ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Enoncé des travaux dirigés n°8

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005

Enoncé de l'exercice 1

On considère deux processus stationnaires X et Y vérifiant :

$$\begin{cases} X_t &= (\mathbb{1} - \theta_1 L)U_t \\ Y_t &= c + \frac{\mu}{1-\phi L} X_{t-3} + (\mathbb{1} - \theta_2 L)V_t \end{cases}$$

où c est une constante et u et v sont deux bruits blanc indépendants de variances respectives σ_u^2 et σ_v^2.

☞ Q1 Ecrire le vecteur (X_t, Y_t)' sous forme d'un processus ARMA bivarié.
Donner des conditions suffisantes pour que (u_t, v_t)' soit l'innovation du processus (ce que l'on supposera par la suite).

☞ Q2 Montrer que Y_t est en fait un processus ARMA unidimensionnel.
Déterminer son ordre et montrer que ses coefficients sont liés de manière non linéaire à ceux introduits dans la définition des processus.

☞ Q3 Déterminer la prévision optimale des valeurs futures de Y_t connaissant le passé de X_t et Y_t.

Enoncé de l'exercice 2

On considère deux processus du second ordre $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ tels que

$$\begin{cases} X_t &= X_{t-1} + U_t \\ Y_t &= \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} - X_{t-1} + V_t \end{cases}$$

où U et V sont deux bruits blanc indépendants de variances respectives σ_u^2 et σ_v^2.
On suppose en outre que $\forall t < 0; X_t = Y_t = U_t = V_t = 0$

☞ Q1 (a) Vérifier que ni $(X_t)_{t>0}$ ni $(Y_t)_{t>0}$ n'est stationnaire.
(b) Vérifier que $(\Delta X_t)_{t\geq 2}$ et $(\Delta Y_t)_{t\geq 2}$ sont équivalents à des processus stationnaires, et préciser le cas échéant leur forme ARMA .

On note $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\epsilon = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

☞ Q2 Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel) A tel que

$$\forall t > 0,\ A(L)Z = \epsilon$$

et en donner la représentation canonique du modèle

☞ Q3 Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel) A^* de degré $d°A - 1$ tel que $A(\mathbb{X}) = A(1) + (1 - \mathbb{X})A^*(\mathbb{X})$.
En déduire qu'il existe une combinaison linéaire de X et Y qui est asymptotiquement équivalente à un processus stationnaire.

Enoncé de l'exercice 3

On considère un processus vectoriel $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de taille n, dont on suppose qu'il est intégré d'ordre 1, et qu'il admet une représentation VAR de la forme :

$$\Phi(L)Y = \mu + \epsilon$$

où ϵ est l'innovation de Y et $\Phi(0) = \mathcal{I}d$.

☞ Q1 (a) En utilisant la décomposition $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$, montrer qu'on peut écrire le modèle sous la forme équivalente :

$$(\mathbb{1} - L)Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i(\mathbb{1} - L)Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t$$

(b) Montrer que le rang de $\Phi(1)$ est inférieur strictement à n.

(c) On suppose que le rang de $\Phi(1)$ est égal à r. Montrer qu'il existe deux matrices α et β de dimensions (n, r) et de rang r telles que $\Phi(1) = \alpha\beta'$.

(d) Montrer que $\beta' y_t$ est nécessairement stationnaire (les colonnes de β sont alors appelées vecteurs de cointégration de y_t).

☞ Q2 On suppose que la représentation de Wold du processus Y est de la forme

$$(\mathbb{1} - L)Y = m + C(L)\epsilon$$

avec $C(0) = \mathcal{I}d$.

(a) En utilisant la décomposition

$$C(L) = C(1) + (\mathbb{1} - L)C^+(L)$$

montrer, en généralisant la démarche présentée dans TD 4, exercice 1, qu'il existe une marche aléatoire[1] (multivariée) T et un processus stationnaire S tels que $Y = S + T$.

(b) Montrer qu'on a nécessairement : $\beta' m = 0$ et $\beta' C(1) = 0$.

(c) Soit $\beta^\perp$ une base[2] de l'orthogonal de β. Déduire de la question précédente qu'il existe $m_0 \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $\delta \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$ tels que $m = \beta^\perp m_0'$ et $C(1) = \beta^\perp \delta'$.

(d) En déduire que T_t s'exprime en fait comme combinaison linéaire de $n-r$ marches aléatoires univariées (ces marches aléatoires sont appelées *tendances communes* aux séries $(Y_t^i)_t$).

[1] Avec dérive : $(\mathbb{1} - L)T = \eta$ où η est un bruit d'espérance a priori **non-nulle**.
[2] C'est-à-dire que les colonnes de $\beta^\perp$ forment une base de l'orthogonal de l'espace engendré par les colonnes de β.