

Séries temporelles linéaires  
*Enoncé et corrigé des travaux dirigés n°7*

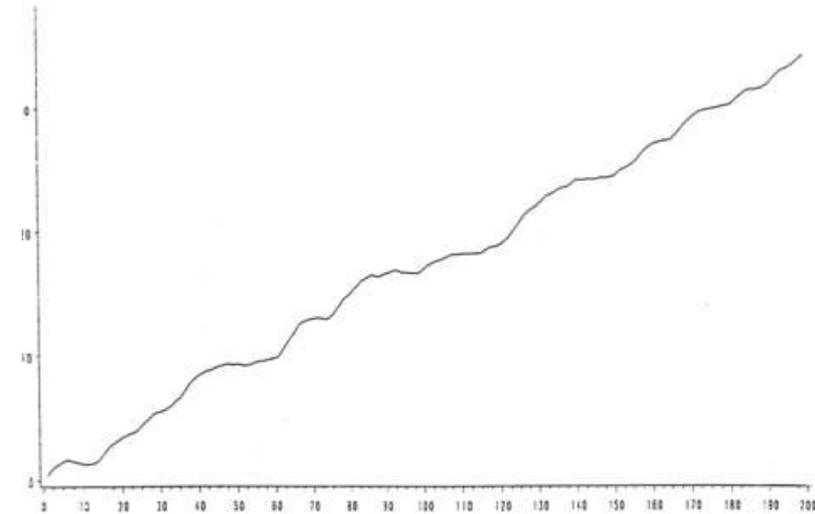
Guillaume Lacôte  
Bureau **E03**

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Enoncé de l'exercice 1

On considère une série réelle observée  $(y_t)_{t \in [0, 200]}$  pour laquelle on cherche une représentation stationnaire, et dont la représentation est la suivante :



☞ Q1 Justifier le modèle où  $y$  est la réalisation d'un processus  $Y$  non-stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_\epsilon^2$  à déterminer.

☞ Q2 Montrer qu'il existe un polynôme  $\Phi^*$  tel que  $Y$  vérifie

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \Phi^*(L)\Delta Y_t + \epsilon_t$$

où  $\Delta = \mathbf{1} - L$ .

☞ Q3 On réalise alors la régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-8} \rangle$ ; l'estimation des paramètres est la suivante (où  $LX$  désigne la série  $(Y_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $LY$   $i$  désigne la série  $(\Delta Y_{t-i})_{t \in \mathbb{Z}}$ ):

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	10	2.16857	0.21686	20.901	0.0001
Error	179	1.85724	0.01038		
C Total	189	4.02581			

Root MSE	0.10186	R-square	0.5387
Dep Mean	0.17388	Adj R-sq	0.5129
C.V.	58.58278		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob >  t
INTERCEP	1	0.063825	0.02139593	2.983	0.0033
LX	1	0.006102	0.00204649	2.982	0.0033
LY1	1	-0.036870	0.01233214	-2.990	0.0032
LY2	1	0.727153	0.07300056	9.961	0.0001
LY3	1	-0.050103	0.09109175	-0.550	0.5830
LY4	1	-0.101392	0.09065962	-1.649	0.1009
LY5	1	-0.149478	0.09078450	-1.117	0.2656
LY6	1	-0.043771	0.08985815	-0.487	0.6268
LY7	1	-0.000901	0.08946794	-0.010	0.9920
LY8	1	0.077040	0.07315238	1.053	0.2937

La modélisation proposée est-elle raisonnable ?

Q4 Justifier le modèle où  $y$  est la réalisation d'un processus  $Y$  stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

On s'appuiera pour ce faire sur

(a) Le test de  $\phi \Delta Y_{t-4} = \dots = \phi \Delta Y_{t-8} = 0$  dans le modèle à 8 retards :

The SAS System

Dependent Variable: Y	Numerator:	0.0081	DF:	5	F value:	0.7841
Test:	Denominator:	0.010276	DF:	179	Prob>F:	0.5624

(b) La régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-3} \rangle$  :

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	7	2.24814	0.32116	36.277	0.0001
Error	182	1.24891	0.00686		
C Total	189	3.49705			

Root MSE	0.10186	R-square	0.5387
Dep Mean	0.17388	Adj R-sq	0.5129
C.V.	58.58278		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob >  t
INTERCEP	1	0.062633	0.01847919	3.389	0.0009
T	1	0.005271	0.00187706	2.808	0.0055
LX	1	-0.031451	0.01128996	-2.786	0.0059
LY1	1	0.740109	0.07085748	10.445	0.0001
LY2	1	-0.060810	0.08866608	-0.686	0.4938
LY3	1	0.144091	0.08863452	1.625	0.1057

(c) Le test de  $\phi \Delta Y_{t-2} = \dots = \phi \Delta Y_{t-8} = 0$  dans le modèle à 8 retards :

The SAS System

Dependent Variable: Y	Numerator:	0.0068	DF:	7	F value:	0.6597
Test:	Denominator:	0.010376	DF:	179	Prob>F:	0.7059

(d) La régression de  $\Delta Y_t$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1} \rangle$  :

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	3	2.22742	0.74247	71.588	0.0001
Error	193	2.00731	0.01040		
C Total	196	4.23473			

Root MSE	0.10178	R-square	0.5260
Dep Mean	0.17070	Adj R-sq	0.5186
C.V.	59.74365		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob >  t
INTERCEP	1	0.057473	0.01745812	3.292	0.0012
T	1	0.005824	0.00171041	3.405	0.0008
LX	1	-0.034680	0.01028056	-3.373	0.0009
LY1	1	0.719836	0.04962822	14.505	0.0001

