

Séries temporelles linéaires
Énoncé des travaux dirigés n°7

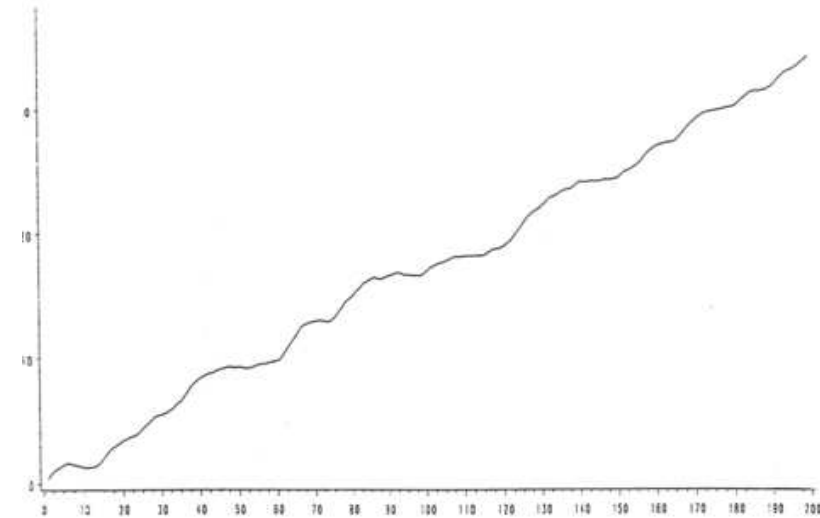
Guillaume Lacôte
Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Énoncé de l'exercice 1

On considère une série réelle observée $(y_t)_{t \in [0, 200]}$ pour laquelle on cherche une représentation stationnaire, et dont la représentation est la suivante :



☞ Q1 Justifier le modèle où y est la réalisation d'un processus Y non-stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 à déterminer.

☞ Q2 Montrer qu'il existe un polynôme Φ^* tel que Y vérifie

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \Phi^*(L)\Delta Y_t + \epsilon_t$$

où $\Delta = \mathbf{1} - L$.

☞ Q3 On réalise alors la régression de ΔY_t sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-8} \rangle$; l'estimation des paramètres est la suivante (où LX désigne la série $(Y_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$ et LY_i désigne la série $(\Delta Y_{t-i})_{t \in \mathbb{Z}}$):

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	10	2.16857	0.21686	20.901	0.0001
Error	179	1.85724	0.01038		
C Total	189	4.02581			

Root MSE	Dep Mean	C.V.	R-square	Adj R-sq
0.10186	0.17388	58.58278	0.5387	0.5129

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > t
INTERCEP	1	0.063825	0.02139593	2.983	0.0033
LX	1	0.006102	0.00204649	2.982	0.0033
LY1	1	-0.036870	0.01233214	-2.990	0.0032
LY2	1	0.727153	0.07300056	9.961	0.0001
LY3	1	-0.050103	0.09109175	-0.550	0.5830
LY4	1	-0.101392	0.09065962	-1.649	0.1009
LY5	1	-0.149478	0.09078450	-1.117	0.2656
LY6	1	-0.000012056	0.09050397	-0.000	0.9999
LY7	1	-0.043771	0.08985815	-0.487	0.6268
LY8	1	-0.0000901	0.08964794	-0.010	0.9920
LY8	1	0.077040	0.07315238	1.053	0.2937

La modélisation proposée est-elle raisonnable ?

