



Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Énoncé des travaux dirigés n°6

Guillaume Lacôte

 Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Enoncé de l'exercice 1

On considère un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifiant le modèle ARIMA canonique

$$(\mathbf{1} - L)^d \Theta(L)X = \Delta(L)\epsilon$$

de conditions initiales Z données¹ et orthogonales à $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$, bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

On s'intéresse à la prévision linéaire optimale d'horizon $h \geq 0$

$${}_t X_{t+h} = \mathbb{E}L(X_{t+h} | X_t, X_{t-1}, \dots, X_0, Z)$$

☞ Q1 Montrer que $({}_t X_{t+h})_{h \geq q}$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1 - X)^d \Theta$.

Application numérique :

En déduire $({}_t X_{t+h})_{h \in \mathbb{N}}$ pour $h \geq 1$ en fonction de X_t et ${}_t X_{t+1}$ lorsque $d = 1$, $\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$ et $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$.

☞ Q2 Soit $e_h = X_{t+h} - {}_t X_{t+h}$ l'erreur de prévision d'horizon $h \geq 0$.

(a) Montrer que $e_h \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle$ pour $h \geq 0$.

(b) Montrer qu'il existe une suite $(a_h)_h$ telle que

$$\forall h \geq 0, e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \dots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$$

et que $(a_h)_{h \geq q}$ suit la récurrence de polynôme $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :

Calculer $(a_h)_h$ dans l'exemple précédent.

(c) Calculer $(\mathbb{V}(e_h))_{h \in \mathbb{N}}$ et en donner un équivalent pour $h \rightarrow +\infty$ lorsque $d \geq 1$.

Application numérique :

Calculer $(\mathbb{V}(e_h))_{h \in \mathbb{N}}$ dans l'exemple précédent.

☞ Q3 En supposant que ϵ est un bruit blanc gaussien, déterminer un intervalle de prévision de X_t d'horizon $h \geq 1$ fiable à 95%.

Application numérique :

Donner l'intervalle d'horizon 2 à 95% lorsque $x_t = 12$, ${}_t x_{t+1} = 10$ et $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

Enoncé de l'exercice 2

¹ Z est donc un vecteur comprenant $d + d^\circ \Theta$ valeurs initiales de X et $d^\circ \Delta$ valeurs initiales de ϵ .

■ Partie 1

On considère un processus X stationnaire vérifiant le modèle ARMA(1,1) canonique

$$(\mathbb{1} - \phi L)X = (\mathbb{1} - \theta L)\epsilon$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

On s'intéresse pour $t \in \mathbb{Z}$ à la prévision linéaire optimale d'horizon 1

$${}_t X_{t+1} = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots)$$

- ☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ telle que ${}_t X_{t+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t+1-k}$ et donner son terme général.
- ☞ Q2 L'observation de $(X_t)_{t < 0}$ étant impossible, on définit pour $t \in \mathbb{N}$ la prévision linéaire empirique ${}_t \hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$.
Exprimer ${}_t \hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t et ${}_{t-1} \hat{X}_t$.
- ☞ Q3 On définit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left(\left(X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t \right)^2 \right)$ l'erreur relative de la prévision tronquée.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t .
- ☞ Q4 Calculer $\gamma_X(0)$ puis e_0 .
En déduire l'expression de $(e_t)_t$.
- ☞ Q5 Que dire de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E} \left(\left(X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t \right)^2 \right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?

■ Partie 2

On considère désormais à un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifiant le modèle ARIMA(1,1,1) canonique

$$(\mathbb{1} - L)(\mathbb{1} - \phi L)X = (\mathbb{1} - \theta L)\epsilon$$

de condition initiale $Z = (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1})$ orthogonale à $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$ bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

- ☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ et une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{N}, X_t = \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$$

Montrer qu'en outre $Z \times f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$.

- ☞ Q2 On définit de nouveau la prévision linéaire empirique ${}_t \hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$.
Exprimer ${}_t \hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t, X_{t-1} et ${}_{t-1} \hat{X}_t$.
- ☞ Q3 Soit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left(\left(X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t \right)^2 \right)$ l'erreur de prévision relative.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t , et en déduire l'expression de e_t .

☞ Q4 Que dire cette fois de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E} \left((X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)^2 \right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?
