

Séries temporelles linéaires  
 Corrigé des travaux dirigés n°6

Guillaume Lacôte

Bureau E03

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Notons  $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \mathbb{X}^i$  et  $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^q \delta_i \mathbb{X}^i$ .  
 Alors pour tout  $h \geq 0$

$$X_{t+h} = - \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^q \delta_i \epsilon_{t+h-i}$$

et donc pour tout  $h > q$

$$\begin{aligned} {}_t X_{t+h} &= \mathbb{E}L(X_{t+h} | X_t, \dots, X_0, Z) \\ &= - \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \mathbb{E}L(X_{t+h-i} | X_t, \dots, X_0, Z) + \sum_{i=0}^q \delta_i \mathbb{E}L(\epsilon_{t+h-i} | X_t, \dots, X_0, Z) \\ &\text{car } \epsilon \text{ est l'innovation de } X \\ &= - \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i {}_t X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^q 0 \quad \text{car } h > q \end{aligned}$$

Ainsi à  $t$  fixé  $({}_t X_{t+h})_h$  suit pour  $h > q$  la récurrence linéaire de polynôme caractéristique  $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X})$ .

Application numérique :

$\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$  est bien sous forme canonique car  $2 > 1$  est sa seule racine, et il en va même pour  $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$ .

Par ailleurs  $(1 - \mathbb{X})\Theta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{3}{2}\mathbb{X} + \frac{1}{2}\mathbb{X}^2$  donc pour  $h \geq 2$

$${}_t X_{t+h} = \frac{3}{2} {}_t X_{t+h-1} - \frac{1}{2} {}_t X_{t+h-2}$$

Donc il existe  $\alpha, \beta$  tels que pour tout  $h \geq 0$

$${}_t X_{t+h} = \alpha 1^h + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

Des valeurs initiales pour  $h \in \{1, 2\}$  on tire alors

$$\begin{cases} h = 1 : & \alpha + \frac{1}{2}\beta = {}_t X_{t+1} \\ h = 2 : & \alpha + \frac{1}{4}\beta = {}_t X_{t+2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = & \frac{1}{3}(4 {}_t X_{t+2} - {}_t X_{t+1}) \\ \beta = & \frac{4}{3}({}_t X_{t+1} - {}_t X_{t+2}) \end{cases}$$

et donc finalement

$$\forall h \geq 1, {}_t X_{t+h} = \frac{1}{3}(4 {}_t X_{t+2} - {}_t X_{t+1}) + \frac{1}{3 \cdot 2^{h-2}}({}_t X_{t+1} - {}_t X_{t+2})$$

Q2 (a) On a pour  $h \geq 0$

$$e_h = X_{t+h} - {}_tX_{t+h} = \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i (X_{t+h-i} - {}_tX_{t+h-i}) + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i}$$

en notant  $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^q \delta_i \mathbb{X}^i$ <sup>1</sup>

Or

$$(X_{t+h-i} - {}_tX_{t+h-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq i \\ e_{h-i} & \text{si } h > i \end{cases}$$

donc

$$e_h = \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i e_{h-i} + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i}$$

Procédons alors par récurrence sur  $h \geq 0$  :

- on a  $e_0 = 0 \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle = \langle 0 \rangle$
- soit alors  $h \geq 1$  tel que  $\forall i < h, e_{h-i} \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h-i} \rangle$ ; alors

$$e_h = \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i \underbrace{e_{t+h-i}}_{\in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h-i} \rangle} + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle$$

ce qui achève la récurrence.

Autre méthode :

On sait que  $X_{t+h} \in \langle \epsilon_{t+h}, \dots \rangle$  car  $\epsilon$  est l'innovation de  $X$ . Par ailleurs,  $\mathbb{E}[Y | \epsilon_t, \dots]$  étant la projection orthogonale de  $Y$  sur  $\langle \epsilon_t, \dots \rangle$ ,  $(Y - \mathbb{E}[Y | \epsilon_t, \dots]) \in \langle \epsilon_t, \dots \rangle^\perp$ .

