



Deuxième année  
2005-2005

Séries temporelles linéaires  
*Énoncé des travaux dirigés n° 7*

Guillaume Lacôte

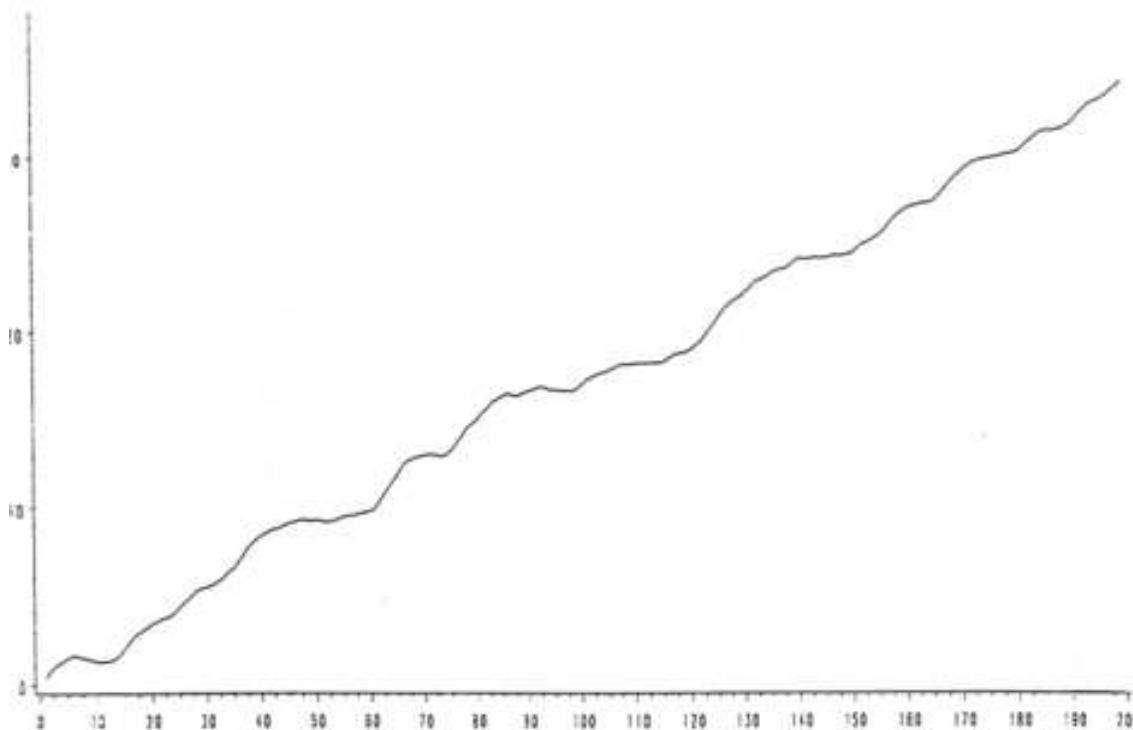
 Bureau **E03**

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Enoncé de l'exercice 1
------------------------

On considère une série réelle observée  $(y_t)_{t \in [0, 200]}$  pour laquelle on cherche une représentation stationnaire, et dont la représentation est la suivante :



⇒ Q1 Justifier le modèle où  $y$  est la réalisation d'un processus  $Y$  non-stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_\epsilon^2$  à déterminer.

⇒ Q2 Montrer qu'il existe un polynôme  $\Phi^*$  tel que  $Y$  vérifie

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \Phi^*(L)\Delta Y_t + \epsilon_t$$

où  $\Delta = \mathbb{1} - L$ .

⇒ Q3 On réalise alors la régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-8} \rangle$ ; l'estimation des paramètres est la suivante (où  $LX$  désigne la série  $(Y_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $LY^i$  désigne la série  $(\Delta Y_{t-i})_{t \in \mathbb{Z}}$ ) :

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	10	2.16857	0.21686	20.901	0.0001
Error	179	1.85724	0.01038		
C Total	189	4.02581			
Root MSE	0.10186	R-square	0.5387		
Dep Mean	0.17388	Adj R-sq	0.5129		
C.V.	58.58278				

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob >  t
INTERCEP	1	0.063825	0.02139593	2.983	0.0033
T	1	0.006102	0.00204649	2.982	0.0033
LX	1	-0.036870	0.01233214	-2.990	0.0032
LY1	1	0.727153	0.07300056	9.961	0.0001
LY2	1	-0.050103	0.09109175	-0.550	0.5830
LY3	1	0.149478	0.09065962	1.649	0.1009
LY4	1	-0.101392	0.09078450	-1.117	0.2656
LY5	1	-0.000012056	0.09050397	-0.000	0.9999
LY6	1	-0.043771	0.08985815	-0.487	0.6268
LY7	1	-0.000901	0.08964794	-0.010	0.9920
LY8	1	0.077040	0.07315238	1.053	0.2937

La modélisation proposée est-elle raisonnable ?

