

Séries temporelles linéaires
Corrigé des travaux dirigés n°8

Guillaume Lacôte

Bureau E03

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

🌐 <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbf{1} - \phi L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(1 - \phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

et on pose donc $\Phi(L) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbf{1} - \phi L \end{pmatrix}$ et $\Theta(L) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L) \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est l'innovation du processus $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ssi $|\Phi(\mathbb{X})| = 1 - \phi\mathbb{X}$ et $|\Theta(\mathbb{X})| = (\mathbf{1} - \theta_1\mathbb{X})(\mathbf{1} - \theta_2\mathbb{X})(1 - \phi\mathbb{X})$ ont tous deux leurs racines de module strictement¹ supérieur à 1 (ssi $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$ et $|\phi| < 1$).

☞ Q2 Soit $Z_t = (1 - \varphi L)Y_t$. On a :

$$Z_t = c(1 - \phi) + \mu X_{t-3} + (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \varphi L)V_t$$

puis, comme $X_{t-3} = (\mathbf{1} - \theta_1 L)U_{t-3}$ il vient

$$Z_t = c(\mathbf{1} - \phi) + \underbrace{\mu(\mathbf{1} - \theta_1 L)U_{t-3}}_{\text{MA}(1)} + \underbrace{(\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L)V_t}_{\text{MA}(2)}$$

En particulier (voir TD 3, exercice 2) comme U et V sont indépendants, Z est un processus MA d'ordre au plus 2.

Comme en outre $\gamma_Z(2) = \theta_2 \phi \sigma_V^2 \neq 0$, Z est un processus MA(2).

Par conséquent, Y est un processus ARMA(1,2).

Soit $\Psi \in \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$ et η bruit blanc tels que $Z = \Psi(L)\eta$; Ψ et σ_η^2 sont déterminés (voir TD exercice 2) par les équations de Yule-Walker en Z qui pour $h \in \mathbb{Z}$ s'écrivent d'une part d'après la définition de Z

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) &= \mu^2 \gamma_{U_{t-3} - \theta_1 U_{t-4}}(h) + \gamma_{V_{t-(\theta_2+\phi)V_{t-1} + \theta_2 \phi V_{t-2}}}(h) \\ &= \dots \end{aligned}$$

et d'autre part d'après la définition de $\Psi(\mathbb{X}) = \Psi_0 + \Psi_1\mathbb{X} + \Psi_2\mathbb{X}^2$ et η

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) &= \text{Cov}(\Psi_0\eta_t + \Psi_1\eta_{t-1} + \Psi_2\eta_{t-2}, \Psi_0\eta_{t+h} + \Psi_1\eta_{t+h-1} + \Psi_2\eta_{t+h-2}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

L'égalisation de ces expressions pour $h \in \{0, 1, 2\}$ conduit à un système polynômial $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \sigma_\eta^2$ qui s'expriment donc de façon non-linéaire (en général) en les paramètres θ_2 et ϕ .

¹ $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est l'innovation de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ssi leurs racines sont de module supérieur ou égal à 1; mais comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est stationnaire, aucune racine n'est unitaire.

☞ Q3 La prévision linéaire optimale de Y conditionnellement au seul passé de Y s'obtient en transformant la forme ARMA(1,2) précédente en une forme AR(∞) en Y . Mais pour obtenir celle conditionnellement aux passés de X et de Y , il faut déterminer la prévision linéaire optimale de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ conditionnellement à son passé, ce qui se fait en transformant la formulation ARMA vectorielle en forme AR(∞) vectorielle :²

$$\Theta(L)^{-1}\Phi(L)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \Theta(1)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ c(1-\phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{aligned} \Theta(L)^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{1} - \theta_1 L)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1}(\mathbf{1} - \phi L)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{1} - \theta_1 L)^{-1} & 0 \\ -\mu L^3(\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1}(\mathbf{1} - \phi L)^{-1} & (\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{1}{(1-\phi)(1-\theta_2)})c(1-\phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