(e) Les auto-corrélations directes du modèle final

Autocorrelations

Lag	Covariance	Correlation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Std
0	0.010199	1.00000	*									*									0.071267
1	0.00014062	0.01488		*									*								0.071261
2	-0.0004066	-0.03989			*									*							0.071376
3	-0.0011716	-0.11498				*									*						0.072308
4	-0.0002871	-0.02832					*									*					0.072537
5	-0.0001937	-0.01908						*									*				0.072562
6	-0.0004445	-0.04382							*									*			0.072697
7	-0.0003096	-0.03041								*									*		0.072816
8	0.00047225	0.04625									*									*	0.072666
9	0.0003036	0.02968										*									0.072816
10	-0.0009779	-0.00961											*								0.072876
11	0.0008549	0.00839												*							0.072888
12	0.0005212	0.00510													*						0.073374
13	-0.0007828	-0.00768														*					0.073781
14	0.00032983	0.00327															*				0.073853
15	0.00058924	0.005783																*			0.074085
16	-0.0004947	-0.004929																	*		0.074085
17	0.00019926	0.01956																		*	0.074588
18	-0.0013391	-0.13162																		*	0.075029
19	0.00028753	0.00282																		*	0.075288
20	0.0000309	0.00014																		*	0.075348
21	-0.0006792	-0.06666																		*	0.075646
22	0.00069193	0.00755																		*	0.076208
23	-0.0006691	-0.06566																		*	0.076208
24	0.00027934	0.02791																		*	0.076564

(f) Les auto-corrélations inverses du modèle final

Inverse Autocorrelations

Lag	Correlation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Std	
1	0.0552	*									*										0.071267
2	-0.03347		*									*									0.071261
3	0.02202			*									*								0.071376
4	0.02543				*									*							0.072308
5	-0.05644					*									*						0.072537
6	0.03585						*									*					0.072562
7	0.05189							*									*				0.072697
8	-0.03736								*									*			0.072816
9	-0.06726									*									*		0.072888
10	0.02248										*										0.073374
11	-0.04162											*									0.073781
12	0.02220												*								0.073853
13	0.07866													*							0.074085
14	-0.00582														*						0.074085
15	-0.00996															*					0.074588
16	0.00537																*				0.075029
17	-0.02800																	*			0.075288
18	0.12947																		*		0.075348
19	-0.00012																		*		0.075646
20	-0.01547																		*		0.076208
21	0.05419																		*		0.076208
22	-0.09868																		*		0.076564
23	0.08316																		*		0.076564
24	-0.04172																		*		0.076564

(g) Les auto-corrélations partielles du modèle final

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	0.01380																						
2	-0.04008																						
3	0.11632																						
4	-0.02618																						
5	-0.00875																						
6	-0.05951																						
7	-0.04355																						
8	0.04756																						
9	0.05607																						
10	0.00167																						
11	-0.07362																						
12	-0.00746																						
13	-0.07370																						
14	0.02050																						
15	0.06359																						
16	0.01179																						
17	0.02093																						
18	-0.14741																						
19	-0.02405																						
20	-0.01415																						
21	-0.01533																						
22	-0.09851																						
23	-0.08730																						
24	0.04548																						

(h) Le test de Porte-Manteau du bruit blanc du modèle final :

Autocorrelation Check for White Noise

To	Chi	Autocorrelations							
Lag	Square	DF	Prob	0.014	-0.040	0.115	-0.020	-0.019	-0.044
6	3.58	6	0.733						
12	6.22	12	0.905	-0.049	0.046	0.029	-0.010	0.084	0.086
18	12.30	18	0.851	-0.077	0.352	0.058	-0.309	0.020	-0.131
24	16.75	24	0.859	0.028	0.009	-0.067	0.097	-0.066	0.027

Q5 Montrer que le modèle retenu s'écrit

$$(1 - \rho L)Y_t = \mu + \beta t + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

et exprimer  $\rho$  en fonction de  $\phi$ .

Q6 Tester l'hypothèse " $\mathcal{H}_0^1 : \beta = 0$  et  $\rho = 1$ " en utilisant les tables suivantes :

(a)

Dependent Variable: Y	0.8687	DF:	2	F value:	5.8394	
Test:	Numerator:	0.010401	DF:	193	Prob>F:	0.0034
	Denominator:					

TABLE I  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\tau_{\alpha}$  FOR  $(\alpha, \rho) = (0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$   
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.20	2.61	2.97	3.41
50	2.18	2.56	2.89	3.28
100	2.17	2.54	2.86	3.22
250	2.16	2.53	2.84	3.19
500	2.16	2.52	2.83	3.18
∞	2.16	2.52	2.83	3.18
s.e.	0.003	0.004	0.006	0.008

(b)

TABLE II  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\tau_{\alpha}$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$   
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.77	3.20	3.59	4.05
50	2.75	3.14	3.47	3.87
100	2.73	3.11	3.42	3.78
250	2.73	3.09	3.39	3.74
500	2.72	3.08	3.38	3.72
∞	2.72	3.08	3.38	3.71
s.e.	0.004	0.005	0.007	0.008

TABLE III  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\tau_{\beta}$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$   
(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value			
	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.39	2.83	3.25	3.74
50	2.38	2.81	3.18	3.60
100	2.38	2.79	3.14	3.53
250	2.38	2.79	3.12	3.49
500	2.38	2.78	3.11	3.48
∞	2.38	2.78	3.11	3.45
s.e.	0.004	0.005	0.006	0.009

(c)

TABLE V  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\Phi_2$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$

Sample size n	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.61	0.75	0.89	1.10	4.67	5.68	6.75	8.21
50	0.62	0.77	0.91	1.12	4.31	5.13	5.94	7.02
100	0.63	0.77	0.92	1.12	4.16	4.88	5.59	6.50
250	0.63	0.77	0.92	1.13	4.07	4.75	5.40	6.22
500	0.63	0.77	0.92	1.13	4.05	4.71	5.35	6.15
∞	0.63	0.77	0.92	1.13	4.03	4.68	5.31	6.09
s.e.	0.003	0.003	0.003	0.003	0.01	0.02	0.03	0.05

