



Deuxième année  
2005-2005

Séries temporelles linéaires  
*Réponses question par question des travaux  
dirigés n° 8*

Guillaume Lacôte  
Bureau **E03**

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE206/>

<b>Exercice corrigé 1</b>
---------------------------

On considère deux processus stationnaires  $X$  et  $Y$  vérifiant :

$$\begin{cases} X_t = (\mathbf{1} - \theta_1 L)U_t \\ Y_t = c + \frac{\mu}{1-\phi L}X_{t-3} + (\mathbf{1} - \theta_2 L)V_t \end{cases}$$

où  $c$  est une constante et  $u$  et  $v$  sont deux bruits blanc indépendants de variances respectives  $\sigma_u^2$  et  $\sigma_v^2$ .

⇒ Q1 Ecrire le vecteur  $(X_t, Y_t)'$  sous forme d'un processus ARMA bivarié.  
Donner des conditions suffisantes pour que  $(u_t, v_t)'$  soit l'innovation du processus (ce que l'on supposera par la suite).

On a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbf{1} - \phi L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(1 - \phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

et on pose donc  $\Phi(L) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbf{1} - \phi L \end{pmatrix}$  et  $\Theta(L) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L) \end{pmatrix}$ .

Alors  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  est l'innovation du processus  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  ssi  $|\Phi(\mathbb{X})| = 1 - \phi\mathbb{X}$  et  $|\Theta(\mathbb{X})| = (1 - \theta_1\mathbb{X})(1 - \theta_2\mathbb{X})(1 - \phi\mathbb{X})$  ont tous deux leurs racines de module strictement<sup>1</sup> supérieur à 1 (soit ssi  $|\theta_1| < 1$ ,  $|\theta_2| < 1$  et  $|\phi| < 1$ ).

⇒ Q2 Montrer que  $Y_t$  est en fait un processus ARMA unidimensionnel.  
Déterminer son ordre et montrer que ses coefficients sont liés de manière non linéaire à ceux introduits dans la définition des processus.

Soit  $Z_t = (1 - \phi L)Y_t$ . On a :

$$Z_t = c(1 - \phi) + \mu X_{t-3} + (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L)V_t$$

puis, comme  $X_{t-3} = (\mathbf{1} - \theta_1 L)U_{t-3}$  il vient

$$Z_t = c(\mathbf{1} - \phi) + \underbrace{\mu(\mathbf{1} - \theta_1 L)U_{t-3}}_{\text{MA}(1)} + \underbrace{(\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L)V_t}_{\text{MA}(2)}$$

En particulier (voir TD 3, exercice 2) comme  $U$  et  $V$  sont indépendants,  $Z$  est un processus MA d'ordre *au plus* 2.

Comme en outre  $\gamma_Z(2) = \theta_2 \phi \sigma_V^2 \neq 0$ ,  $Z$  est un processus MA(2).

Par conséquent,  $Y$  est un processus ARMA(1,2).

---

<sup>1</sup>  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  est l'innovation de  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  ssi leurs racines sont de module supérieur ou égal à 1; mais comme  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  est stationnaire, aucune racine n'est unitaire.

Soit  $\Psi \in \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$  et  $\eta$  bruit blanc tels que  $Z = \Psi(L)\eta$ ;  $\Psi$  et  $\sigma_\eta^2$  sont déterminés (voir TD 2, exercice 2) par les équations de Yule-Walker en  $Z$  qui pour  $h \in \mathbb{Z}$  s'écrivent d'une part d'après la définition de  $Z$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) &= \mu^2 \gamma_{U_{t-3}-\theta_1 U_{t-4}}(h) + \gamma_{V_{t-(\theta_2+\phi)}V_{t-1}+\theta_2 \phi V_{t-2}}(h) \\ &= \dots \end{aligned}$$

et d'autre part d'après la définition de  $\Psi(\mathbb{X}) = \Psi_0 + \Psi_1\mathbb{X} + \Psi_2\mathbb{X}^2$  et  $\eta$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) &= \text{Cov}(\Psi_0\eta_t + \Psi_1\eta_{t-1} + \Psi_2\eta_{t-2}, \Psi_0\eta_{t-h} + \Psi_1\eta_{t-h-1} + \Psi_2\eta_{t-h-2}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

L'égalisation de ces expressions pour  $h \in \{0, 1, 2\}$  conduit à un système polynômial en  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \sigma_\eta^2$  qui s'expriment donc de façon non-linéaire (en général) en les paramètres  $\theta_1, \theta_2$  et  $\phi$ .

⇒ Q3 Déterminer la prévision optimale des valeurs futures de  $Y_t$  connaissant le passé de  $X_t$  et  $Y_t$ .