Q4 Justifier le modèle où y est la réalisation d'un processus Y stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

On s'appuiera pour ce faire sur

(a) Le test de $\phi \Delta Y_{t-4} = \dots = \phi \Delta Y_{t-8} = 0$ dans le modèle à 8 retards :

```
The SAS System
Dependent Variable: Y
Test:
      Numerator:    0.0081  DF:    5  F value:    0.7841
      Denominator: 0.010276 DF:   179 Prob>F:    0.5624
```

(b) La régression de ΔY_t sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-3} \rangle$:

```
Analysis of Variance
Source      DF      Sum of Squares      Mean Square      F Value      Prob>F
Model       7          2.24814          0.32116          36.277          0.0001
Error      182          1.24814          0.00686
C Total    189          3.49628

Root MSE    0.1703
Dep Mean    0.15794
C.V.        68.06933

Parameter Estimates
Variable    DF      Parameter Estimate      Standard Error      T for H0: Parameter=0      Prob > |t|
INTERCEP   1          0.062633          0.01847919          3.389          0.0009
T           1          0.005271          0.00187706          2.808          0.0055
LX          1          -0.031431          0.01128996          -2.786          0.0059
LY1         1          0.740109          0.07085748          10.445          0.0001
LY2         1          -0.060810          0.08866608          -0.686          0.4938
LY3         1          0.144091          0.08863452          1.625          0.1057
```

(c) Le test de $\phi \Delta Y_{t-2} = \dots = \phi \Delta Y_{t-8} = 0$ dans le modèle à 8 retards :

```
The SAS System
Dependent Variable: Y
Test:
      Numerator:    0.0068  DF:    7  F value:    0.6597
      Denominator: 0.010376 DF:   179 Prob>F:    0.7059
```

(d) La régression de ΔY_t sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1} \rangle$:

```
Analysis of Variance
Source      DF      Sum of Squares      Mean Square      F Value      Prob>F
Model       3          2.22742          0.74247          71.588          0.0001
Error      193          2.00731          0.01040
C Total    196          4.23473

Root MSE    0.10198
Dep Mean    0.17070
C.V.        59.74365

R-square    0.5260
Adj R-sq   0.5186

Parameter Estimates
Variable    DF      Parameter Estimate      Standard Error      T for H0: Parameter=0      Prob > |t|
INTERCEP   1          0.057473          0.01745812          3.292          0.0012
T           1          0.005824          0.00171041          3.405          0.0008
LX          1          -0.034680          0.01028056          -3.373          0.0009
LY1         1          0.719836          0.04962822          14.505          0.0001
```

(e) Les auto-corrélations directes du modèle final

```
Autocorrelations
Lag Covariance Correlation
0 0.010189 1.00000
1 0.0001062 0.01028
2 -0.0004064 -0.03989
3 -0.0011716 -0.11698
4 -0.0002871 -0.02932
5 -0.0001937 -0.00198
6 -0.0004445 -0.04382
7 -0.0003096 -0.03041
8 0.00047225 0.04625
9 0.0003036 0.02968
10 -0.0009779 -0.00961
11 0.0008549 0.00839
12 0.0005212 0.00510
13 0.0007828 0.00768
14 0.00032883 -0.03257
15 0.00058924 0.05785
16 -0.0004947 -0.00929
17 0.00019926 0.01956
18 -0.0013391 -0.13162
19 0.00028753 0.00282
20 0.0000309 0.00014
21 -0.0006792 -0.06666
22 0.00009193 0.00935
23 -0.0006891 -0.06566
24 0.0002934 0.02701
```

(f) Les auto-corrélations inverses du modèle final

```
Inverse Autocorrelations
Lag Correlation
1 -0.0552
2 0.03347
3 0.02202
4 0.02543
5 -0.06444
6 -0.05885
7 0.05189
8 -0.03736
9 -0.06726
10 0.02248
11 -0.04162
12 0.02220
13 0.07866
14 -0.00582
15 -0.00996
16 0.00537
17 -0.02800
18 0.12947
19 -0.00012
20 -0.01547
21 0.04519
22 -0.09868
23 0.08316
24 -0.04172
```

(g) Les auto-corrélations partielles du modèle final

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0.01380																								
2	-0.06008																								
3	0.11632																								
4	-0.02618																								
5	-0.00875																								
6	-0.05951																								
7	-0.04355																								
8	0.04756																								
9	0.05607																								
10	0.00167																								
11	-0.07362																								
12	-0.00746																								
13	-0.07370																								
14	0.02050																								
15	0.06359																								
16	0.01179																								
17	0.02093																								
18	-0.14741																								
19	-0.02405																								
20	-0.01415																								
21	-0.01533																								
22	-0.09851																								
23	-0.08730																								
24	0.04548																								

