Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Corrigé des travaux dirigés n°6

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
Guillaume.Lacote@ensae.fr
http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Notons $(1-\mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \mathbb{X}^i$ et $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^{q} \delta_i \mathbb{X}^i$.
Alors pour tout $h \geq 0$

$$X_{t+h} = -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^{q} \delta_i \epsilon_{t+h-i}$$

et donc pour tout $h > q$

$$\begin{aligned}
{}_tX_{t+h} &= \mathbb{EL}\left(X_{t+h} \middle| X_t, \ldots, X_0, Z\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \mathbb{EL}\left(X_{t+h-i} \middle| X_t, \ldots, X_0, Z\right) + \sum_{i=0}^{q} \delta_i \mathbb{EL}\left(\epsilon_{t+h-i} \middle| \underbrace{X_t, \ldots, X_0, Z}_{=\langle \epsilon_t, \ldots, \epsilon_0, Z\rangle}\right) \\
&\quad \text{car } \epsilon \text{ est l'innovation de } X \\
&= -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \, {}_tX_{t+h-i} + \sum_{i=0}^{q} 0 \quad \text{car } h > q
\end{aligned}$$

Ainsi à t fixé $({}_tX_{t+h})_h$ suit pour $h > q$ la récurrence linéaire de polynôme caractéristique $(1-\mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :
$\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$ est bien sous forme canonique car $2 > 1$ est sa seule racine, et il en va de même pour $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$.
Par ailleurs $(1-\mathbb{X})\Theta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{3}{2}\mathbb{X} + \frac{1}{2}\mathbb{X}^2$ donc pour $h \geq 2$

$${}_tX_{t+h} = \frac{3}{2} {}_tX_{t+h-1} - \frac{1}{2} {}_tX_{t+h-2}$$

Donc il existe α, β tels que pour tout $h \geq 0$

$${}_tX_{t+h} = \alpha 1^h + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

Des valeurs initiales pour $h \in \{1, 2\}$ on tire alors

$$\begin{cases} h = 1 : & \alpha + \frac{1}{2}\beta = {}_tX_{t+1} \\ h = 2 : & \alpha + \frac{1}{4}\beta = {}_tX_{t+2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = & \frac{1}{3}\left(4\, {}_tX_{t+2} - {}_tX_{t+1}\right) \\ \beta = & \frac{4}{3}\left({}_tX_{t+1} - {}_tX_{t+2}\right) \end{cases}$$

et donc finalement

$$\boxed{\forall h \geq 1,\ {}_tX_{t+h} = \frac{1}{3}\left(4\, {}_tX_{t+2} - {}_tX_{t+1}\right) + \frac{1}{3 \cdot 2^{h-2}}\left({}_tX_{t+1} - {}_tX_{t+2}\right)}$$

☞ Q2 (a) On a pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} e_h &= X_{t+h} - {}_tX_{t+h} \\ &= \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \left(X_{t+h-i} - {}_tX_{t+h-i}\right) + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \end{aligned}$$

en notant $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^{q} \delta_i \mathbb{X}^i$.[1]

Or

$$\left(X_{t+h-i} - {}_tX_{t+h-i}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq i \\ e_{h-i} & \text{si } h > i \end{cases}$$

donc

$$\boxed{e_h = \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i e_{h-i} + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i}}$$

Procédons alors par récurrence sur $h \geq 0$:

– on a $e_0 = 0 \in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h} \rangle = \langle 0 \rangle$

– soit alors $h \geq 1$ tel que $\forall i < h$, $e_{h-i} \in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h-i} \rangle$; alors

$$\begin{aligned} e_h &= \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i \underbrace{e_{t+h-i}}_{\in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h-i} \rangle} + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\ &\in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h} \rangle \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

<u>Autre méthode :</u>

On sait que $X_{t+h} \in \langle \epsilon_{t+h}, \ldots \rangle$ car ϵ est l'innovation de X. Par ailleurs, $\mathbb{EL}\left(Y | \epsilon_t, \ldots\right)$ étant la projection orthogonale de Y sur $\langle \epsilon_t, \ldots \rangle$, $\left(Y - \mathbb{EL}\left(Y | \epsilon_t, \ldots\right)\right) \in \langle \epsilon_t, \ldots \rangle^{\perp\!\!\!\perp}$.