TABLE IV  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\Phi_1$  FOR  $(\alpha, \rho) = (0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$

Sample size n	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.29	0.38	0.49	0.65	4.12	5.18	6.30	7.88
50	0.29	0.39	0.50	0.66	3.94	4.86	5.80	7.06
100	0.29	0.39	0.50	0.67	3.86	4.71	5.57	6.70
250	0.30	0.39	0.51	0.67	3.81	4.63	5.45	6.52
500	0.30	0.39	0.51	0.67	3.79	4.61	5.41	6.47
∞	0.30	0.40	0.51	0.67	3.78	4.59	5.38	6.43
s.e.	0.002	0.002	0.002	0.002	0.01	0.02	0.03	0.05

(d)

TABLE B.5  
Critical Values for the Phillips-Perron  $Z_\rho$  Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated OLS Autoregressive Coefficient

Sample size T	Probability that $T(\hat{\rho} - 1)$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
Case 1								
25	-11.9	-9.3	-7.3	-5.3	1.01	1.40	1.79	2.28
50	-12.9	-9.9	-7.7	-5.5	0.97	1.35	1.70	2.16
100	-13.3	-10.2	-7.9	-5.6	0.95	1.31	1.65	2.09
250	-13.6	-10.3	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.62	2.04
500	-13.7	-10.4	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.61	2.04
∞	-13.8	-10.5	-8.1	-5.7	0.93	1.28	1.60	2.03
Case 2								
25	-17.2	-14.6	-12.5	-10.2	-0.76	0.01	0.65	1.40
50	-18.9	-15.7	-13.3	-10.7	-0.81	-0.07	0.53	1.22
100	-19.8	-16.3	-13.7	-11.0	-0.83	-0.10	0.47	1.14
250	-20.3	-16.6	-14.0	-11.2	-0.84	-0.12	0.43	1.09
500	-20.5	-16.8	-14.0	-11.2	-0.84	-0.13	0.42	1.06
∞	-20.7	-16.9	-14.1	-11.3	-0.85	-0.13	0.41	1.04
Case 4								
25	-22.5	-19.9	-17.9	-15.6	-3.66	-2.51	-1.53	-0.43
50	-25.7	-22.4	-19.8	-16.8	-3.71	-2.60	-1.66	-0.65
100	-27.4	-23.6	-20.7	-17.5	-3.74	-2.62	-1.73	-0.75
250	-28.4	-24.4	-21.3	-18.0	-3.75	-2.64	-1.78	-0.82
500	-28.9	-24.8	-21.5	-18.1	-3.76	-2.65	-1.78	-0.84
∞	-29.5	-25.1	-21.8	-18.3	-3.77	-2.66	-1.79	-0.85

(e)

Q7 Tester finalement l'hypothèse " $\mathcal{H}_0^2 : \mu = 0, \beta = 0$  et  $\rho = 1$ " et conclure.

TABLE VI  
EMPIRICAL DISTRIBUTION OF  $\Phi_2$  FOR  $(\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1)$  IN  $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$

Sample size n	Probability of a smaller value							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.74	0.90	1.08	1.31	5.91	7.24	8.65	10.60
50	0.76	0.93	1.11	1.37	5.61	6.73	7.81	9.90
100	0.76	0.94	1.12	1.38	5.47	6.49	7.44	8.80
250	0.76	0.94	1.13	1.39	5.39	6.34	7.25	8.40
500	0.76	0.94	1.13	1.39	5.36	6.30	7.20	8.30
∞	0.77	0.94	1.13	1.39	5.34	6.25	7.16	8.20
s.e.	0.004	0.004	0.003	0.004	0.015	0.020	0.032	0.05

TABLE B.6  
Critical Values for the Phillips-Perron Z Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated OLS t Statistic

Sample size T	Probability that $(\hat{\beta} - 1)/\hat{\sigma}_\epsilon$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
Case 1								
25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60	0.92	1.33	1.70	2.16
50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61	0.91	1.31	1.66	2.09
100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61	0.90	1.29	1.64	2.04
250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.29	1.63	2.03
500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.03
∞	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.03
Case 2								
25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.63	-0.37	0.00	0.34	0.29
50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60	-0.40	-0.03	0.29	0.24
100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-0.42	-0.05	0.26	0.22
250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57	-0.42	-0.06	0.24	0.20
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57	-0.43	-0.07	0.24	0.20
∞	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57	-0.44	-0.07	0.23	0.19
Case 4								
25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24	-1.14	-0.80	-0.50	-0.20
50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18	-1.19	-0.87	-0.58	-0.28
100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15	-1.22	-0.90	-0.62	-0.30
250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13	-1.23	-0.92	-0.64	-0.32
500	-3.98	-3.68						

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 L'observation de la série fait apparaître une tendance déterministe linéaire : la série observée est "assez proche" d'une certaine droite  $\bar{y}_t = a + bt$ .

Si l'on admet, comme le suggère son graphe, qu'à cette composante déterministe près elle est en outre stationnaire du second ordre, alors le processus  $Y$  dont elle est la réalisation admet une représentation auto-régressive infinie de la forme

$$\Phi(L)(Y_t - a - bt) = \epsilon_t$$

Or, à supposer que  $\Phi(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k \mathbb{X}^k$  ainsi que sa dérivée sont de rayon supérieur à 1 on a

$$\begin{aligned} \Phi(L) \circ (bt)_t &= b \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k (t - k) \\ &= b \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k \right) t - b \left( \sum_{k=0}^{+\infty} k \phi_k \right) \\ &= b\Phi(1)t - b\Phi'(1) \end{aligned}$$

Comme  $\Phi(L) \circ (a) = \Phi(1) \times a$  il vient en notant  $\mu = a - b\Phi'(1)$  et  $\beta = b\Phi(1)$

$$\Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$$

En pratique, on se contente de choisir  $\Phi$  de degré fini mais assez grand pour que  $\epsilon$  soit significativement un bruit blanc.