La prévision linéaire optimale de  $Y$  conditionnellement au seul passé de  $Y$  s'obtient en transformant la forme ARMA(1,2) précédente en une forme AR( $\infty$ ) en  $Y$ . Mais pour obtenir celle conditionnellement aux passés de  $X$  et de  $Y$ , il faut déterminer la prévision linéaire optimale de  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  conditionnellement à son passé, ce qui se fait en transformant la formulation ARMA vectorielle en forme AR( $\infty$ ) vectorielle :<sup>2</sup>

$$\Theta(L)^{-1}\Phi(L)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \Theta(1)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ c(1-\phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{aligned} \Theta(L)^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)(\mathbf{1} - \phi L) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{1} - \theta_1 L)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1}(\mathbf{1} - \phi L)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{1} - \theta L)^{-1} & 0 \\ -\mu L^3(\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1}(\mathbf{1} - \phi L)^{-1} & (\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{(1-\phi)(1-\theta_2)}\right) (c(1-\phi)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

La projection linéaire optimale de  $Y$  connaissant le passé de  $X$  et de  $Y$  s'obtient alors en projetant : on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3 (\mathbf{1} - \theta_2 L)^{-1} (\mathbf{1} - \phi L)^{-1} X_t = \frac{c}{1-\theta_2} + V$$

<sup>2</sup>Attention à l'ordre en général :  $\Theta(L)^{-1}$  et  $\Phi(L)$  sont des matrices et donc en général  $\Theta(L)^{-1} \times \Phi(L) \neq \Phi(L) \times \Theta(L)^{-1}$ . Cependant dans le cas présent  $\Theta(L)$  est diagonale, donc commute avec  $\Phi(L)$ .

et donc

$$\mathbb{E}L \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3 (\mathbb{1} - \theta_2 L)^{-1} (\mathbb{1} - \phi L)^{-1} X_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots \right) = \frac{c}{1 - \theta_2}$$

et donc en appliquant l'opérateur  $\mathbb{E}(\cdot | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots)$  il vient <sup>3</sup>

$$\mathbb{E}(Y_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots) = \frac{c}{1 - \theta_2} + \mu L^3 (\mathbb{1} - \theta_2 L)^{-1} (\mathbb{1} - \phi L)^{-1} X_t - \sum_{k=1}^{+\infty} \theta_2^k Y_{t-k}$$

## Exercice corrigé 2

On considère deux processus du second ordre  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  tels que

$$\begin{cases} X_t = X_{t-1} + U_t \\ Y_t = \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} - X_{t-1} + V_t \end{cases}$$

où  $U$  et  $V$  sont deux bruits blanc indépendants de variances respectives  $\sigma_u^2$  et  $\sigma_v^2$ .

On suppose en outre que  $\forall t < 0; X_t = Y_t = U_t = V_t = 0$

☞ Q1

(a) Vérifier que ni  $(X_t)_{t > 0}$  ni  $(Y_t)_{t > 0}$  n'est stationnaire.

$(\mathbb{1} - L)X = U$  donc  $(X_t)_{t > 0}$  est une marche aléatoire, donc non-stationnaire.

D'autre part,  $\mathbb{V}(X_{t-1} - V_t) = (t-1)\sigma_U^2 + \sigma_V^2$  car  $X_t$  et  $V_t$  sont indépendants. Or si (par l'absurde)  $(Y_t)_{t > 0}$  était stationnaire, alors  $X_{t-1} - V_t = -Y_t + \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2}$  serait stationnaire, donc de variance constante, et il en irait de même pour  $X$  ! Donc  $(Y_t)_{t > 0}$  n'est pas stationnaire.

Autre méthode :

Si  $Y$  était stationnaire alors  $X - V = (-\mathbb{1} + \frac{5}{6}L - \frac{1}{6}L^2)Y$  le serait également, et comme  $V$  est stationnaire et  $X$  et  $V$  sont décorrélés,  $X$  le serait également.

(b) Vérifier que  $(\Delta X_t)_{t \geq 2}$  et  $(\Delta Y_t)_{t \geq 2}$  sont équivalents à des processus stationnaires, et préciser le cas échéant leur forme ARMA .

$\Delta X = U$  est un bruit blanc, donc stationnaire.

Par ailleurs

$$\Delta Y_t = \frac{5}{6}(\Delta Y)_{t-1} - \frac{1}{6}(\Delta Y)_{t-2} - U_{t-1} + V_t - V_{t-1}$$

<sup>3</sup>Cette expression fait a priori intervenir  $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots)$ ; mais comme le polynôme en facteur de  $X$  est divisible par  $L^3$ , seules les valeurs passées de  $X$  interviennent.

