

Séries temporelles linéaires
Enoncé et corrigé des travaux dirigés n°6

Guillaume Lacôte
 Bureau E03
 ✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
 ☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Enoncé de l'exercice 1

On considère un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifiant le modèle ARIMA canonique

$$(\mathbf{1} - L)^d \Theta(L)X = \Delta(L)\epsilon$$

de conditions initiales Z données¹ et orthogonales à $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$, bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .
 On s'intéresse à la prévision linéaire optimale d'horizon $h \geq 0$

$${}_t X_{t+h} = \mathbb{E}L(X_{t+h} | X_t, X_{t-1}, \dots, X_0, Z)$$

☞ Q1 Montrer que $({}_t X_{t+h})_{h > q}$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1 - X)^d \Theta$.

Application numérique :

En déduire $({}_t X_{t+h})_{h \in \mathbb{N}}$ pour $h \geq 1$ en fonction de X_t et ${}_t X_{t+1}$ lorsque $d = 1$, $\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{5}\mathbb{X})$ et $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$.

☞ Q2 Soit $e_h = X_{t+h} - {}_t X_{t+h}$ l'erreur de prévision d'horizon $h \geq 0$.

(a) Montrer que $e_h \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle$ pour $h \geq 0$.

(b) Montrer qu'il existe une suite $(a_h)_h$ telle que

$$\forall h \geq 0, e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \dots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$$

et que $(a_h)_{h \geq q}$ suit la récurrence de polynôme $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :

Calculer $(a_h)_h$ dans l'exemple précédent.

(c) Calculer $(\mathbb{V}(e_h))_{h \in \mathbb{N}}$ et en donner un équivalent pour $h \rightarrow +\infty$ lorsque $d \geq 1$.

Application numérique :

Calculer $(\mathbb{V}(e_h))_{h \in \mathbb{N}}$ dans l'exemple précédent.

☞ Q3 En supposant que ϵ est un bruit blanc gaussien, déterminer un intervalle de prévision de d'horizon $h \geq 1$ fiable à 95%.

Application numérique :

Donner l'intervalle d'horizon 2 à 95% lorsque $x_t = 12$, ${}_t x_{t+1} = 10$ et $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 1

¹ Z est donc un vecteur comprenant $d + d^\circ \Theta$ valeurs initiales de X et $d^\circ \Delta$ valeurs initiales de ϵ .

☞ Q1 Notons $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \mathbb{X}^i$ et $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^q \delta_i \mathbb{X}^i$.

Alors pour tout $h \geq 0$

$$X_{t+h} = - \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^q \delta_i \epsilon_{t+h-i}$$

et donc pour tout $h > q$

$$\begin{aligned} {}_t X_{t+h} &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_{t+h} | X_t, \dots, X_0, Z) \\ &= - \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \mathbb{E}\mathbb{L}(X_{t+h-i} | X_t, \dots, X_0, Z) + \sum_{i=0}^q \delta_i \mathbb{E}\mathbb{L} \left(\underbrace{\epsilon_{t+h-i} | X_t, \dots, X_0, Z}_{= (\epsilon_t, \dots, \epsilon_0, Z)} \right) \end{aligned}$$

car ϵ est l'innovation de X

$$= - \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i {}_t X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^q 0 \quad \text{car } h > q$$

Ainsi à t fixé $({}_t X_{t+h})_h$ suit pour $h > q$ la récurrence linéaire de polynôme caractéristique $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :

$\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$ est bien sous forme canonique car $2 > 1$ est sa seule racine, et il en va de même pour $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$.

Par ailleurs $(1 - \mathbb{X})\Theta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{3}{2}\mathbb{X} + \frac{1}{2}\mathbb{X}^2$ donc pour $h \geq 2$

$${}_t X_{t+h} = \frac{3}{2} {}_t X_{t+h-1} - \frac{1}{2} {}_t X_{t+h-2}$$

Donc il existe α, β tels que pour tout $h \geq 0$

$${}_t X_{t+h} = \alpha 1^h + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