Or  $\epsilon$  est un bruit blanc donc  $(\epsilon_{t+h}, \dots)$  est une famille orthogonale, et donc dans  $\langle \epsilon_{t+h}, \dots \rangle$  l'orthogonal de  $\langle \epsilon_t, \dots \rangle$  est  $\langle \epsilon_{t+h}, \dots, \epsilon_{t+1} \rangle$  de sorte que finalement

$$e_h = (X_{t+h} - {}_tX_{t+h}) \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle$$

(b) On a  $e_0 = 0$  et  $e_1 = \epsilon_{t+1}$ . Définissons donc par récurrence  $(a_h)_{h \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_h &= \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} (\delta_i + \alpha_i a_{h-i}) \quad \text{si } h \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket \\ a_h &= \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i a_{h-i} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons alors par récurrence sur  $h$  que  $\forall h \geq 1, e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \dots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$

- On a  $e_1 = \epsilon_{t+1} = a_0 \epsilon_{t+1}$  puisque  $a_0 = 1$  par définition.

<sup>1</sup> $\epsilon$  est l'innovation de  $X$ , donc  $\langle X_{t-1}, \dots \rangle = \langle \epsilon_{t-1}, \dots \rangle$ , donc il n'y a pas de terme en  $\epsilon_{t+h-i}$  lorsque  $h-i \leq 0$ .

- Soit alors  $h \geq 2$  tel que  $\forall l \in \llbracket 0, h-1 \rrbracket, e_l = a_0 \epsilon_{t+l} + \dots + a_{l-1} \epsilon_{t+1}$ ; montrons que  $e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \dots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$ .

Alors

$$\begin{aligned} e_h &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i e_{h-i} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i \left( \sum_{j=0}^{(h-i)-1} a_j \epsilon_{t+(h-i)-j} \right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{1 \leq i \leq \min(h,p+d)} \sum_{i \leq l \leq h-1} \alpha_i a_{l-i} \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{1 \leq i \leq \min(h,p+d,l)} \alpha_i a_{l-i} \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \left( \sum_{1 \leq i \leq \min(l,p+d)} \alpha_i a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \left( \delta_k + \sum_{1 \leq i \leq \min(k,p+d)} \alpha_i a_{k-i} \right) \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=\min(q,h-1)+1}^{h-1} \left( \sum_{1 \leq i \leq \min(l,p+d)} \alpha_i a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{h-1} a_{h-k} \epsilon_{t+h-k} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Ainsi lorsque  $h \geq q$ , la suite  $(a_h)_h$  suit la récurrence linéaire de polynôme  $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X})$

Application numérique :

On a tout d'abord

$$e_1 = \left( \frac{3}{2} X_t - \frac{1}{2} X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \frac{4}{5} \epsilon_t \right) - \left( \frac{3}{2} X_t - \frac{1}{2} X_{t-1} - \frac{4}{5} \epsilon_t \right) = \epsilon_{t+1}$$

ce dont on tire  $a_0 = 1$ .

De même

$$e_2 = \frac{3}{2} \epsilon_1 + \epsilon_{t+2} - \frac{4}{5} \epsilon_{t+1}$$

et donc  $a_1 = \frac{3}{2} a_0 - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$

Puis pour  $h \geq 3$  on a  $a_h = \frac{3}{2} a_{h-1} - \frac{1}{2} a_{h-2}$ . Or les racines de  $1 - \frac{3}{2} \mathbb{X} - \frac{1}{2} \mathbb{X}^2$  sont 1 et  $\frac{1}{2}$  donc il existe  $\alpha, \beta$  tels que pour tout  $h \geq 0$

$$a_h = \alpha 1^h + \beta \left( \frac{1}{2} \right)^h$$

et des valeurs initiales

$$\begin{cases} h = 0 : \alpha + \beta = 1 \\ h = 1 : \alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{7}{10} \end{cases}$$

on tire finalement

$$\forall h \geq 0, a_h = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \frac{1}{2^h}$$

(c) On a pour  $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k \epsilon_{t+h-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{h-1} (a_k^2 \mathbb{V}(\epsilon_{t+h-k})) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k^2\right) \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer un équivalent en  $k$  de  $a_k$ , puis en  $h$  de  $\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k^2\right)$ . Comme  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  suit la récurrence de polynôme  $(1 - X)\Theta(X)$  dont 1 est racine, on montre que  $\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k^2\right) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha h^{2d-1}$  avec  $\alpha > 0$ .