☞ Q2 Afin de tester la présence éventuelle d'une racine unitaire, on cherche à factoriser "de force"  $\Phi(L)$  par  $1 - L$  (transformation de BEVERIDGE-NELSON, voir TD 4, exercice 1) : pour ce faire on effectue la division euclidienne  $\Phi(\mathbb{X})$  par  $1 - \mathbb{X}$  ce qui s'écrit, comme 1 est racine de  $\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)$ <sup>1</sup>

$$\Phi^+(\mathbb{X}) = \frac{\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)}{(1 - \mathbb{X})} \in \mathbb{R}[X], \quad d^0\Phi^+ \leq d^0\Phi - 1$$

Alors

$$\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$$

<sup>1</sup>Cette opération n'est normalement définie que pour les polynômes, i.e. lorsque  $\Phi$  est de degré fini. Si  $d^0\Phi = +\infty$  on définit  $\Phi_N(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^N \phi_k \mathbb{X}^k$  dont on tire  $\Phi_N^+(\mathbb{X})$  pour  $N \geq 1$ , dont on montre qu'elle est convergente de rayon supérieur à 1.

et donc

$$\begin{aligned} \Phi(L)Y &= \Phi(1) \times Y + (1 - L) \cdot \Phi^+(L) \circ Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \Phi^+(L) \circ \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \underbrace{\Phi^+(0)}_{\Phi(0) - \Phi(1)} \times \Delta Y + \left( \underbrace{\Phi^+(L) - \Phi^+(0)}_{-\Phi^*(L)} \right) \circ \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + (1 - \Phi(1)) \times \Delta Y - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\ &= \Delta Y + \Phi(1)L Y - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \end{aligned}$$

et comme par ailleurs  $\Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$  il vient en définitive

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \Phi^*(L)\Delta Y_t - \Phi(1)Y_{t-1} + \epsilon_t$$

qui est bien le modèle recherché en posant  $\phi = -\Phi(1)$ .

Notons que par construction  $\Phi^*(0) = 0$ , donc  $\Phi^*(\mathbb{X})$  ne contient que des puissances strictement positives de  $\mathbb{X}$ , et donc  $\Phi^*(L) \circ \Delta Y_t$  ne contient que des valeurs passées  $\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \dots, \Delta Y_t$ .

Tester si le modèle est intégré, c'est tester si  $\Phi(1) = 0$ ; sous cette forme cela revient juste à tester si le coefficient  $\phi$  de  $Y_{t-1}$  est non-significativement non-nul.

Il aurait été possible de pratiquer une telle régression directement sur l'équation en  $Y_t$  au lieu de celle en  $\Delta Y_t$ ; mais comme  $Y$  n'est pas stationnaire,  $Cov(Y_t, Y_{t+h})$  est significative pour tout  $h$ , donc la régression aurait dû comporter une infinité de variables explicatives  $(Y_{t-h})_{h \geq 1}$ . À l'inverse si  $\Delta Y$  est stationnaire, un nombre fini d'explicatives peut suffire.

☞ Q3 Il est tout d'abord nécessaire de déterminer  $\Phi$  tel que le modèle soit vérifié. Pour ce faire on choisit un degré arbitrairement grand pour  $\Phi$  (ici 9)<sup>2</sup> et on vérifie que le modèle estimé par la régression des moindres carrés ordinaires<sup>3</sup> est statistiquement valide; dans le cas présent  $R^2$  ajusté (qui vaut 0,5129) assure que le modèle capture une part suffisante de la variance, donc que suffisamment de variables explicatives  $\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \dots$  ont été introduites.

Remarquons que lorsque  $\Delta Y$  est stationnaire, les coefficients de la régression sont donc asymptotiquement normaux, ce qui justifie l'emploi du test de Student pour tester leur significativité. En l'occurrence, on observe que les coefficients de la régression sur  $\Delta Y_{t-4}, \dots, \Delta Y_{t-8}$  ne sont (individuellement) pas significativement non-nuls (colonne Prob > | $\tau$ |).

Ainsi la modélisation proposée est valide mais le modèle estimé ici n'est pas significatif.

- ☞ Q4 (a)
- (b)
- (c)

<sup>2</sup>Car  $8 = d^0\Phi^* = d^0\Phi^+ = d^0\Phi - 1$ .

<sup>3</sup>Puisque  $\epsilon$  est censé être un bruit blanc.

<sup>4</sup>En toute généralité il serait possible que  $\Delta Y$  ne soit pas stationnaire, auquel cas l'emploi du test de Student serait inadapté.

- (d)
- (e)
- (f)
- (g)
- (h) On se propose donc de déterminer le sous-modèle minimal qui soit totalement significatif.

Remarque : Bien que l'on observe à ce stade que le coefficient en  $Y_{t-1}$  est significativement non-nul, **on ne peut pas** en déduire qu'il le sera aussi dans le sous-modèle où tous les coefficients sont significatifs.<sup>5</sup> Il est nécessaire de déterminer ce sous-modèle et d'y tester la significativité du coefficient en  $Y_{t-1}$ .

- Compte-tenu de la régression précédente, on teste la nullité **simultanée** des coefficients de  $\Delta Y_{t-4}, \dots, \Delta Y_{t-8}$  dans la régression. En l'occurrence, l'hypothèse  $\mathcal{H}_0 : \phi_{\Delta Y_{t-4}} = \dots = \phi_{\Delta Y_{t-8}} = 0$  est acceptée car la statistique de Fisher associée vaut **0,7841**.
- On effectue donc la régression de  $\Delta Y$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-4} \rangle$ , et on observe que le modèle ainsi estimé est valide (ce qui est heureux).  
Il apparaît cependant que les coefficients de  $\Delta Y_{t-2}$  et de  $\Delta Y_{t-3}$  sont **individuellement** non-significativement non-nuls.
- On effectue donc le test de la nullité simultanée de ces coefficients en formulant l'hypothèse  $\mathcal{H}_0 : \phi_{\Delta Y_{t-2}} = \dots = \phi_{\Delta Y_{t-3}} = 0$ .