Des valeurs initiales pour $h \in \{1, 2\}$ on tire alors

$$\begin{cases} h = 1 : & \alpha + \frac{1}{2}\beta = {}_t X_{t+1} \\ h = 2 : & \alpha + \frac{1}{4}\beta = {}_t X_{t+2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = & \frac{1}{3}(4{}_t X_{t+2} - {}_t X_{t+1}) \\ \beta = & \frac{4}{3}({}_t X_{t+1} - {}_t X_{t+2}) \end{cases}$$

et donc finalement

$$\forall h \geq 1, {}_t X_{t+h} = \frac{1}{3}(4{}_t X_{t+2} - {}_t X_{t+1}) + \frac{1}{3 \cdot 2^{h-2}}({}_t X_{t+1} - {}_t X_{t+2})$$

☞ Q2 (a) On a pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} e_h &= X_{t+h} - {}_t X_{t+h} \\ &= \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i (X_{t+h-i} - {}_t X_{t+h-i}) + \sum_{i=0}^{\min(q, h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \end{aligned}$$

en notant $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^q \delta_i \mathbb{X}^i$.²

Or

$$(X_{t+h-i} - {}_t X_{t+h-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq i \\ \epsilon_{h-i} & \text{si } h > i \end{cases}$$

donc

$$e_h = \sum_{i=1}^{\min(h, p+d)} \alpha_i \epsilon_{h-i} + \sum_{i=0}^{\min(q, h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i}$$

Procédons alors par récurrence sur $h \geq 0$:

- on a $e_0 = 0 \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle = \langle 0 \rangle$

- soit alors $h \geq 1$ tel que $\forall i < h, \epsilon_{h-i} \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h-i} \rangle$; alors

$$\begin{aligned} e_h &= \sum_{i=1}^{\min(h, p+d)} \alpha_i \underbrace{\epsilon_{t+h-i}}_{\in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h-i} \rangle} + \sum_{i=0}^{\min(q, h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\ &\in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Autre méthode :

On sait que $X_{t+h} \in \langle \epsilon_{t+h}, \dots \rangle$ car ϵ est l'innovation de X . Par ailleurs, $\mathbb{E}\mathbb{L}(Y | \epsilon_t, \dots)$ est la projection orthogonale de Y sur $\langle \epsilon_t, \dots \rangle$, $(Y - \mathbb{E}\mathbb{L}(Y | \epsilon_t, \dots)) \in \langle \epsilon_t, \dots \rangle^\perp$.

Or ϵ est un bruit blanc donc (ϵ_{t+h}, \dots) est une famille orthogonale, et donc dans $\langle \epsilon_{t+h}, \dots \rangle$ l'orthogonal de $\langle \epsilon_t, \dots \rangle$ est $\langle \epsilon_{t+h}, \dots, \epsilon_{t+1} \rangle$ de sorte que finalement

$$e_h = (X_{t+h} - {}_t X_{t+h}) \in \langle \epsilon_{t+1}, \dots, \epsilon_{t+h} \rangle$$

(b) On a $e_0 = 0$ et $e_1 = \epsilon_{t+1}$. Définissons donc par récurrence $(a_h)_{h \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_h &= \sum_{i=1}^{\min(h, p+d)} (\delta_i + \alpha_i a_{h-i}) \quad \text{si } h \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket \\ a_h &= \sum_{i=1}^{\min(h, p+d)} \alpha_i a_{h-i} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons alors par récurrence sur h que $\forall h \geq 1, e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \dots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$

- On a $e_1 = \epsilon_{t+1} = a_0 \epsilon_{t+1}$ puisque $a_0 = 1$ par définition.

² ϵ est l'innovation de X , donc $\langle X_{t-1}, \dots \rangle = \langle \epsilon_{t-1}, \dots \rangle$, donc il n'y a pas de terme en ϵ_{t+h-i} lorsque $h-i \leq 0$.

– Soit alors $h \geq 2$ tel que $\forall l \in \llbracket 0, h-1 \rrbracket$, $e_l = a_0 \epsilon_{t+l} + \dots + a_{l-1} \epsilon_{t+1}$; montrons que $e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \dots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$.