Si ce n'était pas le cas, il faudrait déterminer explicitement  $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots)$  en projetant la forme AR( $\infty$ ) sur  $X : (\mathbb{1} - \theta_1 L)^{-1} X = U$ . Notons enfin que cette dernière est indépendante de  $Y$ , ce qui est heureux.

Définissons  $W_t = \underbrace{-U_{t-1}}_{\text{MA}(0)} + \underbrace{V_t - V_{t-1}}_{\text{MA}(1)}$ ; alors (voir TD 3, exercice 2)  $W$  est un processus MA d'ordre au plus 1. Comme en outre  $\gamma_w(1) = -\sigma_v^2 \neq 0$ ,  $W$  est un MA(1) et donc  $\Delta Y$  est un processus ARMA(2,1)

On note  $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  et  $\epsilon = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ .

→ Q2

Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel)  $A$  tel que

$$\forall t > 0, A(L)Z = \epsilon$$

et en donner la représentation canonique du modèle

Posons

$$A(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A(L) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

et en outre

$$|A(\mathbb{X})| = (1 - \mathbb{X}) \left( 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \right) = (1 - \mathbb{X}) \left( 1 - \frac{1}{2}\mathbb{X} \right) \left( 1 - \frac{1}{3}\mathbb{X} \right)$$

dont les racines 1, 2 et 3 sont toutes de module supérieur (ou égal) à un, de sorte que la représentation est canonique.

→ Q3

Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel)  $A^*$  de degré  $d^o A - 1$  tel que  $A(\mathbb{X}) = A(1) + (1 - \mathbb{X})A^*(\mathbb{X})$ .

En déduire qu'il existe une combinaison linéaire de  $X$  et  $Y$  qui est asymptotiquement équivalente à un processus stationnaire.

$A(\mathbb{X}) - A(1)$  est un polynôme (matriciel) en  $\mathbb{X}$  qui s'annule en  $\mathbb{X} = 1$ , donc divisible par  $(1 - \mathbb{X})$  : on a en l'occurrence

$$\begin{aligned} A(\mathbb{X}) - A(1) &= \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} - 1 & \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \mathbb{X}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons donc  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix}$ ;  $A^*$  divise  $A(\mathbb{X}) - A(1)$ .

On a alors

$$\epsilon = A(L)Z = A(1)Z + A^*(L)\Delta Z$$

Or  $\Delta Z$  est (asymptotiquement) stationnaire <sup>4</sup> donc il en va de même pour  $A(1)Z = \epsilon - A^*(L)\Delta Z$ .

Or  $A(1)Z = \begin{pmatrix} 0 \\ X + \frac{1}{3}Y \end{pmatrix}$ , donc en particulier

$$X + \frac{1}{3}Y$$

est (asymptotiquement) stationnaire.

### Exercice corrigé 3

On considère un processus vectoriel  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  de taille  $n$ , dont on suppose qu'il est intégré d'ordre 1, et qu'il admet une représentation VAR de la forme :

$$\Phi(L)Y = \mu + \epsilon$$

où  $\epsilon$  est l'innovation de  $Y$  et  $\Phi(0) = Id$ .

☞ Q1

En utilisant la décomposition  $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$ , montrer qu'on peut écrire le modèle sous la forme équivalente :

(a)

$$(\mathbb{1} - L)Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i(\mathbb{1} - L)Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t$$

Comme  $\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)$  s'annule en 1, il est divisible par  $1 - \mathbb{X}$  et soit donc  $\Phi^+(\mathbb{X}) = \frac{\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)}{1 - \mathbb{X}} \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ ; ainsi  $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$ .

Alors (voir TD 7, exercice 1)

$$\begin{aligned} \Phi(L)Y &= \Phi(1) \times Y + (\mathbb{1} - L) \cdot \Phi^+(L) \circ Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \Phi^+(L) \circ \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \underbrace{\Phi^+(0)}_{\Phi(0) - \Phi(1)} \Delta Y + \underbrace{(\Phi^+(L) - \Phi^+(0))}_{-\Phi^*(L)} \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + (\mathbb{1} - \Phi(1)) \times \Delta Y - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\ &= \Phi(1) \times Y + \Delta Y - (\Phi(1) \times Y - \Phi(1) \times LY) - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\ &= \Delta Y + \Phi(1) \times LY - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \end{aligned}$$

et donc comme par ailleurs  $\Phi(L)Y_t = \mu + \epsilon_t$  il vient en définitive

