Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Corrigé des travaux dirigés n°8

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbb{1}-\phi L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(1-\phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{1}-\theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

et on pose donc $\Phi(L) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbb{1}-\phi L \end{pmatrix}$ et $\Theta(L) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}-\theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L) \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est l'innovation du processus $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *ssi* $|\Phi(\mathbb{X})| = 1-\phi\mathbb{X}$ et $|\Theta(\mathbb{X})| = (1-\theta_1\mathbb{X})(1-\theta_2\mathbb{X})(1-\phi\mathbb{X})$ ont tous deux leurs racines de module strictement[1] supérieur à 1 (soit *ssi* $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$ et $|\varphi| < 1$).

☞ Q2 Soit $Z_t = (1-\varphi L)Y_t$. On a :

$$Z_t = c(1-\phi) + \mu X_{t-3} + (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\varphi L)V_t$$

puis, comme $X_{t-3} = (\mathbb{1}-\theta_1 L)U_{t-3}$ il vient

$$Z_t = c(\mathbb{1}-\phi) + \mu\underbrace{(\mathbb{1}-\theta_1 L)U_{t-3}}_{\text{MA}(1)} + \underbrace{(\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L)V_t}_{\text{MA}(2)}$$

En particulier (voir TD 3, exercice 2) comme U et V sont indépendants, Z est un processus MA d'ordre *au plus* 2.

Comme en outre $\gamma_Z(2) = \theta_2\phi\sigma_V^2 \neq 0$, Z est un processus MA(2).

Par conséquent, Y est un processus ARMA(1,2).

Soit $\Psi \in \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$ et η bruit blanc tels que $Z = \Psi(L)\eta$; Ψ et σ_η^2 sont déterminés (voir TD 2, exercice 2) par les équations de Yule-Walker en Z qui pour $h \in \mathbb{Z}$ s'écrivent d'une part d'après la définition de Z

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\,(Z_t, Z_{t+h}) &= \mu^2\gamma_{U_{t-3}-\theta_1 U_{t-4}}(h) + \gamma_{V_t-(\theta_2+\phi)V_{t-1}+\theta_2\phi V_{t-2}}(h) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

et d'autre part d'après la définition de $\Psi(\mathbb{X}) = \Psi_0 + \Psi_1\mathbb{X} + \Psi_2\mathbb{X}^2$ et η

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\,(Z_t, Z_{t+h}) &= \mathbb{C}ov\,(\Psi_0\eta_t + \Psi_1\eta_{t-1} + \Psi_2\eta_{t-2}, \Psi_0\eta_{t-h} + \Psi_1\eta_{t-h-1} + \Psi_2\eta_{t-h-2}) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

L'égalisation de ces expressions pour $h \in \{0,1,2\}$ conduit à un système polynômial en $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \sigma_\eta^2$ qui s'expriment donc de façon non-linéaire (en général) en les paramètres θ_1, θ_2 et ϕ.

[1] $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est l'innovation de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *ssi* leurs racines sont de module supérieur ou égal à 1 ; mais comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est stationnaire, aucune racine n'est unitaire.

☞ Q3 La prévision linéaire optimale de Y conditionnellement au seul passé de Y s'obtient en transformant la forme ARMA(1,2) précédente en une forme AR(∞) en Y. Mais pour obtenir celle conditionnellement aux passés de X et de Y, il faut déterminer la prévision linéaire optimale de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ conditionnellement à son passé, ce qui se fait en transformant la formulation ARMA vectorielle en forme AR(∞) vectorielle :[2]

$$\Theta(L)^{-1}\Phi(L)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \Theta(1)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ c(1-\phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{aligned}\Theta(L)^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}-\theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbb{1}-\theta_1 L)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{1}-\theta L)^{-1} & 0 \\ -\mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1} & (\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{(1-\phi)(1-\theta_2)}\right)(c(1-\phi)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