☞ Q4 Justifier le modèle où  $y$  est la réalisation d'un processus  $Y$  stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

On s'appuiera pour ce faire sur

(a) Le test de  $\phi_{\Delta Y_{t-4}} = \dots = \phi_{\Delta Y_{t-8}} = 0$  dans le modèle à 8 retards :

```

The SAS System
Dependent Variable: Y
Test: Numerator: 0.0081 DF: 5 F value: 0.7861
Denominator: 0.010376 DF: 179 Prob>F: 0.5624
    
```

(b) La régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-3} \rangle$  :

```

Analysis of Variance
Source DF Sum of Squares Mean Square F Value Prob>F
Model 7 2.24814 0.32116 36.277 0.0001
Error 87 24861 0.28347
Total 94 27072

Root MSE 0.53239 R-square 0.9379
Dep Mean 0.16594 Adj R-sq 0.9331
C.V. 60.06933

Parameter Estimates
Variable DF Parameter Estimate Standard Error T for H0: Parameter=0 Prob > |t|
INTERCEP 1 0.062633 0.01847919 3.389 0.0009
T 1 0.005271 0.00187704 2.808 0.0055
LX 1 -0.031451 0.01128994 -2.786 0.0059
LY1 1 0.740109 0.07085748 10.445 0.0001
LY2 1 -0.060810 0.08868608 -0.686 0.4938
LY3 1 0.144091 0.08863452 1.626 0.1057
    
```

(c) Le test de  $\phi_{\Delta Y_{t-2}} = \dots = \phi_{\Delta Y_{t-8}} = 0$  dans le modèle à 8 retards :

```

The SAS System
Dependent Variable: Y
Test: Numerator: 0.0068 DF: 7 F value: 0.6597
Denominator: 0.010376 DF: 179 Prob>F: 0.7059
    
```

(d) La régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1} \rangle$  :

```

Analysis of Variance
Source          DF      Sum of Squares      Mean Square      F Value      Prob>F
Model           3        2.22742            0.74247         71.388        0.0001
Error          193        2.00731            0.01040
C Total        196        4.23473

Root MSE      0.10198      R-square         0.5260
Dep Mean     0.17070      Adj R-sq        0.5186
C.V.         59.74365

Parameter Estimates
Variable DF      Parameter Estimate      Standard Error      T for H0: Parameter=0      Prob > |T|
INTERCEP 1        0.057473              0.01745812          3.292                    0.0012
T         1        0.005824              0.00171041          3.405                    0.0008
LX        1       -0.034680              0.01028056          -3.373                   0.0009
LY1       1        0.719836              0.04962822         14.505                   0.0001
    
```

(e) Les auto-corrélations directes du modèle final

```

Autocorrelations
Lag Covariance Correlation
0 0.010189 1.00000
1 0.00014062 0.01380
2 -0.0004064 -0.03989
3 0.0011716 0.11498
4 -0.0002071 -0.02032
5 -0.0001937 -0.01901
6 -0.0004465 -0.04382
7 -0.0005005 -0.04911
8 0.00047225 0.04635
9 0.00030036 0.02948
10 -0.0009979 -0.00961
11 0.00085498 0.08391
12 0.00006212 0.00610
13 -0.0007829 -0.07686
14 0.00032983 0.03237
15 0.00058924 0.05785
16 -0.0000947 -0.00929
17 0.00019926 0.01956
18 -0.0013371 -0.13142
19 0.00028753 0.02822
20 0.00009309 0.00914
21 -0.0006792 -0.06666
22 0.0009193 0.09129
23 -0.0006671 -0.06566
24 0.00027934 0.02741
    
```

" " marks two standard errors

(f) Les auto-corrélations inverses du modèle final

```

Inverse Autocorrelations
Lag Correlation
1 -0.05452
2 0.03347
3 0.03305
4 0.02549
5 -0.05694
6 -0.05585
7 0.05189
8 -0.03736
9 -0.06734
10 -0.02248
11 -0.04162
12 0.02220
13 0.07866
14 -0.00582
15 -0.09994
16 0.00537
17 -0.02800
18 0.12947
19 -0.00012
20 -0.01547
21 0.03619
22 -0.09868
23 0.08316
24 -0.04172
    
```