Or ϵ est un bruit blanc donc $(\epsilon_{t+h}, \ldots)$ est une famille orthogonale, et donc dans $\langle \epsilon_{t+h}, \ldots \rangle$ l'orthogonal de $\langle \epsilon_t, \ldots \rangle$ est $\langle \epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_{t+1} \rangle$ de sorte que finalement

$$e_h = \left(X_{t+h} - {}_tX_{t+h}\right) \in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h} \rangle$$

(b) On a $e_0 = 0$ et $e_1 = \epsilon_{t+1}$. Définissons donc par récurrence $(a_h)_{h \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_h = \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \left(\delta_i + \alpha_i a_{h-i}\right) & \text{si } h \in [\![1, q+1]\!] \\ a_h = \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i a_{h-i} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons alors par récurrence sur h que $\forall h \geq 1$, $e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \cdots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$

– On a $e_1 = \epsilon_{t+1} = a_0 \epsilon_{t+1}$ puisque $a_0 = 1$ par définition.

[1] ϵ est l'innovation de X, donc $\langle X_{t-1}, \ldots \rangle = \langle \epsilon_{t-1}, \ldots \rangle$, donc il n'y a pas de terme en ϵ_{t+h-i} lorsque $h - i \leq 0$.

– Soit alors $h \geq 2$ tel que $\forall l \in [\![0, h-1]\!]$, $e_l = a_0\epsilon_{t+l} + \cdots + a_{l-1}\epsilon_{t+1}$; montrons que $e_h = a_0\epsilon_{t+h} + \cdots + a_{h-1}\epsilon_{t+1}$.
  Alors

$$\begin{aligned}
e_h &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i e_{h-i} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{(h-i)-1} a_j\epsilon_{t+(h-i)-j}\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{1\leq i\leq \min(h,p+d)} \sum_{i\leq l\leq h-1} \alpha_i\, a_{l-i}\, \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{1\leq i\leq \min(h,p+d,l)} \alpha_i\, a_{l-i}\, \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \left(\sum_{1\leq i\leq \min(l,p+d)} \alpha_i\, a_{l-i}\right) \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \left(\delta_k + \sum_{1\leq i\leq \min(k,p+d)} \alpha_i\, a_{k-i}\right) \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=\min(q,h-1)+1}^{h-1} \left(\sum_{1\leq i\leq \min(l,p+d)} \alpha_i\, a_{l-i}\right) \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{h-1} a_{h-k}\epsilon_{t+h-k}
\end{aligned}$$

  ce qui achève la récurrence.

Ainsi lorsque $h \geq q$, la suite $(a_h)_h$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1-\mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :
On a tout d'abord

$$e_1 = \left(\frac{3}{2}X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \frac{4}{5}\epsilon_t\right) - \left(\frac{3}{2}X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} - \frac{4}{5}\epsilon_t\right) = \epsilon_{t+1}$$

ce dont on tire $a_0 = 1$.
De même

$$e_2 = \frac{3}{2}e_1 + \epsilon_{t+2} - \frac{4}{5}\epsilon_{t+1}$$

et donc $a_1 = \frac{3}{2}a_0 - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$
Puis pour $h \geq 3$ on a $a_h = \frac{3}{2}a_{h-1} - \frac{1}{2}a_{h-2}$. Or les racines de $1 - \frac{3}{2}\mathbb{X} - \frac{1}{2}\mathbb{X}^2$ sont 1 et $\frac{1}{2}$, donc il existe α, β tels que pour tout $h \geq 0$

$$a_h = \alpha 1^h + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^h$$

et des valeurs initiales

$$\begin{cases} h=0: & \alpha+\beta=1 \\ h=1: & \alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{7}{10} \end{cases}$$

on tire finalement

$$\boxed{\forall h \geq 0,\ a_h = \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\frac{1}{2^h}}$$

(c) On a pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k \epsilon_{t+h-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{h-1}\left({a_k}^2 \mathbb{V}(\epsilon_{t+h-k})\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{h-1} {a_k}^2\right)\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer un équivalent en k de a_k, puis en h de $\left(\sum_{k=0}^{h-1} {a_k}^2\right)$. Comme $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suit la récurrence de polynôme $(1-\mathbb{X})\Theta(\mathbb{X})$ dont 1 est racine, on montre que $\left(\sum_{k=0}^{h-1} {a_k}^2\right) \underset{h\to+\infty}{\sim} \alpha h^{2d-1}$ avec $\alpha > 0$.

