \; + \sum_{1 \leq i_{d-1} \leq \cdots \leq i_1 \leq n} \left((\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{i_d=1}^{i_{d-1}} v_{i_d} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^{l} u_0 \; + \sum_{1 \leq i_{d-1} \leq \cdots \leq i_1 \leq n} (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 \; + \sum_{1 \leq i_d \leq \cdots \leq i_1 \leq n} v_{i_d} \\
&= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^{l} u_0 \; + \left(\sum_{1 \leq i_{d-1} \leq \cdots \leq i_1 \leq n} 1 \right) (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 \; + \sum_{1 \leq i_d \leq \cdots \leq i_1 \leq n} v_{i_d}
\end{aligned}$$

Or pour $p, q \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i_p \leq \cdots \leq i_1 \leq q} 1 &= \left| \{ (a_1, \ldots, a_p) / 1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_p \leq q \} \right| \\
&= \left| \{ (a_1, a_2 + 1, \ldots, a_p + p - 1) / 1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_p \leq q \} \right| \\
&= \left| \{ (b_1, \ldots, b_p) / 1 \leq b_1 < \cdots < b_p \leq q + p - 1 \} \right| \\
&= \mathcal{C}_{q+p-1}^{p}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^{l} u_0 \; + \mathcal{C}_{n+d-1}^{d-1} (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 \; + \sum_{1 \leq i_d \leq \cdots \leq i_1 \leq n} v_{i_d} \\
&= \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^{l} u_0 \; + \sum_{1 \leq i_d \leq \cdots \leq i_1 \leq n} v_{i_d}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
Enfin, comme

$$\sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} = \sum_{i_d=1}^{n}\left(\sum_{i_d\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} 1\right) v_{i_d} = \mathcal{C}_n^{d-1}\sum_{i_d=1}^{n} v_{i_d}$$

il vient

$$\boxed{u_n = \sum_{l=0}^{d-1}\mathcal{C}_{n+l}^{l}(\mathbb{1}-L)^l u_0 \;+\; \mathcal{C}_n^{d-1}\sum_{i=1}^{n} v_i}$$

(b) En déduire que C est une marche aléatoire ; à quel bruit blanc est-elle associée ?

Soit $A(\mathbb{X}) = \Delta(\mathbb{X})^{-1}\Theta(\mathbb{X})$; alors

$$\forall t\in\mathbb{Z},\ (\mathbb{1}-L)^d W_{t+h} = \psi(t) + A(L)\epsilon_{t+h}$$

Donc d'après le résultat précédent pour tout $h\geq 0$

$$\forall t\in\mathbb{Z},\ W_{t+h+1} \;=\; \sum_{l=1}^{d-1}\mathcal{C}_{h+l}^{l-1}(\mathbb{1}-L)^l W_t \;+\; \mathcal{C}_{h+1}^{d-1}\sum_{l=1}^{h+1}\left(\psi(t+l)\;+\;A(L)\epsilon_{t+l}\right)$$

Or

$$(1-\mathbb{X})^l \;=\; \sum_{k=0}^{l} C_l^k(-1)^{l-k}\,\mathbb{X}^k$$

donc pour $h\geq 0$ et $t\in\mathbb{Z}$ (avec la convention $\mathcal{C}_{\cdot}^{-1}=0$)

$$W_{t+h+1} = \sum_{0\leq k\leq l\leq d-1}\mathcal{C}_{h+l}^{l-1}\mathcal{C}_l^k(-1)^{l+k}W_{t-k} \;+\; \mathcal{C}_{h+1}^{d-1}\sum_{l=0}^{h+1}\left(\psi(t+l)\;+\;A(L)\epsilon_{t+l}\right)$$

Or pour $0\leq k\leq l\leq d-1$ on a

$$\mathbb{E}\left(W_{t-k}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t-k}|\mathcal{I}_t\right) = W_{t-k} - W_{t-k} = 0$$

Donc en notant $A(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathbb{X}^k$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)\\
=\;& \mathcal{C}_{h+1}^{d-1}\sum_{l=0}^{h+1}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k}\,\middle|\,\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k}\,\middle|\,\mathcal{I}_t\right)\right)\\
=\;& \mathcal{C}_{h+1}^{d-1}\sum_{l=0}^{h+1}\left(\sum_{k=l}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} - \sum_{k=l+1}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k}\right)\\
=\;& \mathcal{C}_{h+1}^{d-1}\left(\sum_{l=0}^{h+1} a_l\right)\epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned} C_{t+1} - C_t &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1} \right) \\ &= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

En particulier,

$$\boxed{C \text{ est une marche aléatoire, associée au bruit blanc } L^{-1}\epsilon}$$

Ainsi, aussi général que soit le modèle linéaire régissant les revenus du travail, la consommation reste une marche aléatoire ; la seule hypothèse forte est de nature économique, et postule que la fonction d'utilité instantanée est quadratique.