(g) Les auto-corrélations partielles du modèle final

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	0.01380																						
2	-0.04008											*											
3	0.11632											*	*										
4	-0.02618											*											
5	-0.00875											*											
6	-0.05951											*											
7	-0.04355											*											
8	0.04756											*											
9	0.03607											*											
10	0.00167											*											
11	0.07362											*											
12	-0.00746											*											
13	-0.07370											*											
14	0.02050											*											
15	0.06359											*											
16	0.01179											*											
17	0.02093											*											
18	-0.14741											***											
19	0.02405											*											
20	-0.01415											*											
21	-0.01533											*											
22	0.09851											*	*										
23	-0.08730											*	*										
24	0.04548											*	*										

(h) Le test de Porte-Manteau du bruit blanc du modèle final :

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi Square	DF	Prob	Autocorrelations																			
6	3.58	6	0.733	0.014	-0.040	0.115	-0.020	-0.019	-0.044														
12	6.22	12	0.905	-0.049	0.046	0.029	-0.010	0.084	0.006														
18	12.30	18	0.831	-0.077	0.032	0.058	-0.009	0.020	-0.131														
24	16.75	24	0.859	0.028	0.009	-0.067	0.097	-0.066	0.027														

Q5 Montrer que le modèle retenu s'écrit

$$(1 - \rho L)Y_t = \mu + \beta t + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

et exprimer  $\rho$  en fonction de  $\phi$ .

Q6 Tester l'hypothèse " $\mathcal{H}_0^1 : \beta = 0$  et  $\rho = 1$ " en utilisant les tables suivantes :

(a)

Dependent Variable: Y						
Test:	Numerator:	0.0607	DF:	2	F value:	5.8394
	Denominator:	0.010401	DF:	193	Prob>F:	0.0034

TABLE I  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\tau_{\alpha, \rho}$  FOR  $(\alpha, \rho) = (0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ .  
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.20	2.61	2.97	3.41
50	2.18	2.56	2.89	3.28
100	2.17	2.54	2.86	3.22
250	2.16	2.53	2.84	3.19
500	2.16	2.52	2.83	3.18
$\infty$	2.16	2.52	2.83	3.18
s.e.	0.003	0.004	0.006	0.008

TABLE II  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\tau_{\alpha, \rho}$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ .  
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.77	3.20	3.59	4.05
50	2.75	3.14	3.47	3.87
100	2.73	3.11	3.42	3.78
250	2.73	3.09	3.39	3.74
500	2.72	3.08	3.38	3.72
$\infty$	2.72	3.08	3.38	3.71
s.e.	0.004	0.005	0.007	0.008

(b)

TABLE III  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\tau_{\beta, \rho}$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ .  
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.39	2.85	3.25	3.74
50	2.38	2.81	3.18	3.60
100	2.38	2.79	3.14	3.53
250	2.38	2.79	3.12	3.49
500	2.38	2.78	3.11	3.48
$\infty$	2.38	2.78	3.11	3.45
s.e.	0.004	0.005	0.006	0.009

TABLE V  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\Phi_2$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ .

Sample size n	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.61	0.75	0.89	1.10	4.67	5.68	6.75	8.21
50	0.62	0.77	0.91	1.12	4.31	5.13	5.94	7.02
100	0.63	0.77	0.92	1.12	4.16	4.88	5.59	6.50
250	0.63	0.77	0.92	1.13	4.07	4.75	5.40	6.22
500	0.63	0.77	0.92	1.13	4.05	4.71	5.35	6.15
$\infty$	0.63	0.77	0.92	1.13	4.03	4.68	5.31	6.09
s.e.	0.003	0.003	0.003	0.003	0.01	0.02	0.03	0.05

(c)

**TABLE IV**  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\Phi_1$  FOR  $(\alpha, \rho) = (0, 1) \Rightarrow Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$

Sample size $n$	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.29	0.38	0.49	0.65	4.12	5.18	6.30	7.88
50	0.29	0.39	0.50	0.66	3.94	4.86	5.80	7.06
100	0.29	0.39	0.50	0.67	3.86	4.71	5.57	6.70
250	0.30	0.39	0.51	0.67	3.81	4.63	5.45	6.52
500	0.30	0.39	0.51	0.67	3.79	4.61	5.41	6.47
$\infty$	0.30	0.40	0.51	0.67	3.78	4.59	5.38	6.43
s.e.	0.002	0.002	0.002	0.002	0.01	0.02	0.03	0.05

**TABLE VI**  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\Phi_1$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1) \Rightarrow Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$