La projection linéaire optimale de Y connaissant le passé de X et de Y s'obtient alors en projetant : on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1}X_t = \frac{c}{1-\theta_2} + V$$

et donc

$$\mathbb{EL}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1}X_t | X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right) = \frac{c}{1-\theta_2}$$

et donc en appliquant l'opérateur $\mathbb{E}\left(\cdot|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right)$ il vient [3]

$$\boxed{\mathbb{E}\left(Y_t|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right) = \frac{c}{1-\theta_2} + \mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1}X_t - \sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty}\theta_2^k Y_{t-k}}$$

⋆
⋆ ⋆

[2] Attention à l'ordre en général : $\Theta(L)^{-1}$ et $\Phi(L)$ sont des matrices et donc en général $\Theta(L)^{-1}\times\Phi(L) \neq \Phi(L)\times\Theta(L)^{-1}$. Cependant dans le cas présent $\Theta(L)$ est diagonale, donc commute avec $\Phi(L)$.

[3] Cette expression fait a priori intervenir $\mathbb{E}\left(X_t|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right)$; mais comme le polynôme en facteur de X est divisible par L^3, seules les valeurs passées de X interviennent.

Si ce n'était pas le cas, il faudrait déterminer explicitement $\mathbb{E}\left(X_t|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right)$ en projetant la forme AR(∞) sur X : $(\mathbb{1}-\theta_1 L)^{-1}X = U$. Notons enfin que cette dernière est indépendante de Y, ce qui est heureux.

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 (a) $(\mathbb{1} - L)X = U$ donc $(X_t)_{t>0}$ est une marche aléatoire, donc non-stationnaire.
D'autre part, $\mathbb{V}(X_{t-1} - V_t) = (t-1)\sigma_U^2 + \sigma_Y^2$ car X_t et V_t sont indépendants. Or si (par l'absurde) $(Y_t)_{t>0}$ était stationnaire, alors $X_{t-1} - V_t = -Y_t + \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2}$ serait stationnaire, donc de variance constante, et il en irait de même pour X ! Donc $(Y_t)_{t>0}$ n'est pas stationnaire.
<u>*Autre méthode :*</u>
Si Y était stationnaire alors $X - V = (-\mathbb{1} + \frac{5}{6}L - \frac{1}{6}L^2)Y$ le serait également, et comme V est stationnaire <u>et X et V sont décorrélés</u>, X le serait également.

(b) $\Delta X = U$ est un bruit blanc, donc stationnaire.
Par ailleurs

$$\Delta Y_t = \frac{5}{6}(\Delta Y)_{t-1} - \frac{1}{6}(\Delta Y)_{t-2} - U_{t-1} + V_t - V_{t-1}$$

Définissons $W_t = -\underbrace{U_{t-1}}_{\text{MA}(0)} + \underbrace{V_t - V_{t-1}}_{\text{MA}(1)}$; alors (voir TD 3, exercice 2) W est un processus MA d'ordre au plus 1. Comme en outre $\gamma_w(1) = -\sigma_v^2 \neq 0$, W est un MA(1) et donc ΔY est un processus ARMA(2,1)

☞ Q2 Posons

$$A(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A(L)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

et en outre

$$|A(\mathbb{X})| = (1 - \mathbb{X})\left(1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2\right) = (1 - \mathbb{X})\left(1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\mathbb{X}\right)$$

dont les racines 1, 2 et 3 sont toutes de module supérieur (ou égal) à un, de sorte que la représentation est canonique.

☞ Q3 $A(\mathbb{X}) - A(1)$ est un polynôme (matriciel) en $\mathbb{X}$ qui s'annule en $\mathbb{X} = 1$, donc divisible par $(1 - \mathbb{X})$: on a en l'occurence

$$\begin{aligned} A(\mathbb{X}) - A(1) &= \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} - 1 & \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \mathbb{X}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons donc $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix}$; A^* divise $A(\mathbb{X}) - A(1)$.

On a alors

$$\epsilon = A(L)Z = A(1)Z + A^*(L)\Delta Z$$

Or ΔZ est (asymptotiquement) stationnaire [4] donc il en va de même pour $A(1)Z = \epsilon - A^*(L)\Delta Z$.