Notons en effet $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, $r \leq p$, les racines de $\Theta(\mathbb{X})$, [2] et soit $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_r \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ tels que $\forall h \geq q$, $a_h = \beta_0(h)1^h + \beta_1(h)\lambda_1^h + \cdots + \beta_r(h)\lambda_r^h$, avec $d^\circ\beta_0 = d-1$ et $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $d^\circ\beta_i \leq p$. Alors pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \sum_{k=0}^{h-1}\left(\beta_0(k)+\sum_{i=1}^{r}\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2\sigma_\epsilon^2 \\ &= \sigma_\epsilon^2\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)^2 + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k + \sum_{k=0}^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2\right) \end{aligned}$$

Notons alors ρ le cœfficient de plus haut degré $(d-1)$ de β_0 ; ainsi comme $d \geq 1$ on a $\beta_0(h) \underset{h\to+\infty}{\sim} \rho h^{d-1}$. Soit par ailleurs $i \in [\![1,r]\!]$; montrons que $\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k =_{h\to+\infty} 0\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\right)$.

Soit m_i un majorant de tous les cœfficients de β_i (en valeur absolue), et notons $d_i = d^\circ\beta_i$.

[2] Prises deux-à-deux distinctes ; elles sont en outre toutes de module inférieur à 1, et notamment différentes de 1.

Alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k\right| &\leq \sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\left(d_i m_i k^{d_i}\right)\lambda_i^k \\ &\leq d_i m_i\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\right)\left(\sum_{k=0}^{h-1}k^{d_i}\lambda_i^k\right)\end{aligned}$$

Enfin, comme $\sum_{k=0}^{h-1}k^{d_i}\lambda_i^k =_{h\to+\infty} O(1)$ [3] on a finalement

$$\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k =_{t\to+\infty} O\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\right)$$

De la même façon on a pour $i \in [\![1,r]\!]$ $\sum_{k=0}^{h-1}\left(\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 =_{h\to+\infty} O(1)$, et donc

$$\sum_{k=0}^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 \leq \max_i \sum_{k=0}^{h-1} r^2\left(\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 =_{h\to+\infty} O(1)$$

En définitive, comme $\beta_0(k)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \rho^2 k^{d-1}$ on a (par Césaro)

$$\boxed{\mathbb{V}\left(e_h\right) \underset{h\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)^2 \underset{h\to+\infty}{\sim} \rho^2 h^{2d-1} \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty}$$

[3] On a

$$\sum_{k=0}^{h-1}k^{d_i}\lambda_i^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty}k^{d_i}\lambda_i^k$$

Or en divisant $\mathbb{X}^{d_i}$ suivant les puissances croissantes il vient qu'il existe $(\nu_0,\ldots,\nu_{d_i-1})$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}, k^{d_i} = \nu_0 k(k-1)\cdots 1 + \nu_1(k-1)(k-2)\cdots 1 + \cdots + \nu_{d_i-1}1$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}k^{d_i}\lambda_i^k &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j j! k^j\lambda_i^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x\mapsto x^k\right)\right)(\lambda_i) \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x\mapsto\frac{1}{1-x}\right)\right)(\lambda_i) \quad \text{car la série converge normalement} \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j\left(1-\lambda_i\right)^{-1-j} \\ &< +\infty\end{aligned}$$

Autrement dit, il faut se limiter à des horizons de prévision raisonnables.