Sample size $n$	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.74	0.90	1.08	1.33	5.91	7.24	8.65	10.61
50	0.76	0.93	1.11	1.37	5.61	6.73	7.81	9.31
100	0.76	0.94	1.12	1.38	5.47	6.49	7.44	8.73
250	0.76	0.94	1.13	1.39	5.39	6.34	7.25	8.43
500	0.76	0.94	1.13	1.39	5.36	6.30	7.20	8.34
$\infty$	0.77	0.94	1.13	1.39	5.34	6.25	7.16	8.27
s.e.	0.004	0.004	0.003	0.004	0.015	0.020	0.032	0.058

(d)

**TABLE B.5**  
Critical Values for the Phillips-Perron  $Z_\rho$  Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated OLS Autoregressive Coefficient

Sample size $T$	Probability that $T(\hat{\rho} - 1)$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
<i>Case 1</i>								
25	-11.9	-9.3	-7.3	-5.3	1.01	1.40	1.79	2.28
50	-12.9	-9.9	-7.7	-5.5	0.97	1.35	1.70	2.16
100	-13.3	-10.2	-7.9	-5.6	0.95	1.31	1.65	2.09
250	-13.6	-10.3	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.62	2.04
500	-13.7	-10.4	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.61	2.04
$\infty$	-13.8	-10.5	-8.1	-5.7	0.93	1.28	1.60	2.03
<i>Case 2</i>								
25	-17.2	-14.6	-12.5	-10.2	-0.76	0.01	0.65	1.40
50	-18.9	-15.7	-13.3	-10.7	-0.81	-0.07	0.53	1.22
100	-19.8	-16.3	-13.7	-11.0	-0.83	-0.10	0.47	1.14
250	-20.3	-16.6	-14.0	-11.2	-0.84	-0.12	0.43	1.09
500	-20.5	-16.8	-14.0	-11.2	-0.84	-0.13	0.42	1.06
$\infty$	-20.7	-16.9	-14.1	-11.3	-0.85	-0.13	0.41	1.04
<i>Case 4</i>								
25	-22.5	-19.9	-17.9	-15.6	-3.66	-2.51	-1.53	-0.43
50	-25.7	-22.4	-19.8	-16.8	-3.71	-2.60	-1.66	-0.65
100	-27.4	-23.6	-20.7	-17.5	-3.74	-2.62	-1.73	-0.75
250	-28.4	-24.4	-21.3	-18.0	-3.75	-2.64	-1.78	-0.82
500	-28.9	-24.8	-21.5	-18.1	-3.76	-2.65	-1.78	-0.84
$\infty$	-29.5	-25.1	-21.8	-18.3	-3.77	-2.66	-1.79	-0.87

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 371.

(e)

**TABLE B.6**  
Critical Values for the Phillips-Perron  $Z_t$  Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated OLS  $t$  Statistic

Sample size $T$	Probability that $(\hat{\beta} - 1)/\hat{\sigma}_\beta$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
<i>Case 1</i>								
25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60	0.92	1.33	1.70	2.16
50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61	0.91	1.31	1.66	2.08
100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61	0.90	1.29	1.64	2.03
250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.29	1.63	2.01
500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
$\infty$	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
<i>Case 2</i>								
25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.63	-0.37	0.00	0.34	0.72
50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60	-0.40	-0.03	0.29	0.66
100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-0.42	-0.05	0.26	0.63
250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57	-0.42	-0.06	0.24	0.62
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57	-0.43	-0.07	0.24	0.61
$\infty$	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57	-0.44	-0.07	0.23	0.60
<i>Case 4</i>								
25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24	-1.14	-0.80	-0.50	-0.15
50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18	-1.19	-0.87	-0.58	-0.24
100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15	-1.22	-0.90	-0.62	-0.28
250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13	-1.23	-0.92	-0.64	-0.31
500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13	-1.24	-0.93	-0.65	-0.32
$\infty$	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12	-1.25	-0.94	-0.66	-0.33

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 373.

⇒ Q7 Tester finalement l'hypothèse " $\mathcal{H}_0^2 : \mu = 0, \beta = 0$  et  $\rho = 1$ " et conclure.

**Enoncé de l'exercice 2**

On considère un processus stationnaire multivarié  $X \in ((\mathbb{R}^n)^\Omega)^\mathbb{Z}$ ,  $n \geq 2$ , qui suit le modèle auto-régressif

$$\Phi(L)X = \epsilon$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc de variance-covariance  $\Sigma$  supposée définie positive. On suppose en outre que le modèle est sous forme canonique, c'est-à-dire que les racines de  $\text{Det}\Phi$  sont toutes de module strictement supérieur à un.