Notons en effet  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, r \leq p$ , les racines de  $\Theta(X)$ ,<sup>2</sup> et soit  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $\forall h \geq q, a_h = \beta_0(h)1^h + \beta_1(h)\lambda_1^h + \dots + \beta_r(h)\lambda_r^h$ , avec  $d^\circ \beta_0 = d-1$  et  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, d^\circ \beta_i \leq p$ . Alors pour  $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \sum_{k=0}^{h-1} \left(\beta_0(k) + \sum_{i=1}^r \beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 \sigma_\epsilon^2 \\ &= \sigma_\epsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)^2 + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k + \sum_{k=0}^{h-1} \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2\right) \end{aligned}$$

Notons alors  $\rho$  le coefficient de plus haut degré  $(d-1)$  de  $\beta_0$ ; ainsi comme  $d \geq 1$  on a  $\beta_0(h) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \rho h^{d-1}$ . Soit par ailleurs  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ; montrons que  $\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k =_{h \rightarrow +\infty} o\left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)\right)$ . Soit  $m_i$  un majorant de tous les coefficients de  $\beta_i$  (en valeur absolue), et notons  $d_i = d^\circ \beta_i$ .

<sup>2</sup>Prises deux-à-deux distinctes; elles sont en outre toutes de module inférieur à 1, et notamment différentes de 1.

Alors

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k\right| &\leq \sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) (d_i m_i k^{d_i}) \lambda_i^k \\ &\leq d_i m_i \left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)\right) \left(\sum_{k=0}^{h-1} k^{d_i} \lambda_i^k\right) \end{aligned}$$

Enfin, comme  $\sum_{k=0}^{h-1} k^{d_i} \lambda_i^k =_{h \rightarrow +\infty} O(1)$ <sup>3</sup> on a finalement

$$\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k =_{t \rightarrow +\infty} O\left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)\right)$$

De la même façon on a pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket \sum_{k=0}^{h-1} (\beta_i(k)\lambda_i^k)^2 =_{h \rightarrow +\infty} O(1)$ , et donc

$$\sum_{k=0}^{h-1} \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 \leq \max_i \sum_{k=0}^{h-1} r^2 (\beta_i(k)\lambda_i^k)^2 =_{h \rightarrow +\infty} O(1)$$

En définitive, comme  $\beta_0(k)^2 \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \rho^2 k^{2d-1}$  on a (par Césaro)

$$\mathbb{V}(e_h) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)^2 \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \rho^2 h^{2d-1} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} +\infty$$

<sup>3</sup>On a

$$\sum_{k=0}^{h-1} k^{d_i} \lambda_i^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k^{d_i} \lambda_i^k$$

Or en divisant  $\sum_{k=0}^{h-1} \lambda_i^k$  suivant les puissances croissantes il vient qu'il existe  $(\nu_0, \dots, \nu_{d_i-1})$  tel que  $\forall k \in \mathbb{N}, k^{d_i} = \nu_0(k-1) \dots (k-1) + \nu_1(k-1)(k-2) \dots (k-2) + \dots + \nu_{d_i-1} 1$  et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} k^{d_i} \lambda_i^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j j! k^j \lambda_i^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} (x \mapsto x^k)\right) (\lambda_i) \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x \mapsto \frac{1}{1-x}\right)\right) (\lambda_i) \quad \text{car la série converge normalement} \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j (1-\lambda_i)^{-1-j} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Autrement dit, il faut se limiter à des horizons de prévision raisonnables.

Application numérique :

On a ici pour  $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \sum_{i=0}^h \left( \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \frac{1}{2^i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^h \left( \left( \frac{2}{5} \right)^2 + 2 \frac{2}{5} \left( \frac{3}{5} \frac{1}{2^i} \right) + \left( \frac{3}{5} \right)^2 \frac{1}{4^i} \right) \\ &= \left( \frac{2}{5} \right)^2 h \sigma_\epsilon^2 + \left( \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5} \frac{1 - \frac{1}{2^h}}{1 - \frac{1}{2}} + \left( \frac{3}{5} \right)^2 \frac{1 - \frac{1}{4^h}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \sigma_\epsilon^2 \\ &= \frac{4}{25} \sigma_\epsilon^2 h + \frac{12}{25} \left( 2 - \frac{1}{2^h} - \frac{1}{4^h} \right) \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour  $h \geq 0$   $e_h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \epsilon_{t+h-i}$ , et  $\epsilon$  est un bruit blanc gaussien. Donc <sup>4</sup>

$$(X_t - {}_tX_{t+h}) = e_h \sim \mathcal{N} \left( 0, \left( \sum_{i=0}^{h-1} a_i^2 \right) \sigma_\epsilon^2 \right)$$

