ENSAE

ECOLE NATIONALE
DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Enoncé des travaux dirigés n°6

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
Guillaume.Lacote@ensae.fr
http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 15 février 2005

Enoncé de l'exercice 1

On considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant le modèle ARIMA canonique

$$(\mathbb{1} - L)^d \Theta(L) X = \Delta(L)\epsilon$$

de conditions initiales Z données[1] et orthogonales à $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$, bruit blanc de variance σ_ϵ^2. On s'intéresse à la prévision linéaire optimale d'horizon $h \geq 0$

$$_tX_{t+h} = \mathbb{EL}\left(X_{t+h} | X_t, X_{t-1}, \dots, X_0, Z\right)$$

☞ Q1 Montrer que $\left({}_tX_{t+h}\right)_{h>q}$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1-X)^d\Theta$.

Application numérique :

En déduire $\left({}_tX_{t+h}\right)_{h\in\mathbb{N}}$ pour $h \geq 1$ en fonction de X_t et ${}_tX_{t+1}$ lorsque $d = 1$, $\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}$
et $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$.

☞ Q2 Soit $e_h = X_{t+h} - {}_tX_{t+h}$ l'erreur de prévision d'horizon $h \geq 0$.

(a) Montrer que $e_h \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle$ pour $h \geq 0$.

(b) Montrer qu'il existe une suite $(a_h)_h$ telle que

$$\forall h \geq 0,\ e_h = a_0\epsilon_{t+h} + \dots + a_{h-1}\epsilon_{t+1}$$

et que $(a_h)_{h\geq q}$ suit la récurrence de polynôme $(1-\mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :

Calculer $(a_h)_h$ dans l'exemple précédent.

(c) Calculer $\left(\mathbb{V}(e_h)\right)_{h\in\mathbb{N}}$ et en donner un équivalent pour $h \to +\infty$ lorsque $d \geq 1$.

Application numérique :

Calculer $\left(\mathbb{V}(e_h)\right)_{h\in\mathbb{N}}$ dans l'exemple précédent.

☞ Q3 En supposant que ϵ est un bruit blanc gaussien, déterminer un intervalle de prévision de
d'horizon $h \geq 1$ fiable à 95%.

Application numérique :

Donner l'intervalle d'horizon 2 à 95% lorsque $x_t = 12$, ${}_tx_{t+1} = 10$ et $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

Enoncé de l'exercice 2

[1] Z est donc un vecteur comprenant $d + d°\Theta$ valeurs initiales de X et $d°\Delta$ valeurs initiales de ϵ.

Version du 20050121-11h02, révisée le 15 février 2005

■ Partie 1

On considère un processus X stationnaire vérifiant le modèle Arma(1,1) canonique

$$(\mathbb{1} - \phi L)X = (\mathbb{1} - \theta L)\epsilon$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.
On s'intéresse pour $t \in \mathbb{Z}$ à la prévision linéaire optimale d'horizon 1

$$_tX_{t+1} = \mathbb{EL}\left(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \ldots\right)$$

☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ telle que $_tX_{t+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t+1-k}$ et donner son terme général.

☞ Q2 L'observation de $(X_t)_{t<0}$ étant impossible, on définit pour $t \in \mathbb{N}$ la prévision linéaire empirique $_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$.
Exprimer $_t\hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t et $_{t-1}\hat{X}_t$.

☞ Q3 On définit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ l'erreur relative de la prévision tronquée.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t.

☞ Q4 Calculer $\gamma_X(0)$ puis e_0.
En déduire l'expression de $(e_t)_t$.

☞ Q5 Que dire de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ lorsque $t \to +\infty$?

■ Partie 2

On considère désormais à un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant le modèle Arima(1,1,1) canonique

$$(\mathbb{1} - L)(\mathbb{1} - \phi L)X = (\mathbb{1} - \theta L)\epsilon$$

de condition initiale $Z = (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1})$ orthogonale à $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ et une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{N},\ X_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$$

Montrer qu'en outre $Z \times f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$.

☞ Q2 On définit de nouveau la prévision linéaire empirique $_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+\mathbf{1}-k}$.
Exprimer $_t\hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t, X_{t-1} et $_{t-1}\hat{X}_t$.

☞ Q3 Soit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ l'erreur de prévision relative.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t, et en déduire l'expression de e_t.

☞ Q4 Que dire cette fois de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ lorsque $t \to +\infty$?