Remarque : Noter que tester successivement

- i. la nullité simultanée des coefficients de  $\Delta Y_{t-4}, \dots, \Delta Y_{t-8}$  dans la régression sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-8} \rangle$
- ii. puis la nullité simultanée des coefficients de  $\Delta Y_{t-2}$  et  $\Delta Y_{t-3}$  dans la régression sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-3} \rangle$

est moins robuste statistiquement que de tester directement la nullité simultanée des coefficients de  $\Delta Y_{t-2}, \dots, \Delta Y_{t-8}$  dans la régression sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-8} \rangle$ .

En l'occurrence, l'hypothèse est acceptée car la statistique de Fisher associée vaut **0,6597**

<sup>5</sup>La statistique de Student du coefficient  $\beta$  dans la régression ordinaire

$$Y = \alpha X^1 + \beta X^2 + \gamma X^3 + U$$

est

$$t_{X^2} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_2^2}}$$

où  $\hat{\sigma}_2^2$  désigne le terme diagonal de la matrice de variance-covariance  $\Sigma$  de  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ .

Or rien ne dit que cette matrice ne dépend pas de  $X^3$ , même si  $\gamma$  est non-significativement non-nul : comme  $\hat{\beta} = (X^2 X^2)^{-1} X^2 Y$  et  $\hat{\gamma} = (X^3 X^3)^{-1} X^3 Y$  pour peu que  $\text{Cov}(X^2, X^3) \neq 0$ , la matrice  $\Sigma$  dépendra de  $\hat{\gamma}$  (au sens où  $\text{Cov}(\Sigma^{1,3}, \hat{\gamma}) \neq 0$ ).

En l'occurrence, on sait (voir TD 2, exercice 3) que  $\Delta Y$  est stationnaire que  $\Delta Y_{t-1}$  et  $\Delta Y_{t-i}$  sont certainement corrélés.

- On effectue donc en définitive la régression de  $\Delta Y$  sur  $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1} \rangle$ , et on observe que le modèle ainsi estimé est valide. On constate en outre qu'aucun coefficient n'est individuellement non-significatif.

On procède donc à l'identification du modèle AR (voir TD 5, exercice 1) en  $\Delta Y$  sur les explicatives  $t$  et  $LY$ .

On observe en l'occurrence que les auto-corrélations directes décroissent "exponentiellement" vers 0 (en l'occurrence, elles ne sont plus significativement non-nulles dès l'ordre  $h \geq 3$ ); en outre le test de Porte-Manteau permet de conclure que le résidu estimé  $\epsilon$  est non-significativement différent d'un bruit blanc.

☞ Q5 Le modèle estimé s'écrit

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

où  $\phi_1$  est le coefficient en  $X$  de  $\Phi^*(X)$ , ce qui se réécrit encore

$$(\mathbf{1} - \rho L)Y_t = \mu + \beta t + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

en posant  $\rho = 1 + \phi$ .

- ☞ Q6 (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e) Sous  $\mathcal{H}_0^1$  le modèle se réécrit

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

La statistique de test associée est celle de la table VI, selon laquelle le fractile à 5% vaut **6,34** (on retient la valeur pour 250 observations<sup>6</sup>); comparée à la valeur empirique **F-Value : 5,83** on accepte donc l'hypothèse  $\mathcal{H}_0^1$ .

☞ Q7 On constate que  $\mathcal{H}_0^2 \rightarrow \mathcal{H}_0^1$ ; comme  $\mathcal{H}_0^1$  est acceptable on se propose de tester  $\mathcal{H}_0^2$ .

Sous  $\mathcal{H}_0^2$  le modèle se réécrit

$$Y_t = Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

La statistique de test associée est celle de la table V, selon laquelle le fractile à 5% vaut **4,75**; comparée à la valeur empirique **F-Value : 10,75** on rejette donc l'hypothèse  $\mathcal{H}_0^2$ .

\*  
\* \*

### Enoncé de l'exercice 2

<sup>6</sup>Plutôt que celle pour 100 observations, car le test est ainsi plus restrictif : si on accepte  $\mathcal{H}_0$  avec le fractile à 5% pour 100 observations, on l'accepterait a fortiori avec celui à 100 observations.

On considère un processus stationnaire multivarié  $X \in ((\mathbb{R}^n)^\Omega)^\mathbb{Z}$ ,  $n \geq 2$ , qui suit le modèle auto-régressif

$$\Phi(L)X = \epsilon$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc de variance-covariance  $\Sigma$  supposée définie positive. On suppose en outre que le modèle est sous forme canonique, c'est-à-dire que les racines de  $\text{Det}\Phi$  sont toutes de module strictement supérieur à un.

On se donne  $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et on note  $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix}$  ; on cherche à donner un sens à l'expression "y est la cause x".<sup>7</sup>

Dans la suite pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sera notée  $A = \begin{pmatrix} A^{1,1} & A^{1,2} \\ A^{2,1} & A^{2,2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix}$ .