Or $A(1)Z = \begin{pmatrix} 0 \\ X + \frac{1}{3}Y \end{pmatrix}$, donc en particulier

$$\boxed{X + \tfrac{1}{3}Y}$$

est (asymptotiquement) stationnaire.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 (a) Comme $\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)$ s'annule en 1, il est divisible par $1 - \mathbb{X}$ et soit donc $\Phi^+(\mathbb{X}) = \frac{\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)}{1 - \mathbb{X}} \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$; ainsi $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$.

Alors (voir TD 7, exercice 1)

$$\begin{aligned}
\Phi(L)Y &= \Phi(1) \times Y + (\mathbb{1} - L) \cdot \Phi^+(L) \circ Y \\
&= \Phi(1) \times Y + \Phi^+(L) \circ \Delta Y \\
&= \Phi(1) \times Y + \underbrace{\Phi^+(0)}_{\Phi(0)-\Phi(1)} \Delta Y + \underbrace{\left(\Phi^+(L) - \Phi^+(0)\right)}_{-\Phi^*(L)} \Delta Y \\
&= \Phi(1) \times Y + (\mathbb{1} - \Phi(1)) \times \Delta Y - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\
&= \Phi(1) \times Y + \Delta Y - (\Phi(1) \times Y - \Phi(1) \times LY) - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\
&= \Delta Y + \Phi(1) \times LY - \Phi^*(L) \circ \Delta Y
\end{aligned}$$

et donc comme par ailleurs $\Phi(L)Y_t = \mu + \epsilon_t$ il vient en définitive

$$\boxed{\Delta Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t}$$

en notant $\Phi^*(\mathbb{X}) = \Phi^+(0) - \Phi^+(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \mathbb{X}^i$.

[4] Ce n'est pas tout-à-fait évident : ΔX et ΔY sont stationnaires, mais il faut encore montrer que $\mathbb{C}ov\,(\Delta X_t, \Delta Y_{t+h})$ ne dépend pas du temps t : pour ce faire, on soustrait l'équation en Y aux dates t et $t-1$, ce qui fait apparaître $\Delta Y_t = \frac{5}{6}\Delta Y_{t-1} - \frac{1}{6}\Delta Y_{t-2} - \Delta X_{t-1} + \Delta V_t$.

(b) On a

$$\Delta Y = \Phi(1)LY - \sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i L^i \Delta Y + \mu + \epsilon$$

et donc

$$\Phi(1)LY = \underbrace{-\Delta Y + \sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i L^i \Delta Y}_{\Psi(L)\Delta Y} + \mu + \epsilon$$

Supposons (par l'absurde) que $\Phi(1)$ soit inversible : alors

$$LY \quad = \quad \Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y + \Phi(1)^{-1}\mu + \Phi(1)^{-1}\epsilon$$

Mais comme Y est intégré d'ordre 1, ΔY est stationnaire, et donc LY, donc Y, serait stationnaire ! [5]

Comme on a supposé que Y était intégré d'ordre 1, $\Phi(1)$ n'est **pas** inversible, *i.e.* est de rang au plus $n-1$.

(c) Soit α une base de l'image de $\Phi(1)$ (qui est de dimension $r \leq n-1$), et notons $\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,r}$ les cœfficients de la i-ième ligne L_i de $\Phi(1)$ dans la base α. On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$L_i = \sum_{j=1}^{r}\beta_{i,j}\alpha_j \quad \text{où} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{j,1} \\ \vdots \\ \alpha_{j,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{R})$$

et donc

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1,r} & \cdots & \beta_{n,r} \end{pmatrix}}_{\beta'}$$

soit

$$\boxed{\Phi(1) = \alpha\beta'}$$

(d) On a

$$\Phi(1)Y_{t-1} = \Psi(L)\Delta Y_t + \mu + \epsilon_t$$

Or α est une base, donc $\alpha'\alpha$ est de plein rang donc inversible ; en multipliant par $(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'$ il vient alors

$$(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Phi(1)Y_{t-1} = (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Psi(L)\Delta Y_t + (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\mu + (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\epsilon_t$$

et donc $(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Phi(1)Y$ est stationnaire.