(h) Le test de Porte-Manteau du bruit blanc du modèle final :

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi Square	DF	Prob	Autocorrelations									
8	3.58	6	0.733	0.014	-0.040	0.115	-0.020	-0.019	-0.044	0.084	0.086		
12	6.22	12	0.905	-0.049	0.046	0.029	-0.010	0.084	0.084	0.084	0.084		
18	12.30	18	0.851	-0.077	0.032	0.058	-0.009	0.020	-0.131	0.020	0.020		
24	16.75	24	0.859	0.028	0.009	-0.067	0.097	-0.066	0.027	0.027	0.027		

Q5 Montrer que le modèle retenu s'écrit

$$(1 - \rho L)Y_t = \mu + \beta t + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

et exprimer ρ en fonction de ϕ .

Q6 Tester l'hypothèse " $\mathcal{H}_0^1 : \beta = 0$ et $\rho = 1$ " en utilisant les tables suivantes :

(a)

Dependent Variable: Y	0.8687	DF: 2	F value: 5.8394
Test: Numerator:	0.010401	DF: 193	Prob>F: 0.0034
Denominator:	0.010401	DF: 193	Prob>F: 0.0034

TABLE I
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF τ_{α} FOR $(\alpha, \rho) = (0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$.
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.20	2.61	2.97	3.41
50	2.18	2.56	2.89	3.28
100	2.17	2.54	2.86	3.22
250	2.16	2.53	2.84	3.19
500	2.16	2.52	2.83	3.18
∞	2.16	2.52	2.83	3.18
s.e.	0.003	0.004	0.006	0.008

TABLE II
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF τ_{α} FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$.
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.77	3.20	3.59	4.05
50	2.75	3.14	3.47	3.87
100	2.73	3.11	3.42	3.78
250	2.73	3.09	3.39	3.74
500	2.72	3.08	3.38	3.72
∞	2.72	3.08	3.38	3.71
s.e.	0.004	0.005	0.007	0.008

TABLE III
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF τ_{β} FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$.
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.39	2.83	3.25	3.74
50	2.38	2.81	3.18	3.60
100	2.38	2.79	3.14	3.53
250	2.38	2.79	3.12	3.49
500	2.38	2.78	3.11	3.48
∞	2.38	2.78	3.11	3.45
s.e.	0.004	0.005	0.006	0.009

TABLE V
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF Φ_2 FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$.

Sample size n	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.61	0.75	0.89	1.10	4.67	5.68	6.75	8.21
50	0.62	0.77	0.91	1.12	4.31	5.13	5.94	7.02
100	0.63	0.77	0.92	1.12	4.16	4.88	5.59	6.50
250	0.63	0.77	0.92	1.13	4.07	4.75	5.40	6.22
500	0.63	0.77	0.92	1.13	4.05	4.71	5.35	6.15
∞	0.63	0.77	0.92	1.13	4.03	4.68	5.31	6.09
s.e.	0.003	0.003	0.003	0.003	0.01	0.02	0.03	0.05

(b)

(c)

TABLE IV
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF Φ_1 FOR $(\alpha, \rho) = (0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$.

Sample size n	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.29	0.38	0.49	0.65	4.12	5.18	6.30	7.88
50	0.29	0.39	0.50	0.66	3.94	4.86	5.80	7.06
100	0.29	0.39	0.50	0.67	3.86	4.71	5.57	6.70
250	0.30	0.39	0.51	0.67	3.81	4.63	5.45	6.52
500	0.30	0.39	0.51	0.67	3.79	4.61	5.41	6.47
∞	0.30	0.40	0.51	0.67	3.78	4.59	5.38	6.43
s.e.	0.002	0.002	0.002	0.002	0.01	0.02	0.03	0.05

TABLE VI
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF Φ_2 FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$.