Par conséquent un intervalle de confiance  $I_\alpha(h)$  d'horizon  $h$ , qui est tel que

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in I_\alpha(h)) = 1 - \alpha$$

est

$$I_\alpha(h) = \left[ {}_tX_{t+h} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{N(0,1)} \sqrt{\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2} \sigma_\epsilon \right]$$

où  $q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{N(0,1)}$  désigne le fractile à  $1 - \frac{\alpha}{2}$  % de la loi normale centrée réduite.

Application numérique :

On a

$${}_tX_{t+2} = (2 \cdot 10 - 12) + \frac{1}{2^{2-1}}(12 - 10) = 9$$

et de plus

$$\mathbb{V}(e_2) = (a_0^2 + a_1^2) \sigma_\epsilon^2 = \left( 1 + \left( \frac{7}{10} \right)^2 \right) \cdot 1 = 1.49 \simeq 1.22^2$$

et donc

$$I_{95\%}(2) \simeq [7.78, 10.22]$$

<sup>4</sup>La somme de deux normales indépendantes est une normale, d'espérance leur somme et de variance leur somme.

\*  
\* \*

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 On a pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} {}_tX_{t+1} &= \mathbb{E}L(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots) \\ &= \mathbb{E}L(\phi X_t + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t | X_t, X_{t-1}, \dots) \\ &= \boxed{\phi X_t - \theta \epsilon_t} \end{aligned}$$

car  $\langle \epsilon_t, \dots \rangle = \langle X_t, \dots \rangle$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= (\mathbf{1} - \theta L)^{-1} (\mathbf{1} - \phi L) X_t \\ &= (\mathbf{1} - \phi L) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k L^k \right) \circ X_t \\ &= X_t + \sum_{k=1}^{+\infty} \theta^{k-1} (\theta - \phi) X_{t-k} \end{aligned}$$

Donc en définitive

$$\begin{aligned} {}_tX_{t+1} &= (\phi - \theta) X_t - \theta \sum_{k=1}^{+\infty} \theta^{k-1} (\theta - \phi) X_{t-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k (\phi - \theta) X_{t-k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \theta^{k-1} (\phi - \theta) X_{t+1-k} \end{aligned}$$

et on pose donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_k = \theta^{k-1} (\phi - \theta)}$$

La série  $\sum_{k \geq 1} a_k$  est alors absolument convergente car  $|\theta| < 1$  car le modèle est sous forme canonique.

☞ Q2 On a pour  $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} {}_t\hat{X}_{t+1} &= \theta^0 (\phi - \theta) X_t + \sum_{k=2}^{t+1} \theta^{k-1} (\phi - \theta) X_{t+1-k} \\ &= (\phi - \theta) X_t + \theta \sum_{k=1}^t \theta^{k-1} (\phi - \theta) X_{t-k} \\ &= \boxed{(\phi - \theta) X_t + \theta {}_{t-1}\hat{X}_t} \end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour  $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 e_{t+1} &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left( \left( X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left( \left( X_{t+1} - \left( (\phi - \theta)X_t - \theta {}_t\hat{X}_{t-1} \right) \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left( \left( (X_{t+1} - \phi X_t) + \theta \left( X_t - {}_t\hat{X}_{t-1} \right) \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left( \left( (\epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t) + \theta \left( X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t \right) \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \left( \mathbb{V}(\epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t) + 2\theta \text{Cov}(\epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t, X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t) + \theta^2 \mathbb{V}(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t) \right) \\
 &= (1 + \theta^2) + \frac{2}{\sigma_\epsilon^2} \underbrace{\text{Cov}(-\theta \epsilon_t, \theta X_t)}_{-\theta^2 \sigma_\epsilon^2} + \theta^2 e_t \\
 &= \boxed{(1 - \theta^2) + \theta^2 e_t}
 \end{aligned}$$