**Partie 1 Définition de la notion de causalité**

☞ Q1 A un instant donné, l'intuition suggère que si  $X_t^2$  cause  $X_t^1$  alors  $X_t^2$  intervient significativement dans la valeur de  $X_t^1$  ; en particulier la prévision optimale de  $X_t^1$  n'est dans ce cas pas la même selon que l'on connaît  $X_t^2$  ou pas. On dit donc que  $X_t^2$  ne cause pas instantanément  $X_t^1$  au sens de Granger, et on note  $X^2 \not\sim X^1$ , ssi  $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots)$

- (a) Montrer que  $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots) + \mathbb{E}\mathbb{L}(\epsilon_t^1 | \epsilon_t^2)$
- (b) Montrer que

$$X_t^2 \not\sim X_t^1 \Leftrightarrow \Sigma^{1,2} = (0) \Leftrightarrow X_t^1 \not\sim X_t^2$$

(on dit dans ce cas par symétrie que  $X^2$  et  $X^1$  ne se causent pas instantanément au sens de Granger).

☞ Q2 Par extension on dit alors que  $X^2$  ne cause pas globalement  $X^1$ , ou simplement que  $X^2$  ne cause pas  $X^1$  au sens de Granger (ce que l'on note  $X^2 \not\sim X^1$ ) ssi

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}^1, \dots)$$

On cherche à montrer que

$$X^2 \not\sim X^1 \Leftrightarrow \Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$$

(où  $\Phi(\mathbb{X})^{1,2}$  désigne le bloc supérieur droit du polynôme matriciel  $\Phi(\mathbb{X})$ ).

- (a) Montrer tout d'abord que  $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0) \rightarrow X^2 \not\sim X^1$ .
- (b) Ecrire dans le cas général la décomposition de Wold de  $X^1$  sur  $\langle \epsilon^1, \epsilon^2 \rangle$ .
- (c) On suppose que  $X^2 \not\sim X^1$  ; montrer qu' $\epsilon^1$  est alors l'innovation de  $X^1$ .
- (d) En déduire que si  $X^2 \not\sim X^1$ , alors  $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$ .

**Partie 2 Test de la notion de causalité**

<sup>7</sup>La démarche proposée est tirée (de façon très simplifiée) des travaux de Clive W.J. Granger, co-lauréat avec Robert F. Engle du prix Nobel d'économie 2003. C. Granger fut lauréat non pas pour la notion de causalité qu'il définit (utilisée pour établir la thèse polémique du réchauffement de la planète), mais pour ses résultats de cointégration. Voir <http://www.nobel.se/economics/laureates/2003/ecoadv.pdf>

On se place dans le cas où  $m = n - m = 1$ , et on note  $p = d^\circ\Phi$ . On suppose de plus que  $\Phi(0) = \text{Id}$ .

☞ Q1 Montrer que  $X$  vérifie aussi le modèle

$$\Psi(L)X = \eta$$

pour un certain polynôme matriciel  $\Psi$  (de degré  $p$ ) et un bruit blanc  $\eta$  à déterminer

☞ Q2 Montrer que la régression  $\mathcal{R}$  par les moindres carrés de  $X_t$  sur  $\langle X_{t-1}, \dots, X_{t-p} \rangle$  est équivalente aux deux estimations séparées  $\mathcal{R}^1$  de  $X_t^1$  sur  $\langle X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \dots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \rangle$  et  $\mathcal{R}^2$  de  $X_t^2$  sur  $\langle X_t^1, X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \dots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \rangle$ .

☞ Q3 On considère l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  : "  $X^1 \not\sim X^2$  ". Réécrire les régressions  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{R}^2$  sous  $\mathcal{H}_0$ . Montrer qu'à supposer qu' $\epsilon^1$  est gaussien, le test de l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  se ramène à un test Student que l'on explicitera.

☞ Q4 On considère l'hypothèse  $\mathcal{H}_0^*$  : "  $X^2 \not\sim X^1$  ". En supposant qu' $\epsilon$  est gaussien, proposer une procédure de test de  $\mathcal{H}_0^*$ .

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 (a) Le modèle étant sous forme canonique,  $\epsilon$  est l'innovation du processus vectoriel  $X$  : définition de l'innovation  $\epsilon_t = X_t - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t | X_{t-1}, \dots)$  et donc en projetant pour  $i \in \{1, 2\}$

$$\epsilon_t^i = X_t^i - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^i | X_{t-1}, \dots)$$

( $\epsilon^2$  est l'innovation du processus  $X^2 | X^1$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | (X_t^2, X_{t-1}^2, \dots), (X_{t-1}^1, \dots)) \\ &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | (\epsilon_t^2, \epsilon_{t-1}^2, \dots), (X_{t-1}^1, \dots)) \\ &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | \epsilon_t^2, (X_{t-1}^2, \dots, X_{t-1}^1, \dots)) \\ &= \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | \epsilon_t^2, X_{t-1}, \dots) \end{aligned}$$

Or  $\forall t \in \mathbb{Z}, \epsilon_t^2 \perp\!\!\!\perp \langle X_{t-1}, \dots \rangle$  donc  $\langle \epsilon_t^2, X_{t-1}, \dots \rangle = \langle \epsilon_t^2 \rangle \oplus \langle X_{t-1}, \dots \rangle$  et donc

$$\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | \epsilon_t^2) \oplus \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | X_{t-1}, \dots)$$

Or

$$X_t = \sum_{k=1}^{d^\circ\Phi} \Phi_k X_{t-k} + \epsilon_t$$

et  $\epsilon_t \perp\!\!\!\perp \langle X_{t-1}, \dots \rangle$  donc en projetant

$$\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1 | \epsilon_t^2) = \mathbb{E}\mathbb{L}(\epsilon_t^1 | \epsilon_t^2)$$

et donc finalement

$$\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}, \dots) + \mathbb{E}\mathbb{L}(\epsilon_t^1|\epsilon_t^2)$$