La projection linéaire optimale de Y connaissant le passé de X et de Y s'obtient alors en projetant : on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3(\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1}(\mathbf{1} - \phi L)^{-1} X_t = \frac{c}{1-\theta_2} + V$$

et donc

$$\mathbb{E}L\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3(\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1}(\mathbf{1} - \phi L)^{-1} X_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots\right) = \frac{c}{1-\theta_2}$$

et donc en appliquant l'opérateur $\mathbb{E}(\cdot | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots)$ il vient ³

$$\mathbb{E}(Y_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots) = \frac{c}{1-\theta_2} + \mu L^3(\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1}(\mathbf{1} - \phi L)^{-1} X_t - \sum_{k=1}^{+\infty} \theta_2^k Y_{t-k}$$

*
* *

²Attention à l'ordre en général : $\Theta(L)^{-1}$ et $\Phi(L)$ sont des matrices et donc en général $\Theta(L)^{-1} \times \Phi(L) \neq \Phi(L) \times \Theta(L)^{-1}$. Cependant dans le cas présent $\Theta(L)$ est diagonale, donc commute avec $\Phi(L)$.

³Cette expression fait a priori intervenir $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots)$; mais comme le polynôme en facteur de X est divisible par L^3 , seules les valeurs passées de X interviennent.

Si ce n'était pas le cas, il faudrait déterminer explicitement $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots)$ en projetant la forme AR(∞) sur X : $(\mathbf{1} - \theta_1 L)^{-1} X = U$. Notons enfin que cette dernière est indépendante de Y , ce qui est heureux.

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 (a) $(\mathbf{1} - L)X = U$ donc $(X_t)_{t>0}$ est une marche aléatoire, donc non-stationnaire.

D'autre part, $\mathbb{V}(X_{t-1} - V_t) = (t-1)\sigma_U^2 + \sigma_V^2$ car X_t et V_t sont indépendants. Or (par l'absurde) $(Y_t)_{t>0}$ était stationnaire, alors $X_{t-1} - V_t = -Y_t + \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2}$ serait stationnaire, donc de variance constante, et il en irait de même pour X ! Donc $(Y_t)_{t>0}$ n'est pas stationnaire.

Autre méthode :

Si Y était stationnaire alors $X - V = (-\mathbf{1} + \frac{5}{6}L - \frac{1}{6}L^2)Y$ le serait également, et comme V est stationnaire et X et V sont décorrélés, X le serait également.

(b) $\Delta X = U$ est un bruit blanc, donc stationnaire.

Par ailleurs

$$\Delta Y_t = \frac{5}{6}(\Delta Y)_{t-1} - \frac{1}{6}(\Delta Y)_{t-2} - U_{t-1} + V_t - V_{t-1}$$

Définissons $W_t = \underbrace{-U_{t-1}}_{\text{MA}(0)} + \underbrace{V_t - V_{t-1}}_{\text{MA}(1)}$; alors (voir TD 3, exercice 2) W est un processus MA d'ordre au plus 1.

Comme en outre $\gamma_w(1) = -\sigma_w^2 \neq 0$, W est un processus MA d'ordre au plus 1. Comme en outre $\gamma_w(1) = -\sigma_w^2 \neq 0$, W est un processus MA d'ordre au plus 1. Comme en outre $\gamma_w(1) = -\sigma_w^2 \neq 0$, W est un processus MA d'ordre au plus 1. Comme en outre $\gamma_w(1) = -\sigma_w^2 \neq 0$, W est un processus MA d'ordre au plus 1. Comme en outre $\gamma_w(1) = -\sigma_w^2 \neq 0$, W est un processus MA d'ordre au plus 1.

et donc ΔY est un processus ARMA(2,1)

☞ Q2 Posons

$$A(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A(L)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

et en outre

$$|A(\mathbb{X})| = (1 - \mathbb{X})\left(1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2\right) = (1 - \mathbb{X})\left(1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\mathbb{X}\right)$$

dont les racines 1, 2 et 3 sont toutes de module supérieur (ou égal) à un, de sorte que la représentation est canonique.

☞ Q3 $A(\mathbb{X}) - A(1)$ est un polynôme (matriciel) en \mathbb{X} qui s'annule en $\mathbb{X} = 1$, donc divisible par $(1 - \mathbb{X})$ on a en l'occurrence

$$\begin{aligned} A(\mathbb{X}) - A(1) &= \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} - 1 & \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \mathbb{X}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons donc $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix}$; A^* divise $A(\mathbb{X}) - A(1)$.