☞ Q4 On a pour  $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(0) &= \mathbb{V}(X_t) \\
 &= \mathbb{E}(X_t^2) \\
 &= \mathbb{E}((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1})^2) \\
 &= \mathbb{E}((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1})^2) \\
 &= \phi^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^2) + 0 - 2\phi\theta \mathbb{E}(X_{t-1}\epsilon_{t-1}) + \mathbb{E}((\epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1})^2) \quad \text{car } \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1} \\
 &= \phi^2 \gamma_X(0) - 2\phi\theta \sigma_\epsilon^2 + (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2
 \end{aligned}$$

Par conséquent comme  $|\phi| < 1$  (car le modèle est canonique) il vient

$$\gamma_X(0) = \frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2} \sigma_\epsilon^2$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
 e_0 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left( \left( X_0 - {}_{-1}\hat{X}_0 \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E}(X_0^2) \quad \text{car } {}_{-1}\hat{X}_0 = \mathbb{E}(X_0 | \emptyset) = \mathbb{E}(X_0) = 0 \\
 &= \frac{\gamma_X(0)}{\sigma_\epsilon^2} \\
 &= \frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2}
 \end{aligned}$$

Or par ailleurs  $e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1 - \theta^2)$  ce qui s'écrit encore

$$(e_{t+1} - 1) = \theta^2 (e_t - 1)$$

de sorte que

$$e_t = \theta^{2t}(e_0 - 1) + 1$$

Donc en définitive

$$e_t = 1 + \theta^{2t} \frac{(\theta - \phi)^2}{1 - \phi^2}$$

☞ Q5 En particulier, l'erreur absolue de la prévision d'horizon 1 tronquée  $\mathbb{E} \left( \left( X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t \right)^2 \right)$  converge vers  $\sigma_\epsilon^2$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , puisque  $|\theta| < 1$  puisque le modèle est canonique.

Remarquons en outre que la **vitesse de convergence** est géométrique (*i.e.* rapide), et que l'erreur est toujours supérieure à  $\sigma_\epsilon^2$  si  $\theta > 0$ .

Notons enfin que l'**erreur maximale**  $1 + \frac{(\theta - \phi)^2}{1 - \phi^2}$  est une fonction croissante de  $\theta \in ]-1, 1[$  de  $\phi \in ]-1, 1[$ .<sup>5</sup>

☞ Q1 On a pour tout  $t \in \mathbb{N}$

$$X_t = (\phi + 1)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$$

Construisons par récurrence  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(f(t))_{t \in \mathbb{N}}$  tels que  $\forall t \in \mathbb{N}$ ,  $X_t = \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} + \epsilon_t + f(t)$ .

- On a  $X_0 = \epsilon_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \phi + 1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$ , et on pose donc  $f(0) = \begin{pmatrix} \phi + 1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$

- On a

$$X_1 = (\phi + 1)X_0 - \phi X_{-1} + \epsilon_1 - \theta \epsilon_0$$

Or par ailleurs  $\epsilon_0 = \theta \epsilon_{-1} + X_0 - (\phi + 1)X_{-1} + \phi X_{-2}$  et donc finalement

$$X_1 = (\phi + 1 - \theta)X_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

et on pose

$$a_1 = \phi + 1 - \theta \quad \text{et} \quad f(1) = \begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

- Soit alors  $t \geq 2$  tel que  $a_1, \dots, a_t$  soient construits et  $f(0), \dots, f(t)$  définis; supposons outre que  $\forall l \in \llbracket 3, t \rrbracket$ ,  $a_l = \theta a_{l-1}$ .<sup>6</sup>

Construisons alors  $a_{t+1}$  et  $f(t+1)$  tels que  $a_{t+1} = \theta a_t$  et  $X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + f(t+1)$ .

<sup>5</sup>Elle est décroissante en  $\phi$  au-delà de  $\frac{1}{\theta}$ , mais  $\phi < 1 < \frac{1}{\theta}$ .

<sup>6</sup>Cette hypothèse, gratuite lorsque  $t = 2$ , est nécessaire conduire la récurrence dès que  $t \geq 3$ , car le calcul ci-dessus requiert la forme explicite des  $a_k$  pour  $k < t$ .