Alors

$$\begin{aligned} e_h &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i e_{h-i} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{(h-i)-1} a_j \epsilon_{t+(h-i)-j} \right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{1 \leq i \leq \min(h,p+d)} \sum_{i \leq l \leq h-1} \alpha_i a_{l-i} \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{1 \leq i \leq \min(h,p+d,l)} \alpha_i a_{l-i} \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \left(\sum_{1 \leq i \leq \min(l,p+d)} \alpha_i a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \left(\delta_k + \sum_{1 \leq i \leq \min(k,p+d)} \alpha_i a_{k-i} \right) \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=\min(q,h-1)+1}^{h-1} \left(\sum_{1 \leq i \leq \min(l,p+d)} \alpha_i a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} \\ &= \sum_{k=0}^{h-1} a_{h-k} \epsilon_{t+h-k} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Ainsi lorsque $h \geq q$, la suite $(a_h)_h$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1 - \mathbb{X})^d \Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :

On a tout d'abord

$$e_1 = \left(\frac{3}{2} X_t - \frac{1}{2} X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \frac{4}{5} \epsilon_t \right) - \left(\frac{3}{2} X_t - \frac{1}{2} X_{t-1} - \frac{4}{5} \epsilon_t \right) = \epsilon_{t+1}$$

ce dont on tire $a_0 = 1$.

De même

$$e_2 = \frac{3}{2} e_1 + \epsilon_{t+2} - \frac{4}{5} \epsilon_{t+1}$$

et donc $a_1 = \frac{3}{2} a_0 - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$

Puis pour $h \geq 3$ on a $a_h = \frac{3}{2} a_{h-1} - \frac{1}{2} a_{h-2}$. Or les racines de $1 - \frac{3}{2} \mathbb{X} - \frac{1}{2} \mathbb{X}^2$ sont 1 et $\frac{1}{2}$, donc il existe α, β tels que pour tout $h \geq 0$

$$a_h = \alpha 1^h + \beta \left(\frac{1}{2} \right)^h$$

et des valeurs initiales

$$\begin{cases} h = 0 : & \alpha + \beta = 1 \\ h = 1 : & \alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{7}{10} \end{cases}$$

on tire finalement

$$\forall h \geq 0, a_h = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \frac{1}{2^h}$$

(c) On a pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \mathbb{V} \left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k \epsilon_{t+h-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{h-1} (a_k^2 \mathbb{V}(\epsilon_{t+h-k})) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k^2 \right) \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer un équivalent en k de a_k , puis en h de $\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k^2 \right)$. Comme $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suit la récurrence de polynôme $(1 - \mathbb{X})\Theta(\mathbb{X})$ dont 1 est racine, on montre que $\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k^2 \right) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha h^{2d-1}$ avec $\alpha > 0$.

Notons en effet $\lambda_1, \dots, \lambda_r, r \leq p$, les racines de $\Theta(\mathbb{X})$,³ et soit $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ tels que $\forall h \geq q, a_h = \beta_0(h) 1^h + \beta_1(h) \lambda_1^h + \dots + \beta_r(h) \lambda_r^h$, avec $d^\circ \beta_0 = d-1$ et $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, d^\circ \beta_i \leq d-2$. Alors pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \sum_{k=0}^{h-1} \left(\beta_0(k) + \sum_{i=1}^r \beta_i(k) \lambda_i^k \right)^2 \sigma_\epsilon^2 \\ &= \sigma_\epsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)^2 + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) \beta_i(k) \lambda_i^k + \sum_{k=0}^{h-1} \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(k) \lambda_i^k \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Notons alors ρ le coefficient de plus haut degré ($d-1$) de β_0 ; ainsi comme $d \geq 1$ on

$\beta_0(h) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \rho h^{d-1}$. Soit par ailleurs $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$; montrons que $\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) \beta_i(k) \lambda_i^k = o\left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) \right)$.

Soit m_i un majorant de tous les coefficients de β_i (en valeur absolue), et notons $d_i = d^\circ \beta_i$

³Prises deux-à-deux distinctes; elles sont en outre toutes de module inférieur à 1, et notamment différentes de 1.

Alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) \beta_i(k) \lambda_i^k \right| &\leq \sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) (d_i m_i k^{d_i}) \lambda_i^k \\ &\leq d_i m_i \left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) \right) \left(\sum_{k=0}^{h-1} k^{d_i} \lambda_i^k \right) \end{aligned}$$

Enfin, comme $\sum_{k=0}^{h-1} k^{d_i} \lambda_i^k =_{h \rightarrow +\infty} O(1)$ ⁴ on a finalement

$$\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) \beta_i(k) \lambda_i^k =_{t \rightarrow +\infty} O \left(\sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k) \right)$$

De la même façon on a pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ $\sum_{k=0}^{h-1} (\beta_i(k) \lambda_i^k)^2 =_{h \rightarrow +\infty} O(1)$, et donc

$$\sum_{k=0}^{h-1} \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(k) \lambda_i^k \right)^2 \leq \max_i \sum_{k=0}^{h-1} r^2 (\beta_i(k) \lambda_i^k)^2 =_{h \rightarrow +\infty} O(1)$$

En définitive, comme $\beta_0(k)^2 \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \rho^2 k^{d-1}$ on a (par Césaro)

$$\mathbb{V}(e_h) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{h-1} \beta_0(k)^2 \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \rho^2 h^{2d-1} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} +\infty$$

⁴On a

$$\sum_{k=0}^{h-1} k^{d_i} \lambda_i^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k^{d_i} \lambda_i^k$$

Or en divisant $\sum k^{d_i}$ suivant les puissances croissantes il vient qu'il existe $(\nu_0, \dots, \nu_{d_i-1})$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, k^{d_i} = \nu_0 k(k-1) \dots (k-1) + \nu_1 (k-1)(k-2) \dots (k-2) + \dots + \nu_{d_i-1} 1$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} k^{d_i} \lambda_i^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j j! k^j \lambda_i^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} (x \mapsto x^k) \right) (\lambda_i) \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x \mapsto \frac{1}{1-x} \right) \right) (\lambda_i) \quad \text{car la série converge normalement} \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1} \nu_j (1-\lambda_i)^{-1-j} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Autrement dit, il faut se limiter à des horizons de prévision raisonnables.

Application numérique :

On a ici pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \sum_{i=0}^h \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \frac{1}{2^i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^h \left(\left(\frac{2}{5} \right)^2 + 2 \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5} \frac{1}{2^i} \right) + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \frac{1}{4^i} \right) \\ &= \left(\frac{2}{5} \right)^2 h \sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \frac{1 - \frac{1}{4^h}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \sigma_\epsilon^2 \\ &= \frac{4}{25} \sigma_\epsilon^2 h + \frac{12}{25} \left(2 - \frac{1}{2^h} - \frac{1}{4^h} \right) \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

⇨ Q3 On a pour $h \geq 0$ $e_h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \epsilon_{t+h-i}$, et ϵ est un bruit blanc gaussien. Donc ⁵

$$(X_t - {}_tX_{t+h}) = e_h \sim \mathcal{N} \left(0, \left(\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2 \right) \sigma_\epsilon^2 \right)$$

Par conséquent un intervalle de confiance $I_\alpha(h)$ d'horizon h , qui est tel que

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in I_\alpha(h)) = 1 - \alpha$$

est

$$I_\alpha(h) = \left[{}_tX_{t+h} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{\mathcal{N}(0,1)} \sqrt{\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2} \sigma_\epsilon \right]$$

où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{\mathcal{N}(0,1)}$ désigne le fractile à $1 - \frac{\alpha}{2}$ % de la loi normale centrée réduite.

Application numérique :

On a

$${}_tX_{t+2} = (2 \cdot 10 - 12) + \frac{1}{2^{2-1}} (12 - 10) = 9$$

et de plus

$$\mathbb{V}(e_2) = (a_0^2 + a_1^2) \sigma_\epsilon^2 = \left(1 + \left(\frac{7}{10} \right)^2 \right) \cdot 1 = 1.49 \simeq 1.22^2$$

et donc

$$I_{95\%}(2) \simeq [7.78, 10.22]$$

⁵La somme de deux normales indépendantes est une normale, d'espérance leur somme et de variance leur somme

*
* *

Enoncé de l'exercice 2

■ Partie 1

On considère un processus X stationnaire vérifiant le modèle ARMA(1,1) canonique

$$(\mathbf{1} - \phi L)X = (\mathbf{1} - \theta L)\epsilon$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