Sample size n	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.74	0.90	1.08	1.31	5.91	7.24	8.65	10.50
50	0.76	0.93	1.11	1.37	5.61	6.73	7.81	9.48
100	0.76	0.94	1.12	1.38	5.47	6.49	7.44	8.88
250	0.76	0.94	1.13	1.39	5.39	6.34	7.25	8.58
500	0.76	0.94	1.13	1.39	5.36	6.30	7.20	8.48
∞	0.77	0.94	1.13	1.39	5.34	6.25	7.16	8.42
s.e.	0.004	0.004	0.003	0.004	0.015	0.020	0.032	0.05

(d)

TABLE B.5
Critical Values for the Phillips-Perron Z_{ρ} Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated OLS Autoregressive Coefficient

Sample size T	Probability that $T(\hat{\rho} - 1)$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
Case 1								
25	-11.9	-9.3	-7.3	-5.3	1.01	1.40	1.79	2.28
50	-12.9	-9.9	-7.7	-5.5	0.97	1.35	1.70	2.16
100	-13.3	-10.2	-7.9	-5.6	0.95	1.31	1.65	2.09
250	-13.6	-10.3	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.62	2.04
500	-13.7	-10.4	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.61	2.04
∞	-13.8	-10.5	-8.1	-5.7	0.93	1.28	1.60	2.03
Case 2								
25	-17.2	-14.6	-12.5	-10.2	-0.76	0.01	0.65	1.40
50	-18.9	-15.7	-13.3	-10.7	-0.81	-0.07	0.53	1.22
100	-19.8	-16.3	-13.7	-11.0	-0.83	-0.10	0.47	1.14
250	-20.3	-16.6	-14.0	-11.2	-0.84	-0.12	0.43	1.09
500	-20.5	-16.8	-14.0	-11.2	-0.84	-0.13	0.42	1.06
∞	-20.7	-16.9	-14.1	-11.3	-0.85	-0.13	0.41	1.04
Case 4								
25	-22.5	-19.9	-17.9	-15.6	-3.66	-2.51	-1.53	-0.43
50	-25.7	-22.4	-19.8	-16.8	-3.71	-2.60	-1.66	-0.65
100	-27.4	-23.6	-20.7	-17.5	-3.74	-2.62	-1.73	-0.75
250	-28.4	-24.4	-21.3	-18.0	-3.75	-2.64	-1.78	-0.82
500	-28.9	-24.8	-21.5	-18.1	-3.76	-2.65	-1.78	-0.84
∞	-29.5	-25.1	-21.8	-18.3	-3.77	-2.66	-1.79	-0.85

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.
Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 372

TABLE B.6
Critical Values for the Phillips-Perron Z_{ρ} Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated OLS t Statistic

Sample size T	Probability that $(\hat{\beta} - 1)/\hat{\sigma}_{\epsilon}$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
Case 1								
25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60	0.92	1.33	1.70	2.10
50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61	0.91	1.31	1.66	2.06
100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61	0.90	1.29	1.64	2.02
250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.29	1.63	2.01
500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
∞	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
Case 2								
25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.63	-0.37	0.00	0.34	0.29
50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60	-0.40	-0.03	0.29	0.24
100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-0.42	-0.05	0.26	0.21
250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57	-0.42	-0.06	0.24	0.20
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57	-0.43	-0.07	0.24	0.20
∞	-3.43							

Enoncé de l'exercice 2

On considère un processus stationnaire multivarié $X \in ((\mathbb{R}^n)^\Omega)^{\mathbb{Z}}$, $n \geq 2$, qui suit le modèle auto-régressif

$$\Phi(L)X = \epsilon$$

où ϵ est un bruit blanc de variance-covariance Σ supposée définie positive. On suppose en outre que le modèle est sous forme canonique, c'est-à-dire que les racines de $Det\Phi$ sont toutes de module strictement supérieur à un.