On se donne  $m \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  et on note  $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n - m \end{matrix}$  ; on cherche à donner un sens à l'expression "y est la cause x".<sup>1</sup>

Dans la suite pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sera notée  $A = \left( \begin{array}{c|c} A^{1,1} & A^{1,2} \\ \hline A^{2,1} & A^{2,2} \end{array} \right) \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n - m \end{matrix}$ .

**Partie 1 Définition de la notion de causalité**

☞ Q1 *A un instant donné*, l'intuition suggère que si  $X_t^2$  cause  $X_t^1$  alors  $X_t^2$  intervient significativement dans la valeur de  $X_t^1$  ; en particulier la prévision optimale de  $X_t^1$  n'est dans ce cas pas la même selon que l'on connaît  $X_t^2$  ou pas. On dit donc que  $X_t^2$  ne cause pas instantanément  $X_t^1$  au sens de Granger, et on note  $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$ , ssi  $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots)$

(a) Montrer que  $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots) + \mathbb{E}\mathbb{L}(\epsilon_t^1 | \epsilon_t^2)$

(b) Montrer que

$$X_t^2 \not\rightsquigarrow X_t^1 \Leftrightarrow \Sigma^{1,2} = (0) \Leftrightarrow X_t^1 \not\rightsquigarrow X_t^2$$

(on dit dans ce cas par symétrie que  $X^2$  et  $X^1$  ne se causent pas instantanément au sens de Granger).

☞ Q2 Par extension on dit alors que  $X^2$  ne cause pas globalement  $X^1$ , ou simplement que  $X^2$  ne cause pas  $X^1$  au sens de Granger (ce que l'on note  $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$ ) ssi

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}^1, \dots)$$

On cherche à montrer que

$$X^2 \not\rightsquigarrow X^1 \Leftrightarrow \Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$$

(où  $\Phi(\mathbb{X})^{1,2}$  désigne le bloc supérieur droit du polynôme matriciel  $\Phi(\mathbb{X})$ ).

<sup>1</sup>La démarche proposée est tirée (de façon très simplifiée) des travaux de Clive W.J. Granger, co-lauréat avec Robert F. Engle du prix Nobel d'économie 2003. C. Granger fut lauréat non pas pour la notion de causalité qu'il définit (utilisée pour établir la thèse polémique du réchauffement de la planète), mais pour ses résultats de cointégration. Voir <http://www.nobel.se/economics/laureates/2003/ecoadv.pdf>

- (a) Montrer tout d'abord que  $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0) \rightarrow X^2 \not\sim X^1$ .
- (b) Ecrire dans le cas général la décomposition de Wold de  $X^1$  sur  $\langle \epsilon^1, \epsilon^2 \rangle$ .
- (c) On suppose que  $X^2 \not\sim X^1$ ; montrer qu' $\epsilon^1$  est alors l'innovation de  $X^1$ .
- (d) En déduire que si  $X^2 \not\sim X^1$ , alors  $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$ .

## ■ Partie 2 Test de la notion de causalité

On se place dans le cas où  $m = n - m = 1$ , et on note  $p = d^\circ \Phi$ .  
On suppose de plus que  $\Phi(0) = Id$ .

⇒ Q1 Montrer que  $X$  vérifie aussi le modèle

$$\Psi(L)X = \eta$$

pour un certain polynôme matriciel  $\Psi$  (de degré  $p$ ) et un bruit blanc  $\eta$  à déterminer

- ⇒ Q2 Montrer que la régression  $\mathcal{R}$  par les moindres carrés de  $X_t$  sur  $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-p} \rangle$  est équivalente aux deux estimations séparées  $\mathcal{R}^1$  de  $X_t^1$  sur  $\langle X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \dots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \rangle$  et  $\mathcal{R}^2$  de  $X_t^2$  sur  $\langle X_t^1, X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \dots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \rangle$ .
- ⇒ Q3 On considère l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  : "  $X^1 \not\sim X^2$  ".  
Réécrire les régressions  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{R}^2$  sous  $\mathcal{H}_0$ .  
Montrer qu'à supposer qu' $\epsilon^1$  est gaussien, le test de l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  se ramène à un test de Student que l'on explicitera.
- ⇒ Q4 On considère l'hypothèse  $\mathcal{H}_0^*$  : "  $X^2 \not\sim X^1$  ".  
En supposant qu' $\epsilon$  est gaussien, proposer une procédure de test de  $\mathcal{H}_0^*$ .