(b) Par définition pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \boxed{X_t^2 \not\sim X_t^1} &\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_t^2, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}, \dots) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{L}(\epsilon_t^1|\epsilon_t^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Cov}(\epsilon_t^1, \epsilon_t^2) = (0) \\ &\Leftrightarrow \boxed{\Sigma^{1,2} = (0)} \\ &\Leftrightarrow \text{Cov}(\epsilon_t^1, \epsilon_t^2) = (0) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{L}(\epsilon_t^2|\epsilon_t^1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^2|X_t^1, X_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^2|X_{t-1}, \dots) \\ &\Leftrightarrow \boxed{X_t^1 \not\sim X_t^2} \end{aligned}$$

Q2 (a) On a pour  $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \sum_{k=1}^{d^\circ\Phi} \phi_k X_{t-k} + \epsilon_t$$

et donc en projetant

$$X_t^1 = \sum_{k=1}^{d^\circ\Phi} \phi_k^{1,1} X_{t-k}^1 + \sum_{k=1}^{d^\circ\Phi} \phi_k^{1,2} X_{t-k}^2 + \epsilon_t^1$$

Si  $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$  alors

$$X_t^1 = \sum_{k=1}^{d^\circ\Phi} \phi_k^{1,1} X_{t-k}^1 + \epsilon_t^1$$

et donc

$$\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}, \dots) = \sum_{k=1}^{d^\circ\Phi} \phi_k^{1,1} X_{t-k}^1 = \boxed{\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}, \dots)}$$

c'est-à-dire  $X^2 \not\sim X^1$ .

(b) Comme  $\epsilon$  est l'innovation de  $X$ , soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \epsilon_{t-k}$$

Alors en projetant il vient <sup>8</sup>

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{1,1} \epsilon_{t-k}^1 + \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{1,2} \epsilon_{t-k}^2$$

<sup>8</sup>Chacune des deux sommes converge car  $\|A_k^{1,j}\|_2^2 \leq \|A_k\|_2^2$  et que  $\sum_k A_k$  est normalement convergente.

(c) Supposons alors que  $X^2 \not\sim X^1$ ; alors pour tout  $t \in \mathbb{Z}$   $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}, \dots)$   $\mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}^1, \dots)$  et donc  $X_t^1 - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}^1, \dots) = X_t^1 - \mathbb{E}\mathbb{L}(X_t^1|X_{t-1}, \dots) = \epsilon_t^1$  est donc l'innovation de  $X^1$ .

(d) Si  $X^2 \not\sim X^1$ , alors  $X^1$  admet une représentation de Wold sous la forme

$$X_t^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \epsilon_{t-k}^1$$

où  $B_k \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ . On a par ailleurs pour tout  $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} \epsilon_{t-k}^1 + \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \epsilon_{t-k}^2$$

et donc

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k & (0) \\ \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} & \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \epsilon_{t-k}^1 \\ \epsilon_{t-k}^2 \end{pmatrix}$$

soit <sup>9</sup>

$$X = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_k & (0) \\ A_k^{2,1} & A_k^{2,2} \end{pmatrix} L^k \circ \epsilon$$

Alors

$$\epsilon = \Phi(L)X = \Phi(L) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_k & (0) \\ A_k^{2,1} & A_k^{2,2} \end{pmatrix} L^k \right) \circ \epsilon$$

et donc la matrice  $\left( \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_k & (0) \\ A_k^{2,1} & A_k^{2,2} \end{pmatrix} \mathbb{X}^k \right)$  sur l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})[\mathbb{X}]$  est régulière est une inverse de  $\Phi(\mathbb{X})$ , ce qui s'écrit encore par blocs

$$\begin{pmatrix} \Phi(\mathbb{X})^{1,1} & \Phi(\mathbb{X})^{1,2} \\ \Phi(\mathbb{X})^{2,1} & \Phi(\mathbb{X})^{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \mathbb{X}^k \right) & (0) \\ \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} \mathbb{X}^k \right) & \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_m & (0) \\ (0) & Id_{n-m} \end{pmatrix}$$

et en particulier en considérant le bloc (1,2) il vient

$$(0) \times \Phi(\mathbb{X})^{1,1} + \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k \right) \times \Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$$

Or  $\left( \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \mathbb{X}^k \right)$   $\left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} \mathbb{X}^k \right)$   $\left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k \right)$  est inversible, donc  $\left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k \right)$  également <sup>10</sup> donc

$\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})[\mathbb{X}]$  et finalement

<sup>9</sup>Avec la convention que

$$ML^k = \begin{pmatrix} M^{1,1}L^k & \dots & M^{1,n}L^k \\ \vdots & & \vdots \\ M^{n,1}L^k & \dots & M^{n,n}L^k \end{pmatrix}$$

et en remarquant que chaque  $\sum_k A_k^{i,j} \mathbb{X}^k$  est convergente car  $|A_k^{i,j}| \leq \|A_k\|_2$  et que  $\sum_k A_k$  est normalement convergente

<sup>10</sup>Comme la matrice  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$  est triangulaire par blocs, si elle est inversible, alors  $C$  l'est également.

$$\Phi(L)^{1,2} = (0)$$

ce qui achève la preuve de la réciproque.

☞ Q1 On sait que

$$\Phi(L)X = \epsilon$$

donc pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  en multipliant par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$  il vient

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \Phi(L) \right) \circ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \epsilon$$

Notons donc  $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \epsilon$ ; alors pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  et  $l \in \mathbb{Z}$

$$\text{Cov}(\eta_t, \eta_{t-l}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}' \text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-l}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Posons en particulier  $\alpha = \frac{\Sigma^{1,2}}{\Sigma^{1,1}}$ : alors  $\text{Cov}(\eta_t, \eta_{t-l}) = 0$  et donc  $\eta$  est un bruit blanc. Sa matrice de variance-covariance est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^{1,1} & 0 \\ 0 & \Sigma^{2,2} - \frac{(\Sigma^{1,2})^2}{\Sigma^{1,1}} \end{pmatrix}$$

Notons enfin  $\Psi(\mathbb{X})$  la matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \Phi(\mathbb{X})$ ; alors

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

(car  $\Phi(0) = \mathcal{I}d$ ), donc  $\Psi(0)$  est bien inversible et le modèle est correctement spécifié.