On a alors

$$\epsilon = A(L)Z = A(1)Z + A^*(L)\Delta Z$$

Or ΔZ est (asymptotiquement) stationnaire ⁴ donc il en va de même pour $A(1)Z = \epsilon - A^*(L)\Delta Z$.

Or $A(1)Z = \begin{pmatrix} 0 \\ X + \frac{1}{3}Y \end{pmatrix}$, donc en particulier

$$X + \frac{1}{3}Y$$

est (asymptotiquement) stationnaire.

*
* *

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 (a) Comme $\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)$ s'annule en 1, il est divisible par $1 - \mathbb{X}$ et soit donc $\Phi^+(\mathbb{X}) = \frac{\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)}{1 - \mathbb{X}} \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$; ainsi $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$.

Alors (voir TD 7, exercice 1)

$$\begin{aligned} \Phi(L)Y &= \Phi(1) \times Y + (\mathbf{1} - L) \cdot \Phi^+(L) \circ Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \Phi^+(L) \circ \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \underbrace{\Phi^+(0)}_{\Phi(0) - \Phi(1)} \Delta Y + \underbrace{(\Phi^+(L) - \Phi^+(0))}_{-\Phi^*(L)} \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + (\mathbf{1} - \Phi(1)) \times \Delta Y - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \Delta Y - (\Phi(1) \times Y - \Phi(1) \times LY) - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\ &= \Delta Y + \Phi(1) \times LY - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \end{aligned}$$

et donc comme par ailleurs $\Phi(L)Y_t = \mu + \epsilon_t$ il vient en définitive

$$\Delta Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t$$

en notant $\Phi^*(\mathbb{X}) = \Phi^+(0) - \Phi^+(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \mathbb{X}^i$.

⁴Ce n'est pas tout-à-fait évident : ΔX et ΔY sont stationnaires, mais il faut encore montrer que $\text{Cov}(\Delta X_t, \Delta Y_{t+h})$ ne dépend pas du temps t : pour ce faire, on soustrait l'équation en Y aux dates t et $t-1$, ce qui fait apparaître $\Delta Y_t = \frac{5}{8}\Delta Y_{t-1} - \frac{1}{8}\Delta Y_{t-2} - \Delta X_{t-1} + \Delta V_t$.

(b) On a

$$\Delta Y = \Phi(1)LY - \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i L^i \Delta Y + \mu + \epsilon$$

et donc

$$\Phi(1)LY = -\Delta Y + \underbrace{\sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i L^i \Delta Y}_{\Psi(L)\Delta Y} + \mu + \epsilon$$

Supposons (par l'absurde) que $\Phi(1)$ soit inversible : alors

$$LY = \Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y + \Phi(1)^{-1}\mu + \Phi(1)^{-1}\epsilon$$

Mais comme Y est intégré d'ordre 1, ΔY est stationnaire, et donc LY , donc Y , sera stationnaire ! ⁵

Comme on a supposé que Y était intégré d'ordre 1, $\Phi(1)$ n'est **pas** inversible, *i.e.* est de rang au plus $n-1$.

(c) Soit α une base de l'image de $\Phi(1)$ (qui est de dimension $r \leq n-1$), et notons $\beta_{i,1}, \dots$, les coefficients de la i -ième ligne L_i de $\Phi(1)$ dans la base α . On a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$L_i = \sum_{j=1}^r \beta_{i,j} \alpha_j \quad \text{où} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{j,1} \\ \vdots \\ \alpha_{j,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{R})$$

et donc

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1,r} & \cdots & \beta_{n,r} \end{pmatrix}}_{\beta'}$$

soit

$$\Phi(1) = \alpha \beta'$$

(d) On a

$$\Phi(1)Y_{t-1} = \Psi(L)\Delta Y_t + \mu + \epsilon_t$$

Or α est une base, donc $\alpha' \alpha$ est de plein rang donc inversible; en multipliant par $(\alpha' \alpha)^{-1}$ il vient alors

$$(\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \Phi(1)Y_{t-1} = (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \Psi(L)\Delta Y_t + (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \mu + (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \epsilon_t$$

et donc $(\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \Phi(1)Y$ est stationnaire.