On s'intéresse pour $t \in \mathbb{Z}$ à la prévision linéaire optimale d'horizon 1

$${}_t X_{t+1} = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots)$$

- ☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ telle que ${}_t X_{t+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t+1-k}$ et donner son terme général.
- ☞ Q2 L'observation de $(X_t)_{t < 0}$ étant impossible, on définit pour $t \in \mathbb{N}$ la prévision linéaire empirique ${}_t \hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$.
Exprimer ${}_t \hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t et ${}_{t-1} \hat{X}_t$.
- ☞ Q3 On définit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left((X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t)^2 \right)$ l'erreur relative de la prévision tronquée.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t .
- ☞ Q4 Calculer $\gamma_X(0)$ puis e_0 .
En déduire l'expression de $(e_t)_t$.
- ☞ Q5 Que dire de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E} \left((X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t)^2 \right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?

■ Partie 2

On considère désormais à un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifiant le modèle ARIMA(1,1,1) canonique

$$(\mathbf{1} - L)(\mathbf{1} - \phi L)X = (\mathbf{1} - \theta L)\epsilon$$

de condition initiale $Z = (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1})$ orthogonale à $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$ bruit blanc de variance σ_ϵ^2 .

- ☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ et une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{N}, X_t = \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$$

Montrer qu'en outre $Z \times f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$.

- ☞ Q2 On définit de nouveau la prévision linéaire empirique ${}_t \hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$.
Exprimer ${}_t \hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t, X_{t-1} et ${}_{t-1} \hat{X}_t$.
- ☞ Q3 Soit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left((X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t)^2 \right)$ l'erreur de prévision relative.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t , et en déduire l'expression de e_t .
- ☞ Q4 Que dire cette fois de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E} \left((X_t - {}_{t-1} \hat{X}_t)^2 \right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?

Corrigé de l'exercice 2

- ☞ Q1 On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} {}_t X_{t+1} &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots) \\ &= \mathbb{E}\mathbb{L}(\phi X_t + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t | X_t, X_{t-1}, \dots) \\ &= \boxed{\phi X_t - \theta \epsilon_t} \end{aligned}$$

car $\langle \epsilon_t, \dots \rangle = \langle X_t, \dots \rangle$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= (\mathbf{1} - \theta L)^{-1} (\mathbf{1} - \phi L) X_t \\ &= (\mathbf{1} - \phi L) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k L^k \right) \circ X_t \\ &= X_t + \sum_{k=1}^{+\infty} \theta^{k-1} (\theta - \phi) X_{t-k} \end{aligned}$$

Donc en définitive

$$\begin{aligned} {}_t X_{t+1} &= (\phi - \theta) X_t - \theta \sum_{k=1}^{+\infty} \theta^{k-1} (\theta - \phi) X_{t-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k (\phi - \theta) X_{t-k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \theta^{k-1} (\phi - \theta) X_{t+1-k} \end{aligned}$$

et on pose donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$a_k = \theta^{k-1} (\phi - \theta)$

La série $\sum_{k \geq 1} a_k$ est alors absolument convergente car $|\theta| < 1$ car le modèle est sous forme canonique.

☞ Q2 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} {}_t\hat{X}_{t+1} &= \theta^0(\phi - \theta)X_t + \sum_{k=2}^{t+1} \theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t+1-k} \\ &= (\phi - \theta)X_t + \theta \sum_{k=1}^t \theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t-k} \\ &= \boxed{(\phi - \theta)X_t + \theta {}_{t-1}\hat{X}_t} \end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_{t+1} &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left((X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1})^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left((X_{t+1} - ((\phi - \theta)X_t - \theta {}_t\hat{X}_{t-1}))^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left(((X_{t+1} - \phi X_t) + \theta (X_t - {}_t\hat{X}_{t-1}))^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left(((\epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t) + \theta (X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t))^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \left(\mathbb{V}(\epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t) + 2\theta \text{Cov}(\epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t, X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t) + \theta^2 \mathbb{V}(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t) \right) \\ &= (1 + \theta^2) + \frac{2}{\sigma_\epsilon^2} \underbrace{\text{Cov}(-\theta \epsilon_t, \theta X_t)}_{-\theta^2 \sigma_\epsilon^2} + \theta^2 e_t \\ &= \boxed{(1 - \theta^2) + \theta^2 e_t} \end{aligned}$$