☞ Q2 D'une façon générale, l'estimateur des moindres carrés ordinaires de la régression de  $Y = Xb + U$  est, si  $X$  est de plein rang,  $\hat{b}_{mcg} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X' \times \Omega^{-1}Y$ , où  $\Omega$  désigne la matrice de variance-covariance de  $U$ .

Considérons alors les deux sous-blocs

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xb^1 \\ Xb^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix}$$

et supposons que  $\mathbb{V} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^{1,1} & (0) \\ (0) & \Omega^{2,2} \end{pmatrix}$  soit bloc-diagonale.

Alors

$$\begin{aligned} \hat{b}_{mcg} &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X' \times \Omega^{-1} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} \\ &= \left( X' \begin{pmatrix} \Omega^{1,1} & (0) \\ (0) & \Omega^{2,2} \end{pmatrix}^{-1} X \right)^{-1} \times X' \times \begin{pmatrix} \Omega^{1,1} & (0) \\ (0) & \Omega^{2,2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (X'(\Omega^{1,1})^{-1}X)^{-1} X' \times (\Omega^{1,1})^{-1} Y^1 \\ (X'(\Omega^{2,2})^{-1}X)^{-1} X' \times (\Omega^{2,2})^{-1} Y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{b}_{mcg}^1 \\ \hat{b}_{mcg}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans le cas présent, la régression  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 & \dots & X_{t-p}^1 & | & X_{t-1}^2 & \dots & X_{t-p}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_1^{1,1} & \psi_1^{2,1} \\ \vdots & \vdots \\ \psi_p^{1,1} & \psi_p^{2,1} \\ \psi_1^{1,2} & \psi_1^{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ \psi_p^{1,2} & \psi_p^{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \end{pmatrix}$$

tandis que les sous-régressions  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{R}^2$  s'écrivent respectivement

$$(\mathcal{R}^1): X_t^1 = \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 & \dots & X_{t-p}^1 & | & X_{t-1}^2 & \dots & X_{t-p}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_1^{1,1} \\ \vdots \\ \psi_p^{1,1} \\ \psi_1^{1,2} \\ \vdots \\ \psi_p^{1,2} \end{pmatrix} + \eta_t^1$$

et

$$(\mathcal{R}^2): X_t^2 = \begin{pmatrix} X_t^1 & | & X_{t-1}^1 & \dots & X_{t-p}^1 & | & X_{t-1}^2 & \dots & X_{t-p}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi_1^{2,1} \\ \vdots \\ \psi_p^{2,1} \\ \psi_1^{2,2} \\ \vdots \\ \psi_p^{2,2} \end{pmatrix} + \eta_t^2$$

comme  $\mathbb{V}(\eta_t) = \begin{pmatrix} \Sigma^{1,1} & 0 \\ 0 & \Sigma^{2,2} - \frac{(\Sigma^{1,2})^2}{\Sigma^{1,1}} \end{pmatrix}$  est diagonale, l'estimation des coefficients de  $\Psi$  par la régression globale  $\mathcal{R}$  est équivalente à celle résultant des deux sous-régressions  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{R}^2$ .

☞ Q3 L'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  se réécrit " $\Sigma^{1,2} = 0$ " soit encore " $\alpha = 0$ ".

Remarquons en outre que si  $\epsilon$  est gaussien, alors il en va de même pour  $\eta = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 - \frac{\text{Cov}(\epsilon^2, \epsilon^1)}{\text{V}(\epsilon^1)} \epsilon^1 \end{pmatrix}$ ;

tester  $\mathcal{H}_0$  revient donc à tester la nullité individuelle du coefficient estimé  $\hat{\alpha}$ , ce qui peut être fait au moyen de la statistique de Student habituelle.

Remarquons que sous  $\mathcal{H}_0$  seule la régression  $\mathcal{R}^2$  est modifiée; il suffit donc de pratiquer le test *dans la seule régression  $\mathcal{R}^2$* .

☞ Q4 L'hypothèse  $\mathcal{H}_0^*$  se réécrit " $\forall k \in \mathbb{N}, \phi_k^{1,2} = 0$ " soit encore " $\forall k \in \mathbb{N}, \psi_k^{1,2} = 0$ ".

Le test de  $\mathcal{H}_0^*$  revient alors au test de la nullité simultanée des coefficients estimés  $(\widehat{\psi}_1^{1,2}, \dots, \widehat{\psi}_p^{1,2})$ , qui peut être conduit au moyen de la statistique de Fisher.<sup>11</sup>

Remarquons que cette fois sous  $\mathcal{H}_0^*$  seule la régression  $\mathcal{R}^1$  est modifiée, et tester  $\mathcal{H}_0^*$  revient à tester la régression  $\mathcal{R}^1$  sous  $\mathcal{H}_0^*$  par rapport à  $\mathcal{R}^1$  sous  $\neg\mathcal{H}_0^*$ . Ainsi il suffit de pratiquer le test *dans la seule régression  $\mathcal{R}^1$* .

\*  
\* \*

<sup>11</sup>A savoir  $F = \frac{SCR_{\mathcal{H}_0^*} - SCR_{\neg\mathcal{H}_0^*}}{SCR_{\neg\mathcal{H}_0^*}} \cdot \frac{T-2p}{p}$  où  $T$  désigne le nombre d'observations,  $2p$  le nombre total de variable explicatives et  $p$  le nombre de variables dont on teste la nullité simultanée, et bien-sûr  $SCR_{\mathcal{H}_t}$  désigne la somme des carrés des résidus estimés (*i.e.* la variance non-expliquée) sous l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{H}_0$  est vraie alors  $F$  suit une loi de Fisher  $\mathcal{F}(p, T - 2p)$ .