<sup>4</sup>Ce n'est pas tout-à-fait évident :  $\Delta X$  et  $\Delta Y$  sont stationnaires, mais il faut encore montrer que  $\text{Cov}(\Delta X_t, \Delta Y_{t+h})$  ne dépend pas du temps  $t$  : pour ce faire, on soustrait l'équation en  $Y$  aux dates  $t$  et  $t - 1$ , ce qui fait apparaître  $\Delta Y_t = \frac{5}{6}\Delta Y_{t-1} - \frac{1}{6}\Delta Y_{t-2} - \Delta X_{t-1} + \Delta V_t$ .

$$\Delta Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t$$

en notant  $\Phi^*(\mathbb{X}) = \Phi^+(0) - \Phi^+(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \mathbb{X}^i$ .

(b) Montrer que le rang de  $\Phi(1)$  est inférieur strictement à  $n$ .

On a

$$\Delta Y = \Phi(1)LY - \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i L^i \Delta Y + \mu + \epsilon$$

et donc

$$\Phi(1)LY = -\Delta Y + \underbrace{\sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i L^i \Delta Y}_{\Psi(L)\Delta Y} + \mu + \epsilon$$

Supposons (par l'absurde) que  $\Phi(1)$  soit inversible : alors

$$LY = \Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y + \Phi(1)^{-1}\mu + \Phi(1)^{-1}\epsilon$$

Mais comme  $Y$  est intégré d'ordre 1,  $\Delta Y$  est stationnaire, et donc  $LY$ , donc  $Y$ , serait stationnaire! <sup>5</sup>

Comme on a supposé que  $Y$  était intégré d'ordre 1,  $\Phi(1)$  n'est **pas** inversible, *i.e.* est de rang au plus  $n - 1$ .

(c) On suppose que le rang de  $\Phi(1)$  est égal à  $r$ . Montrer qu'il existe deux matrices  $\alpha$  et  $\beta$  de dimensions  $(n, r)$  et de rang  $r$  telles que  $\Phi(1) = \alpha\beta'$ .

Soit  $\alpha$  une base de l'image de  $\Phi(1)$  (qui est de dimension  $r \leq n - 1$ ), et notons  $\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,r}$  les coefficients de la  $i$ -ième ligne  $L_i$  de  $\Phi(1)$  dans la base  $\alpha$ . On a pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$L_i = \sum_{j=1}^r \beta_{i,j} \alpha_j \quad \text{où} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{j,1} \\ \vdots \\ \alpha_{j,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{R})$$

et donc

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1,r} & \cdots & \beta_{n,r} \end{pmatrix}}_{\beta'}$$

soit

<sup>5</sup>En toute rigueur se pose le problème de la corrélation de  $\Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y$  avec  $\epsilon$ . Mais comme  $Y$  est intégré d'ordre 1 (et pas plus),  $\Delta Y$  vérifie une équation AR(d) de la forme  $A(L)\Delta Y = \gamma + \epsilon$  de sorte que  $LY = B(L)\Delta Y$  pour  $B(\mathbb{X}) = \Phi(1)^{-1}(\Psi(\mathbb{X}) + A(\mathbb{X}) - \gamma)$ .

$$\Phi(1) = \alpha\beta'$$

- (d) Montrer que  $\beta'y_t$  est nécessairement stationnaire (les colonnes de  $\beta$  sont alors appelées vecteurs de cointégration de  $y_t$ ).

On a

$$\Phi(1)Y_{t-1} = \Psi(L)\Delta Y_t + \mu + \epsilon_t$$

Or  $\alpha$  est une base, donc  $\alpha'\alpha$  est de plein rang donc inversible ; en multipliant par  $(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'$  il vient alors

$$(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Phi(1)Y_{t-1} = (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Psi(L)\Delta Y_t + (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\mu + (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\epsilon_t$$

et donc  $(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Phi(1)Y$  est stationnaire.

Comme  $\Phi(1) = \alpha\beta'$  cela revient à dire que

$$\beta'Y \text{ est stationnaire}$$

☞ Q2 On suppose que la représentation de Wold du processus  $Y$  est de la forme

$$(\mathbf{1} - L)Y = m + C(L)\epsilon$$

avec  $C(0) = \mathcal{I}d$ .

En utilisant la décomposition

$$C(L) = C(1) + (\mathbf{1} - L)C^+(L)$$

- (a) montrer, en généralisant la démarche présentée dans TD 4, exercice 1, qu'il existe une marche aléatoire<sup>a</sup> (multivariée)  $T$  et un processus stationnaire  $S$  tels que  $Y = S + T$ .