☞ Q4 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= \mathbb{V}(X_t) \\ &= \mathbb{E}(X_t^2) \\ &= \mathbb{E}((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1})^2) \\ &= \mathbb{E}((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1})^2) \\ &= \phi^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^2) + 0 - 2\phi\theta \mathbb{E}(X_{t-1}\epsilon_{t-1}) + \mathbb{E}((\epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1})^2) \quad \text{car } \epsilon_t \perp X_{t-1} \\ &= \phi^2 \gamma_X(0) - 2\phi\theta \sigma_\epsilon^2 + (1 + \theta^2) \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Par conséquent comme $|\phi| < 1$ (car le modèle est canonique) il vient

$$\boxed{\gamma_X(0) = \frac{1-2\theta\phi+\theta^2}{1-\phi^2} \sigma_\epsilon^2}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left((X_0 - {}_{-1}\hat{X}_0)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E}(X_0^2) \quad \text{car } {}_{-1}\hat{X}_0 = \mathbb{E}L(X_0|\emptyset) = \mathbb{E}(X_0) = 0 \\ &= \frac{\gamma_X(0)}{\sigma_\epsilon^2} \\ &= \frac{1 - 2\theta\phi + \theta^2}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

Or par ailleurs $e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1 - \theta^2)$ ce qui s'écrit encore

$$(e_{t+1} - 1) = \theta^2 (e_t - 1)$$

de sorte que

$$e_t = \theta^{2t} (e_0 - 1) + 1$$

Donc en définitive

$$\boxed{e_t = 1 + \theta^{2t} \frac{(\theta - \phi)^2}{1 - \phi^2}}$$

☞ Q5 En particulier, l'erreur absolue de la prévision d'horizon 1 tronquée $\mathbb{E} \left((X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t) \right)$ converge vers σ_ϵ^2 lorsque $t \rightarrow +\infty$, puisque $|\theta| < 1$ puisque le modèle est canonique.

Remarquons en outre que la **vitesse de convergence** est géométrique (*i.e.* rapide), et que l'erreur est toujours supérieure à σ_ϵ^2 si $\theta > 0$.

Notons enfin que l'**erreur maximale** $1 + \frac{(\theta - \phi)^2}{1 - \phi^2}$ est une fonction croissante de $\theta \in]-1, 1[$ de $\phi \in]-1, 1[$.⁶

☞ Q1 On a pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$X_t = (\phi + 1)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$$

Construisons par récurrence $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(f(t))_{t \in \mathbb{N}}$ tels que $\forall t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} + \epsilon_t + f(t)$.

- On a $X_0 = \epsilon_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \phi + 1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$, et on pose donc $f(0) = \begin{pmatrix} \phi + 1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$

- On a

$$X_1 = (\phi + 1)X_0 - \phi X_{-1} + \epsilon_1 - \theta \epsilon_0$$

Or par ailleurs $\epsilon_0 = \theta \epsilon_{-1} + X_0 - (\phi + 1)X_{-1} + \phi X_{-2}$ et donc finalement

$$X_1 = (\phi + 1 - \theta)X_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

⁶Elle est décroissante en ϕ au-delà de $\frac{1}{\theta}$, mais $\phi < 1 < \frac{1}{\theta}$.

et on pose

$$a_1 = \phi + 1 - \theta \quad \text{et} \quad f(1) = \begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

– Soit alors $t \geq 2$ tel que a_1, \dots, a_t soient construits et $f(0), \dots, f(t)$ définis; supposons en outre que $\forall l \in \llbracket 3, t \rrbracket, a_l = \theta a_{l-1}$.⁷

Construisons alors a_{t+1} et $f(t+1)$ tels que $a_{t+1} = \theta a_t$ et $X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + Z \times f(t+1)$.