Comme $\Phi(1) = \alpha \beta'$ cela revient à dire que

⁵En toute rigueur se pose le problème de la corrélation de $\Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y$ avec ϵ . Mais comme Y est intégré d'ordre 1 (et pas plus), ΔY vérifie une équation AR(d) de la forme $A(L)\Delta Y = \gamma + \epsilon$ de sorte que $LY = B(L)\Delta Y$ pour $B(\mathbb{X}) = \Phi(1)^{-1}(\Psi(\mathbb{X}) + A(\mathbb{X}) - \gamma)$.

$\beta'Y$ est stationnaire

☞ Q2 (a) Comme $C(\mathbb{X}) - C(1)$ s'annule en 1, soit $C^+(\mathbb{X}) = \frac{C(\mathbb{X}) - C(1)}{1 - \mathbb{X}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})[[\mathbb{X}]]$; ainsi $C(\mathbb{X}) = C(1) + (1 - \mathbb{X})C^+(\mathbb{X})$. On a alors

$$(\mathbf{1} - L)Y = m + C(1)\epsilon + (\mathbf{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Définissons $S = C^*(L)\epsilon$; ainsi S est stationnaire.

Soit alors $T = Y - S$, montrons que T est une marche aléatoire (avec dérive) : on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - L)T &= (\mathbf{1} - L)Y - (\mathbf{1} - L)S \\ &= m + C(1)\epsilon \end{aligned}$$

qui est un “bruit blanc” d'espérance m .

(b) On a en multipliant la décomposition de Y par β'

$$\beta'(\mathbf{1} - L)Y = \beta'm + \beta'C(1)\epsilon + \beta'(\mathbf{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Or $\beta'Y$ est stationnaire, donc $\mathbb{E}(\beta'Y_t) = \mathbb{E}(\beta'Y_{t-1})$ et par suite

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}((\mathbf{1} - L) \circ (\beta'Y)) \\ &= \mathbb{E}(\beta'(\mathbf{1} - L)Y) \\ &= \mathbb{E}(\beta'm + \beta'C(1)\epsilon + \beta'(\mathbf{1} - L)C^*(L)\epsilon) \\ &= \beta'm \end{aligned}$$

Enfin, si (par l'absurde) $\beta'C(1) \neq 0$, alors $Z = \beta'Y - \beta'C^*(L)\epsilon$ qui vérifie $(\mathbf{1} - L)Z = \beta'C(1)\epsilon$ est une marche aléatoire, donc d'espérance non-bornée dans le temps, et donc il en va de même pour $\beta'Y$ qui est pourtant stationnaire! Donc $\beta'C(1) = 0$.

(c) On a $\beta'm = 0$, donc $m \in \langle \beta \rangle^\perp$, et donc il existe m_0 tel que $m = \beta^\perp m'_0$.

De même $\beta'C(1) = 0$, donc $C(1) \in \langle \beta \rangle^\perp$ et il existe δ tel que $m = \beta^\perp \delta'$.

(d) On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - L)T &= m + C(1)\epsilon \\ &= \beta^\perp (m'_0 + \delta'\epsilon) \end{aligned}$$

Soit donc M la marche aléatoire multi-variée (de taille $n - r$) vérifiant $M_0 = 0$ et

$$(\mathbf{1} - L)M = m'_0 + \delta'\epsilon$$

Alors $(\mathbf{1} - L)T = \beta^\perp(\mathbf{1} - L)M = (\mathbf{1} - L) \circ (\beta^\perp M)$, donc les processus T et $\beta^\perp M$ sont égaux à une constante (aléatoire) près; ⁶ comme $\dim(\beta^\perp) = n - \dim(\beta) = n - r$ on a

T est un vecteur composé de $n - r$ marches aléatoires univariées

*
* *

⁶On n'a pas nécessairement $T = M$: notamment il n'y a aucune raison a priori pour que $T_0 = Y_0 - C^+(L)\epsilon_0$ soit égal à $\beta^\perp M_0$, car une valeur de M_0 ad hoc n'existe pas forcément !