<sup>a</sup>Avec dérive :  $(\mathbf{1} - L)T = \eta$  où  $\eta$  est un bruit d'espérance a priori **non-nulle**.

Comme  $C(\mathbb{X}) - C(1)$  s'annule en 1, soit  $C^+(\mathbb{X}) = \frac{C(\mathbb{X}) - C(1)}{1 - \mathbb{X}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})[\mathbb{X}]$ ; ainsi  $C(\mathbb{X}) = C(1) + (1 - \mathbb{X})C^+(\mathbb{X})$ . On a alors

$$(\mathbf{1} - L)Y = m + C(1)\epsilon + (\mathbf{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Définissons  $S = C^*(L)\epsilon$ ; ainsi  $S$  est stationnaire.

Soit alors  $T = Y - S$ , montrons que  $T$  est une marche aléatoire (avec dérive) : on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - L)T &= (\mathbf{1} - L)Y - (\mathbf{1} - L)S \\ &= m + C(1)\epsilon \end{aligned}$$

qui est un "bruit blanc" d'espérance  $m$ .



- (b) Montrer qu'on a nécessairement :  $\beta' m = 0$  et  $\beta' C(1) = 0$ .

On a en multipliant la décomposition de  $Y$  par  $\beta'$

$$\beta'(\mathbf{1} - L)Y = \beta' m + \beta' C(1)\epsilon + \beta'(\mathbf{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Or  $\beta' Y$  est stationnaire, donc  $\mathbb{E}(\beta' Y_t) = \mathbb{E}(\beta' Y_{t-1})$  et par suite

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}((\mathbf{1} - L) \circ (\beta' Y)) \\ &= \mathbb{E}(\beta'(\mathbf{1} - L)Y) \\ &= \mathbb{E}(\beta' m + \beta' C(1)\epsilon + \beta'(\mathbf{1} - L)C^*(L)\epsilon) \\ &= \beta' m \end{aligned}$$

Enfin, si (par l'absurde)  $\beta' C(1) \neq 0$ , alors  $Z = \beta' Y - \beta' C^*(L)\epsilon$  qui vérifie  $(\mathbf{1} - L)Z = \beta' C(1)\epsilon$  est une marche aléatoire, donc d'espérance non-bornée dans le temps, et donc il en va de même pour  $\beta' Y$  qui est pourtant stationnaire! Donc  $\beta' C(1) = 0$ .

- (c) Soit  $\beta^\perp$  une base<sup>a</sup> de l'orthogonal de  $\beta$ . Dédire de la question précédente qu'il existe  $m_0 \in \mathbb{R}^{n-r}$  et  $\delta \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$  tels que  $m = \beta^\perp m'_0$  et  $C(1) = \beta^\perp \delta'$ .

<sup>a</sup>C'est-à-dire que les colonnes de  $\beta^\perp$  forment une base de l'orthogonal de l'espace engendré par les colonnes de  $\beta$ .

On a  $\beta' m = 0$ , donc  $m \in \langle \beta \rangle^\perp$ , et donc il existe  $m_0$  tel que  $m = \beta^\perp m'_0$ .  
De même  $\beta' C(1) = 0$ , donc  $C(1) \in \langle \beta \rangle^\perp$  et il existe  $\delta$  tel que  $m = \beta^\perp \delta'$ .

- (d) En déduire que  $T_t$  s'exprime en fait comme combinaison linéaire de  $n - r$  marches aléatoires univariées (ces marches aléatoires sont appelées *tendances communes* aux séries  $(Y_t^i)_t$ ).

On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - L)T &= m + C(1)\epsilon \\ &= \beta^\perp (m'_0 + \delta'\epsilon) \end{aligned}$$

Soit donc  $M$  la marche aléatoire multi-variée (de taille  $n - r$ ) vérifiant  $M_0 = 0$  et

$$(\mathbf{1} - L)M = m'_0 + \delta'\epsilon$$

Alors  $(\mathbf{1} - L)T = \beta^\perp(\mathbf{1} - L)M = (\mathbf{1} - L) \circ (\beta^\perp M)$ , donc les processus  $T$  et  $\beta^\perp M$  sont égaux à une constante (aléatoire) près ; <sup>6</sup> comme  $\dim(\beta^\perp) = n - \dim(\beta) = n - r$  on a

$T$  est un vecteur composé de  $n - r$  marches aléatoires univariées

<sup>6</sup>On n'a pas nécessairement  $T = M$  : notamment il n'y a aucune raison a priori pour que  $T_0 = Y_0 - C^+(L)\epsilon_0$  soit égal à  $\beta^\perp M_0$ , car une valeur de  $M_0$  ad hoc n'existe pas forcément !