ENSAE
ECOLE NATIONALE
DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

# Séries temporelles linéaires
## *Enoncé des travaux dirigés n°8*

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
Guillaume.Lacote@ensae.fr
http://ensae.no-ip.com/SE206/

*Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005*



## Enoncé de l'exercice 1

On considère deux processus stationnaires $X$ et $Y$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_t &=& (\mathbb{1}-\theta_1 L)U_t \\ Y_t &=& c+\frac{\mu}{1-\phi L}X_{t-3}+(\mathbb{1}-\theta_2 L)V_t \end{array}\right.$$

où $c$ est une constante et $u$ et $v$ sont deux bruits blanc indépendants de variances respecti $\sigma_u^2$ et $\sigma_v^2$.

☞ Q1 Ecrire le vecteur $(X_t, Y_t)$' sous forme d'un processus ARMA bivarié.
Donner des conditions suffisantes pour que $(u_t, v_t)$' soit l'innovation du processus (ce que l supposera par la suite).

☞ Q2 Montrer que $Y_t$ est en fait un processus ARMA unidimensionnel.
Déterminer son ordre et montrer que ses coefficients sont liés de manière non linéaire à ce introduits dans la définition des processus.

☞ Q3 Déterminer la prévision optimale des valeurs futures de $Y_t$ connaissant le passé de $X_t$ et $Y_t$.

---

## Enoncé de l'exercice 2

On considère deux processus du second ordre $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_t &=& X_{t-1}+U_t \\ Y_t &=& \frac{5}{6}Y_{t-1}-\frac{1}{6}Y_{t-2}-X_{t-1}+V_t \end{array}\right.$$

où $U$ et $V$ sont deux bruits blanc indépendants de variances respectives $\sigma_u^2$ et $\sigma_v^2$.
On suppose en outre que $\forall t<0; X_t = Y_t = U_t = V_t = 0$

☞ Q1 (a) Vérifier que ni $(X_t)_{t>0}$ ni $(Y_t)_{t>0}$ n'est stationnaire.
(b) Vérifier que $(\Delta X_t)_{t\geq 2}$ et $(\Delta Y_t)_{t\geq 2}$ sont équivalents à des processus stationnaires, et préci le cas échéant leur forme ARMA .

On note $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\epsilon = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

☞ Q2 Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel) $A$ tel que

$$\forall t>0,\ A(L)Z=\epsilon$$

et en donner la représentation canonique du modèle

☞ Q3 Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel) $A^*$ de degré $d^\circ A-1$ tel que $A(\mathbb{X}) = A(1) + ($ $\mathbb{X})A^*(\mathbb{X})$.
En déduire qu'il existe une combinaison linéaire de $X$ et $Y$ qui est asymptotiquement équivale à un processus stationnaire.

## Enoncé de l'exercice 3

On considère un processus vectoriel $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de taille $n$, dont on suppose qu'il est intégré d'ordre 1, et qu'il admet une représentation VAR de la forme :

$$\Phi(L)Y = \mu + \epsilon$$

où $\epsilon$ est l'innovation de $Y$ et $\Phi(0) = \mathcal{I}d$.

☞ Q1 (a) En utilisant la décomposition $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1-\mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$, montrer qu'on peut écrire le modèle sous la forme équivalente :

$$(\mathbb{1} - L)Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i(\mathbb{1} - L)Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t$$

(b) Montrer que le rang de $\Phi(1)$ est inférieur strictement à $n$.

(c) On suppose que le rang de $\Phi(1)$ est égal à $r$. Montrer qu'il existe deux matrices $\alpha$ et $\beta$ de dimensions $(n,r)$ et de rang $r$ telles que $\Phi(1) = \alpha\beta'$.

(d) Montrer que $\beta' y_t$ est nécessairement stationnaire (les colonnes de $\beta$ sont alors appelées vecteurs de cointégration de $y_t$).

☞ Q2 On suppose que la représentation de Wold du processus $Y$ est de la forme

$$(\mathbb{1} - L)Y = m + C(L)\epsilon$$

avec $C(0) = \mathcal{I}d$.

(a) En utilisant la décomposition

$$C(L) = C(1) + (\mathbb{1} - L)C^+(L)$$

montrer, en généralisant la démarche présentée dans TD 4, exercice 1 , qu'il existe une marche aléatoire[1] (multivariée) $T$ et un processus stationnaire $S$ tels que $Y = S + T$.

(b) Montrer qu'on a nécessairement : $\beta' m = 0$ et $\beta' C(1) = 0$.

(c) Soit $\beta^{\perp}$ une base[2] de l'orthogonal de $\beta$. Déduire de la question précédente qu'il existe $m_0 \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $\delta \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$ tels que $m = \beta^{\perp} m_0'$ et $C(1) = \beta^{\perp}\delta'$.

(d) En déduire que $T_t$ s'exprime en fait comme combinaison linéaire de $n-r$ marches aléatoires univariées (ces marches aléatoires sont appelées *tendances communes* aux séries $(Y_t^i)_t$ ).

[1] Avec dérive : $(\mathbb{1} - L)T = \eta$ où $\eta$ est un bruit d'espérance a priori **non-nulle**.

[2] C'est-à-dire que les colonnes de $\beta^{\perp}$ forment une base de l'orthogonal de l'espace engendré par les colonnes de $\beta$.