Application numérique :
On a ici pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(e_h) &= \sum_{i=0}^{h} \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{2^i}\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{h} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2\,\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\frac{1}{2^i}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1}{4^i}\right) \\
&= \left(\frac{2}{5}\right)^2 h\sigma_\epsilon^2 \;+\; \left(\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{1-\frac{1}{2^h}}{1-\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1-\frac{1}{4^h}}{1-\frac{1}{4}}\right)\sigma_\epsilon^2 \\
&= \frac{4}{25}\sigma_\epsilon^2\, h \;+\; \frac{12}{25}\left(2 - \frac{1}{2^h} - \frac{1}{4^h}\right)\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $h \geq 0$ $e_h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \epsilon_{t+h-i}$, et ϵ est un bruit blanc gaussien. Donc [4]

$$(X_t - {}_tX_{t+h}) = e_h \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2\right)\sigma_\epsilon^2\right)$$

Par conséquent un intervalle de confiance $I_\alpha(h)$ d'horizon h, qui est tel que

$$\mathbb{P}\left(X_{t+h} \in I_\alpha(h)\right) = 1 - \alpha$$

est

$$\boxed{I_\alpha(h) = \left[{}_tX_{t+h} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{\mathcal{N}(0,1)} \sqrt{\textstyle\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2}\,\sigma_\epsilon\right]}$$

où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{\mathcal{N}(0,1)}$ désigne le fractile à $1 - \frac{\alpha}{2}$ % de la loi normale centrée réduite.

Application numérique :
On a

$${}_tX_{t+2} = (2 \cdot 10 - 12) + \frac{1}{2^{2-1}}(12 - 10) = 9$$

et de plus

$$\mathbb{V}(e_2) \;=\; \left(a_0^2 + a_1^2\right)\sigma_\epsilon^2 \;=\; \left(1 + \left(\frac{7}{10}\right)^2\right) \cdot 1 \;=\; 1.49 \;\simeq\; 1.22^2$$

et donc

$$I_{95\%}(2) \simeq [\,7.78\,,\,10.22\,]$$

[4] La somme de deux normales indépendantes est une normale, d'espérance leur somme et de variance leur somme.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
{}_tX_{t+1} &= \mathbb{EL}\left(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \ldots\right) \\
&= \mathbb{EL}\left(\phi X_t + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t|X_t, X_{t-1}, \ldots\right) \\
&= \boxed{\phi X_t - \theta\epsilon_t}
\end{aligned}$$

car $\langle \epsilon_t, \ldots \rangle = \langle X_t, \ldots \rangle$
Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\epsilon_t &= (\mathbb{1} - \theta L)^{-1}(\mathbb{1} - \phi L)X_t \\
&= (\mathbb{1} - \phi L)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k L^k\right) \circ X_t \\
&= X_t + \sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty} \theta^{k-1}(\theta - \phi)X_{t-k}
\end{aligned}$$

Donc en définitive

$$\begin{aligned}
{}_tX_{t+1} &= (\phi - \theta)X_t - \theta\sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty} \theta^{k-1}(\theta - \phi)X_{t-k} \\
&= \sum_{k=\mathbf{0}}^{+\infty} \theta^k(\phi - \theta)X_{t-k} \\
&= \sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty} \theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t+\mathbf{1}-k}
\end{aligned}$$

et on pose donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_k = \theta^{k-1}(\phi - \theta)}$$

La série $\sum_{k\geq 1} a_k$ est alors absolument convergente car $|\theta| < 1$ car le modèle est sous forme canonique.

☞ Q2 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
{}_t\hat{X}_{t+1} &= \theta^0(\phi - \theta)X_t + \sum_{k=\mathbf{2}}^{t+1} \theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t+\mathbf{1}-k} \\
&= (\phi - \theta)X_t + \theta\sum_{k=\mathbf{1}}^{t} \theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t-k} \\
&= \boxed{(\phi - \theta)X_t + \theta\,{}_{t-1}\hat{X}_t}
\end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
e_{t+1} &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_{t+1} - \left((\phi-\theta)X_t - \theta\, {}_t\hat{X}_{t-1}\right)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left((X_{t+1} - \phi X_t) + \theta\left(X_t - {}_t\hat{X}_{t-1}\right)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left((\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t) + \theta\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\left(\mathbb{V}\left(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t\right) + 2\theta\mathbb{C}ov\left(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t\,,\, X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right) + \theta^2\mathbb{V}\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)\right) \\
&= (1+\theta^2) + \frac{2}{\sigma_\epsilon^2}\underbrace{\mathbb{C}ov\left(-\theta\epsilon_t, \theta X_t\right)}_{-\theta^2\sigma_\epsilon^2} + \theta^2 e_t \\
&= \boxed{(1-\theta^2) + \theta^2 e_t}
\end{aligned}
$$