On a

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= (\phi + 1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t \\ &= (\phi + 1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \left( X_t - \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} - Z \times f(t) \right) \\ &= (\phi + 1 - \theta)X_t + (\theta a_1 - \phi)X_{t-1} + \theta \sum_{k=2}^t a_k X_{t-k} + \theta Z \times f(t) + \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Posons donc  $a_{t+1} = \theta a_t$  et  $f(t+1) = \theta f(t)$ ; alors par construction

$$X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + Z \times f(t+1)$$

ce qui achève la récurrence.

On construit ainsi  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $f$  tels que  $\forall t \in \mathbb{N}$ ,  $X_t = \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$ .

En outre, on a pour  $k \geq 1$   $a_{k+1} = \theta^{k-1} a_2$  et pour  $t \geq 1$   $f(t) = \theta^{t-1} \begin{pmatrix} \theta \phi + \theta - \phi \\ -\theta \phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$ .

En particulier, la série  $\sum_k a_k$  est absolument convergente puisque  $|\theta| < 1$  (le modèle étant sous forme canonique).

Par ailleurs pour  $t \geq 1$

$$\|Z \times f(t)\|_2 \leq |\theta|^{t-1} \|Z \times f(1)\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

car  $Z$  borné et  $|\theta| < 1$ , c'est-à-dire

$$Z \times f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$$

☞ Q2 On a pour  $t \geq 2$

$$\begin{aligned} {}_t \hat{X}_{t+1} &= \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} \\ &= a_1 X_t + \sum_{k=2}^{t+1} a_k X_{t+1-k} \\ &= a_1 X_t + \sum_{k=1}^t a_{k+1} X_{t-k} \\ &= a_1 X_t + \left( a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^t a_{k+1} X_{t-k} \right) \\ &= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^t \theta^{(k+1)-2} a_2 X_{t-k} \\ &= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \sum_{k=2}^t (\theta^{k-2} a_2) X_{t-k} \\ &= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \left( {}_{t-1} \hat{X}_t - a_1 X_{t-1} \right) \\ &= \boxed{a_1 X_t + (a_2 - a_1) X_{t-1} + \theta {}_{t-1} \hat{X}_t} \end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour  $t \geq 0$

$$X_{t+1} = (\phi + 1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc pour  $t \geq 2$

$$X_{t+1} - {}_t \hat{X}_{t+1} = (\phi + 1 - a_1)X_t + (a_2 - a_1 - \phi)X_{t-1} + \theta {}_{t-1} \hat{X}_t + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

Or par définition de  $a$ ,  $a_1 = \phi + 1 - \theta$  et  $a_2 = \theta a_1 - \phi$ , donc

$$X_{t+1} - {}_t \hat{X}_{t+1} = \theta \left( X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t \right) + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc

$$e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1 - \theta^2)$$

Par conséquent

$$e_t = \theta^{2t} (e_0 - 1) + 1 = \theta^{2(t-1)} \left( \underbrace{\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left( (X_1 - {}_0 \hat{X}_1)^2 \right)}_{e_1} - 1 \right) + 1$$

☞ Q4 Enfin,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left( (X_1 - {}_0\hat{X}_1)^2 \right) &= \mathbb{E} \left( (\epsilon_1 + Z \times f(1))^2 \right) \\
 &= \mathbb{E} \left( (\epsilon_1 + \epsilon_{-1} + (\theta + \theta\phi - \phi)X_{-1} + \theta\phi X_{-2})^2 \right) \\
 &= \begin{pmatrix} (\theta + \theta\phi - \phi)^2 \\ \theta^2\phi^2 \\ (\theta^2 + 1) \\ -2\theta\phi(\theta + \theta\phi - \phi) \\ -2\theta^2(\theta + \theta\phi - \phi) \\ 2\theta^3(\theta + \theta\phi - \phi) \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_{-1}^2) \\ \mathbb{E}(X_{-2}^2) \\ \sigma_\epsilon^2 \\ \text{Cov}(X_{-1}, X_{-2}) \\ \text{Cov}(X_{-1}, \epsilon_{-1}) \\ \text{Cov}(X_{-2}, \epsilon_{-1}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi en général même si l'erreur de prévision absolue  $X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t$  converge vers  $\sigma_\epsilon^2$ , elle dépend à horizon fini non seulement de  $\sigma_\epsilon^2$  mais aussi de la variance-covariance des conditions initiales  $Z$ .

\*  
\* \*