On a

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= (\phi + 1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t \\ &= (\phi + 1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \left(X_t - \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} - Z \times f(t) \right) \\ &= (\phi + 1 - \theta)X_t + (\theta a_1 - \phi)X_{t-1} + \theta \sum_{k=2}^t a_k X_{t-k} + \theta Z \times f(t) + \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Posons donc $a_{t+1} = \theta a_t$ et $f(t+1) = \theta f(t)$; alors par construction

$$X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + Z \times f(t+1)$$

ce qui achève la récurrence.

On construit ainsi $(a_k)_{k \geq 0}$ et f tels que $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = \sum_{k=1}^t a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$.

En outre, on a pour $k \geq 1$ $a_{k+1} = \theta^{k-1} a_2$ et pour $t \geq 1$ $f(t) = \theta^{t-1} \begin{pmatrix} \theta\phi + \theta - \phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$.

En particulier, la série $\sum_k a_k$ est absolument convergente puisque $|\theta| < 1$ (le modèle étant sous forme canonique).

Par ailleurs pour $t \geq 1$

$$\|Z \times f(t)\|_2 \leq |\theta|^{t-1} \|Z \times f(1)\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

car Z borné et $|\theta| < 1$, c'est-à-dire

$$Z \times f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$$

⁷Cette hypothèse, gratuite lorsque $t = 2$, est nécessaire conduire la récurrence dès que $t \geq 3$, car le calcul ci-dessous requiert la forme explicite des a_k pour $k < t$.

☞ Q2 On a pour $t \geq 2$

$$\begin{aligned} {}_t\hat{X}_{t+1} &= \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} \\ &= a_1 X_t + \sum_{k=2}^{t+1} a_k X_{t+1-k} \\ &= a_1 X_t + \sum_{k=1}^t a_{k+1} X_{t-k} \\ &= a_1 X_t + \left(a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^t a_{k+1} X_{t-k} \right) \\ &= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^t \theta^{(k+1)-2} a_2 X_{t-k} \\ &= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \sum_{k=2}^t (\theta^{k-2} a_2) X_{t-k} \\ &= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \left({}_{t-1}\hat{X}_t - a_1 X_{t-1} \right) \\ &= \boxed{a_1 X_t + (a_2 - a_1) X_{t-1} + \theta {}_{t-1}\hat{X}_t} \end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $t \geq 0$

$$X_{t+1} = (\phi + 1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc pour $t \geq 2$

$$X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1} = (\phi + 1 - a_1)X_t + (a_2 - a_1 - \phi)X_{t-1} + \theta {}_{t-1}\hat{X}_t + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

Or par définition de a , $a_1 = \phi + 1 - \theta$ et $a_2 = \theta a_1 - \phi$, donc

$$X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1} = \theta \left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t \right) + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc

$$e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1 - \theta^2)$$

Par conséquent

$$e_t = \theta^{2t}(e_0 - 1) + 1 = \theta^{2(t-1)} \left(\underbrace{\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left((X_1 - {}_0\hat{X}_1)^2 \right)}_{e_1} - 1 \right) + 1$$

☞ Q4 Enfin,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left((X_1 - {}_0\hat{X}_1)^2 \right) &= \mathbb{E} \left((\epsilon_1 + Z \times f(1))^2 \right) \\
 &= \mathbb{E} \left((\epsilon_1 + \epsilon_{-1} + (\theta + \theta\phi - \phi)X_{-1} + \theta\phi X_{-2})^2 \right) \\
 &= \begin{pmatrix} (\theta + \theta\phi - \phi)^2 \\ \theta^2\phi^2 \\ (\theta^2 + 1) \\ -2\theta\phi(\theta + \theta\phi - \phi) \\ -2\theta^2(\theta + \theta\phi - \phi) \\ 2\theta^3(\theta + \theta\phi - \phi) \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_{-1}^2) \\ \mathbb{E}(X_{-2}^2) \\ \sigma_\epsilon^2 \\ \text{Cov}(X_{-1}, X_{-2}) \\ \text{Cov}(X_{-1}, \epsilon_{-1}) \\ \text{Cov}(X_{-2}, \epsilon_{-1}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi en général même si l'erreur de prévision absolue $X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t$ converge vers σ_ϵ^2 , elle dépend à horizon fini non seulement de σ_ϵ^2 mais aussi de la variance-covariance des conditions initiales Z .

*
* *