On se donne $m \in [1, n - 1]$ et on note $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow m \\ \downarrow n - m \end{matrix}$; on cherche à donner un sens à l'expression "y est la cause x".¹

Dans la suite pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée $A = \begin{pmatrix} A^{1,1} & A^{1,2} \\ A^{2,1} & A^{2,2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow m \\ \downarrow n - m \end{matrix}$.

Partie 1 Définition de la notion de causalité

☞ Q1 A un instant donné, l'intuition suggère que si X_t^2 cause X_t^1 alors X_t^2 intervient significativement dans la valeur de X_t^1 ; en particulier la prévision optimale de X_t^1 n'est dans ce cas pas la même selon que l'on connaît X_t^2 ou pas. On dit donc que X_t^2 ne cause pas instantanément X_t^1 au sens de Granger, et on note $X^2 \not\sim X^1$, ssi $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots)$

- (a) Montrer que $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots) + \mathbb{E}\mathbb{L}(\epsilon_t^1 | \epsilon_t^2)$
- (b) Montrer que

$$X_t^2 \not\sim X_t^1 \Leftrightarrow \Sigma^{1,2} = (0) \Leftrightarrow X_t^1 \not\sim X_t^2$$

(on dit dans ce cas par symétrie que X^2 et X^1 ne se causent pas instantanément au sens de Granger).

☞ Q2 Par extension on dit alors que X^2 ne cause pas globalement X^1 , ou simplement que X^2 ne cause pas X^1 au sens de Granger (ce que l'on note $X^2 \not\sim X^1$) ssi

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}^1, \dots)$$

On cherche à montrer que

$$X^2 \not\sim X^1 \Leftrightarrow \Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$$

(où $\Phi(\mathbb{X})^{1,2}$ désigne le bloc supérieur droit du polynôme matriciel $\Phi(\mathbb{X})$).

¹La démarche proposée est tirée (de façon très simplifiée) des travaux de Clive W.J. Granger, co-lauréat avec Robert F. Engle du prix Nobel d'économie 2003. C. Granger fut lauréat non pas pour la notion de causalité qu'il définit (utilisée pour établir la thèse polémique du réchauffement de la planète), mais pour ses résultats de cointégration. Voir <http://www.nobel.se/economics/laureates/2003/ecoadv.pdf>

- (a) Montrer tout d'abord que $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0) \rightarrow X^2 \not\sim X^1$.
- (b) Ecrire dans le cas général la décomposition de Wold de X^1 sur $\langle \epsilon^1, \epsilon^2 \rangle$.
- (c) On suppose que $X^2 \not\sim X^1$; montrer qu' ϵ^1 est alors l'innovation de X^1 .
- (d) En déduire que si $X^2 \not\sim X^1$, alors $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$.

Partie 2 Test de la notion de causalité

On se place dans le cas où $m = n - m = 1$, et on note $p = d^\circ\Phi$.
On suppose de plus que $\Phi(0) = Id$.

☞ Q1 Montrer que X vérifie aussi le modèle

$$\Psi(L)X = \eta$$

pour un certain polynôme matriciel Ψ (de degré p) et un bruit blanc η à déterminer

☞ Q2 Montrer que la régression \mathcal{R} par les moindres carrés de X_t sur $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-p} \rangle$ est équivalente aux deux estimations séparées \mathcal{R}^1 de X_t^1 sur $\langle X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \dots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \rangle$ et \mathcal{R}^2 de X_t^2 sur $\langle X_t^1, X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \dots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \rangle$.

☞ Q3 On considère l'hypothèse \mathcal{H}_0 : " $X^1 \not\sim X^2$ ".

Réécrire les régressions \mathcal{R}^1 et \mathcal{R}^2 sous \mathcal{H}_0 .

Montrer qu'à supposer qu' ϵ^1 est gaussien, le test de l'hypothèse \mathcal{H}_0 se ramène à un test Student que l'on explicitera.

☞ Q4 On considère l'hypothèse \mathcal{H}_0^* : " $X^2 \not\sim X^1$ ".

En supposant qu' ϵ est gaussien, proposer une procédure de test de \mathcal{H}_0^* .