☞ Q4 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \mathbb{V}\left(X_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left({X_t}^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right) \\
&= \phi^2\mathbb{E}\left(X_{t-1}^2\right) + 0 - 2\phi\theta\mathbb{E}\left(X_{t-1}\epsilon_{t-1}\right) + \mathbb{E}\left((\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right) \quad \text{car} \quad \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1} \\
&= \phi^2\gamma_X(0) - 2\theta\phi\sigma_\epsilon^2 + \left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}
$$

Par conséquent comme $|\phi| < 1$ (car le modèle est canonique) il vient

$$\boxed{\gamma_X(0) = \tfrac{1-2\theta\phi+\theta^2}{1-\phi^2}\sigma_\epsilon^2}$$

Par suite, on a

$$
\begin{aligned}
e_0 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_0 - {}_{-1}\hat{X}_0\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(X_0^2\right) \quad \text{car } {}_{-1}\hat{X}_0 = \mathbb{EL}\left(X_0|\emptyset\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right) = 0 \\
&= \frac{\gamma_X(0)}{\sigma_\epsilon^2} \\
&= \frac{1-2\theta\phi+\theta^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

Or par ailleurs $e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1-\theta^2)$ ce qui s'écrit encore

$$(e_{t+1} - 1) = \theta^2\left(e_t - 1\right)$$

de sorte que

$$e_t = \theta^{2t}(e_0 - 1) + 1$$

Donc en définitive

$$\boxed{e_t = 1 + \theta^{2t}\,\frac{(\theta-\phi)^2}{1-\phi^2}}$$

☞ Q5 En particulier, l'erreur absolue de la prévision d'horizon 1 tronquée $\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)\right)$ converge vers σ_ϵ^2 lorsque $t \to +\infty$, puisque $|\theta| < 1$ puisque le modèle est canonique.
Remarquons en outre que la **vitesse de convergence** est géométrique (*i.e.* rapide), et que l'erreur est toujours supérieure à σ_ϵ^2 si $\theta > 0$.
Notons enfin que l'**erreur maximale** $1 + \frac{(\theta-\phi)^2}{1-\phi^2}$ est une fonction croissante de $\theta \in]-1,1[$ et de $\phi \in]-1,1[$. [5]

☞ Q1 On a pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$X_t = (\phi+1)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$$

Construisons par récurrence $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(f(t))_{t\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$.

– On a $X_0 = \epsilon_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \phi+1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$, et on pose donc $f(0) = \begin{pmatrix} \phi+1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$

– On a

$$X_1 = (\phi+1)X_0 - \phi X_{-1} + \epsilon_1 - \theta\epsilon_0$$

Or par ailleurs $\epsilon_0 = \theta\epsilon_{-1} + X_0 - (\phi+1)X_{-1} + \phi X_{-2}$ et donc finalement

$$X_1 = (\phi+1-\theta)X_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

et on pose

$$a_1 = \phi + 1 - \theta \quad \text{et} \quad f(1) = \begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

– Soit alors $t \geq 2$ tel que $a_1, \ldots, a_t$ soient construits et $f(0), \ldots, f(t)$ définis ; supposons en outre que $\forall l \in [\![3, t]\!], a_l = \theta a_{l-1}$. [6]
Construisons alors a_{t+1} et $f(t+1)$ tels que $a_{t+1} = \theta a_t$ et $X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + Z \times f(t+1)$.

[5] Elle est décroissante en ϕ au-delà de $\frac{1}{\theta}$, mais $\phi < 1 < \frac{1}{\theta}$.

[6] Cette hypothèse, gratuite lorsque $t = 2$, est nécessaire conduire la récurrence dès que $t \geq 3$, car le calcul ci-dessous requiert la forme explicite des a_k pour $k < t$.