Comme $\Phi(1) = \alpha\beta'$ cela revient à dire que

[5] En toute rigueur se pose le problème de la corrélation de $\Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y$ avec ϵ. Mais comme Y est intégré d'ordre 1 (et pas plus), ΔY vérifie une équation AR(d)e la forme $A(L)\Delta Y = \gamma + \epsilon$ de sorte que $LY = B(L)\Delta Y$ pour $B(\mathbb{X}) = \Phi(1)^{-1}(\Psi(\mathbb{X}) + A(\mathbb{X}) - \gamma)$.

$$\boxed{\beta' Y \text{ est stationnaire}}$$

☞ Q2 (a) Comme $C(\mathbb{X}) - C(1)$ s'annule en 1, soit $C^+(\mathbb{X}) = \frac{\mathbb{C}(\mathbb{X})-\mathbb{C}(1)}{1-\mathbb{X}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})[\mathbb{X}]$; ainsi $C(\mathbb{X}) = C(1) + (1-\mathbb{X})C^+(\mathbb{X})$. On a alors

$$(\mathbb{1} - L)Y = m + C(1)\epsilon + (\mathbb{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Définissons $S = C^*(L)\epsilon$; ainsi S est stationnaire.
Soit alors $T = Y - S$, montrons que T est une marche aléatoire (avec dérive) : on a

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} - L)T &= (\mathbb{1} - L)Y - (\mathbb{1} - L)S \\ &= m + C(1)\epsilon\end{aligned}$$

qui est un "bruit blanc" d'espérance m.

(b) On a en multipliant la décomposition de Y par β'

$$\beta'(\mathbb{1} - L)Y = \beta' m + \beta' C(1)\epsilon + \beta'(\mathbb{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Or $\beta' Y$ est stationnaire, donc $\mathbb{E}(\beta' Y_t) = \mathbb{E}(\beta' Y_{t-1})$ et par suite

$$\begin{aligned}0 &= \mathbb{E}\left((\mathbb{1} - L)\circ(\beta' Y)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\beta'(\mathbb{1} - L)Y\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\beta' m + \beta' C(1)\epsilon + \beta'(\mathbb{1} - L)C^*(L)\epsilon\right) \\ &= \beta' m\end{aligned}$$

Enfin, si (par l'absurde) $\beta' C(1) \neq 0$, alors $Z = \beta' Y - \beta' C^*(L)\epsilon$ qui vérifie $(\mathbb{1} - L)Z = \beta' C(1)\epsilon$ est une marche aléatoire, donc d'espérance non-bornée dans le temps, et donc il en va de même pour $\beta' Y$ qui est pourtant stationnaire ! Donc $\beta' C(1) = 0$.

(c) On a $\beta' m = 0$, donc $m \in \langle\beta\rangle^\perp$, et donc il existe m_0 tel que $m = \beta^\perp m_0'$.
De même $\beta' C(1) = 0$, donc $C(1) \in \langle\beta\rangle^\perp$ et il existe δ tel que $m = \beta^\perp \delta'$.

(d) On a

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} - L)T &= m + C(1)\epsilon \\ &= \beta^\perp (m_0' + \delta'\epsilon)\end{aligned}$$

Soit donc M la marche aléatoire multi-variée (de taille $n-r$) vérifiant $M_0 = 0$ et

$$(\mathbb{1} - L)M = m_0' + \delta'\epsilon$$

Alors $(\mathbb{1} - L)T = \beta^\perp(\mathbb{1} - L)M = (\mathbb{1} - L)\circ\left(\beta^\perp M\right)$, donc les processus T et $\beta^\perp M$ sont égaux à une constante (aléatoire) près ; [6] comme $\dim(\beta^\perp) = n - \dim(\beta) = n - r$ on a

$$\boxed{T \text{ est un vecteur composé de } n-r \text{ marches aléatoires univariées}}$$

⋆

⋆ ⋆

[6] On n'a pas nécessairement $T = M$: notamment il n'y a aucune raison a priori pour que $T_0 = Y_0 - C^+(L)\epsilon_0$ soit égal à $\beta^\perp M_0$, car une valeur de M_0 ad hoc n'existe pas forcément !