On a

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= (\phi+1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t \\ &= (\phi+1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta\left(X_t - \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} - Z \times f(t)\right) \\ &= (\phi+1-\theta)X_t + (\theta a_1 - \phi)X_{t-1} + \theta\sum_{k=2}^{t} a_k X_{t-k} + \theta Z \times f(t) + \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Posons donc $a_{t+1} = \theta a_t$ et $f(t+1) = \theta f(t)\,;$ alors par construction

$$X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + Z \times f(t+1)$$

ce qui achève la récurrence.
On construit ainsi $(a_k)_{k\geq 0}$ et f tels que $\forall t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$.

En outre, on a pour $k \geq 1$ $a_{k+1} = \theta^{k-1} a_2$ et pour $t \geq 1$ $f(t) = \theta^{t-1}\begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$.

En particulier, la série $\sum_k a_k$ est absolument convergente puisque $|\theta| < 1$ (le modèle étant sous forme canonique).
Par ailleurs pour $t \geq 1$

$$\|Z \times f(t)\|_2 \leq |\theta|^{t-1} \|Z \times f(1)\|_2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

car Z borné et $|\theta| < 1$, c'est-à-dire

$$Z \times f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$$

☞ Q2 On a pour $t \geq 2$

$$\begin{aligned}
{}_t\hat{X}_{t+1} &= \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+\mathbf{1}-k} \\
&= a_1 X_t + \sum_{k=2}^{t+1} a_k X_{t+\mathbf{1}-k} \\
&= a_1 X_t + \sum_{k=1}^{t} a_{k+1} X_{t-k} \\
&= a_1 X_t + \left(a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^{t} a_{k+\mathbf{1}} X_{t-k} \right) \\
&= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^{t} \theta^{(k+\mathbf{1})-2} a_2 X_{t-k} \\
&= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \sum_{k=2}^{t} \left(\theta^{k-2} a_2 \right) X_{t-k} \\
&= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \left({}_{t-1}\hat{X}_t - a_1 X_{t-1} \right) \\
&= \boxed{a_1 X_t + (a_2 - a_1) X_{t-1} + \theta\, {}_{t-1}\hat{X}_t}
\end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $t \geq 0$

$$X_{t+1} = (\phi + 1) X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc pour $t \geq 2$

$$X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1} = (\phi + 1 - a_1) X_t + (a_2 - a_1 - \phi) X_{t-1} + \theta\, {}_{t-1}\hat{X}_t + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

Or par définition de a, $a_1 = \phi + 1 - \theta$ et $a_2 = \theta a_1 - \phi$, donc

$$X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1} = \theta \left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t \right) + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc

$$e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1 - \theta^2)$$

Par conséquent

$$e_t = \theta^{2t}(e_0 - 1) + 1 = \theta^{2(t-1)} \left(\underbrace{\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E}\left(\left(X_1 - {}_0\hat{X}_1 \right)^2 \right)}_{e_1} - 1 \right) + 1$$

☞ Q4 Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(X_1 - {}_0\hat{X}_1\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left((\epsilon_1 + Z \times f(1))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((\epsilon_1 + \epsilon_{-1} + (\theta + \theta\phi - \phi)X_{-1} + \theta\phi X_{-2})^2\right) \\
&= \begin{pmatrix} (\theta + \theta\phi - \phi)^2 \\ \theta^2\phi^2 \\ (\theta^2 + 1) \\ \\ -2\theta\phi(\theta + \theta\phi - \phi) \\ -2\theta^2(\theta + \theta\phi - \phi) \\ 2\theta^3(\theta + \theta\phi - \phi) \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left(X_{-1}^2\right) \\ \mathbb{E}\left(X_{-2}^2\right) \\ \sigma_\epsilon^2 \\ \\ \mathbb{C}ov\left(X_{-1}, X_{-2}\right) \\ \mathbb{C}ov\left(X_{-1}, \epsilon_{-1}\right) \\ \mathbb{C}ov\left(X_{-2}, \epsilon_{-1}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi en général même si l'erreur de prévision absolue $X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t$ converge vers σ_ϵ^2, elle dépend à horizon fini non seulement de σ_ϵ^2 mais aussi de la variance-covariance des conditions initiales Z.

⋆
⋆ ⋆