Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires
Enoncé des travaux dirigés n°1 à 8

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005

Table des matières

1 Travaux Dirigés n°1

Enoncé de l'exercice 1

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc (supposé dans $\mathcal{L}^2$) de variance $\sigma^2 > 0$.
Discuter dans chacun des cas suivants de la stationnarité de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

☞ Q1 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$?

☞ Q2 Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}$$

est-il (faiblement) stationnaire ?

☞ Q3 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t\epsilon_{t-1}$, si ϵ est un bruit blanc fort ? Faible ?

☞ Q4 Lorsque X est tel que $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$ (on supposera en outre que $\forall t > 0, \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_0$) ?

☞ Q5 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \epsilon_t \cos(ct) + \epsilon_{t-1} \sin(ct)$ pour $c \in \mathbb{R}$ donné ?

☞ Q6 Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter selon λ) ?
Lorsque $\lambda \in]-1, 1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire Y tel que
$(X_t - Y_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^2} (0)$.

☞ Q7 La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?

Enoncé de l'exercice 2

On considère le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}\ X_t = a + bt + s_t + u_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus saisonnier (périodique) de période 4 et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de s.

☞ Q1 Le modèle est-il correctement paramétré ? Proposer le cas échéant une contrainte naturelle (que l'on supposera vérifiée par la suite) portant sur $(s_t)_t$.

On définit l'opérateur

$$M_4 : \left((Z_t)_t \mapsto \left(\frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}}{4} \right)_t \right)$$

et on considère le processus $Y = M_4 X$.

☞ Q2 Donner l'expression de Y_t pour $t \in \mathbb{Z}$, et justifier l'intérêt de la transformation.

☞ Q3 On définit alors $Z = \Delta Y$.
Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-corrélation.

Enoncé de l'exercice 3

On considère le processus défini par $\forall t \in \mathbb{Z}\ X_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in]-1, +1[$.

☞ Q1 Montrer que X est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-covariance.

☞ Q2 Soient $\phi_T, \phi_{T-1}, \ldots, \phi_1$ les coefficients de la régression linéaire $\widehat{X}_{T+1}$ de X_{T+1} sur $(X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1)$.
Ecrire les conditions d'orthogonalité entre $\left(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1}\right)$ et $< X_T, \ldots, X_1 >$.
En déduire que $(\phi_1, \ldots, \phi_T)$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rl} (1+\theta^2)\,\phi_T - \theta\phi_{T-1} & = -\theta \\ -\theta\phi_{k+1} + (1+\theta^2)\,\phi_k - \theta\phi_{k-1} & = 0 \text{ pour } k \in [\![2, T-1]\!] \\ (1+\theta^2)\,\phi_1 - \theta\phi_2 & = -\theta \end{array}\right.$$

☞ Q3 Déterminer (et si possible calculer) la fonction d'auto-corrélation partielle de X.

Enoncé de l'exercice 4

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire du second ordre.
On note pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t^{*+} &= \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\right) \\ X_t^{*-} &= \mathbb{EL}\left(X_{t-m} | 1, X_{t-m+1}, \ldots, X_{t-1}\right) \end{aligned}$$

On note $\rho(m) = \mathbb{C}orr\left(X_t - X_t^{*+}, X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.
On note par ailleurs $r(m)$ le cœfficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m de X, et on cherche à montrer que $\rho(m) = r(m)$.

☞ Q1 On note pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t^{*+} = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}$$

$$X_t^{*-} = b_0 + b_1 X_{t-m+1} + \cdots + b_{m-1} X_{t-1}$$

(a) Montrer que $(a_1, \ldots, a_{m-1}) = (b_{m-1}, \ldots, b_1)$.

(b) Montrer que $\mathbb{V}\left(X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_t^{*-}\right)$.
En déduire que $\mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.

☞ Q2 On note pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_m X_{t-m} + u_t$$

où u_t est orthogonal à $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$; ainsi par définition $r(m) = c_m$.

(a) Montrer que $\left(X_t - X_t^{*+}\right) = c_m \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) + u_t$.

(b) En déduire que $\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) = c_m \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.

☞ Q3 En déduire que $\rho(m) = r(m)$.

2 Travaux Dirigés n°2

Enoncé de l'exercice 1

On considère un processus X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} \;=\; \epsilon_t \tag{1}$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

☞ Q1 Soit $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \frac{7}{2}\mathbb{X} + \frac{3}{2}\mathbb{X}^2$.
Factoriser Φ et décomposer $\Phi(\mathbb{X})^{-1}$ en éléments simples.
Développer chaque élément simple en série entière de $\mathbb{X}$ ou de $\frac{1}{\mathbb{X}}$ selon les cas.

☞ Q2 Montrer qu'il existe $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ telle que $Y = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \epsilon_{t-k}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ existe et vérifie (1).
Vérifier que $\forall k < 0,\ a_k \neq 0$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall k \geq 1,\ \mathbb{C}ov\,(\epsilon_t, Y_{t-k}) \neq 0$.
En déduire que ϵ n'est **pas** l'innovation de X.

☞ Q3 Soit Θ une série entière absolument convergente, et A un processus stationnaire quelconque.
Montrer que le processus $B = \Theta(L)A$ existe bien et est stationnaire.
Vérifier que $\forall \omega \in \mathbb{R}, f_B(\omega) = \left|\Theta\left(e^{+i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega)$, où f_Z désigne la densité spectrale de Z.

☞ Q4 Montrer qu'il existe un polynôme Φ^* de degré 2, dont toutes les racines sont hors du cercle unité, et un bruit blanc η tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Phi^*(L)Y_t = \eta_t$$

En déduire qu'il existe $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ Y_t = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \eta_{t-k}$$

et que η est l'innovation de Y.

☞ Q5 Montrer que la régression linéaire optimale de Y_t sur son passé n'est **pas** $\frac{7}{2}Y_{t-1} - \frac{3}{2}Y_{t-2}$.

Enoncé de l'exercice 2

On considère un processus stationnaire du second ordre X vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = 2X_{t-1} + \epsilon_t$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.
On suppose que l'observation de X est imprécise et qu'on n'observe que $Y = X + \eta$, où η est un bruit blanc décorrélé de ϵ et de variance $\sigma_\eta^2 = \rho\sigma_\epsilon^2$, $\rho > 0$.

☞ Q1 Montrer que $\epsilon + (\mathbb{1} - 2L)\eta$ est un processus MA(1).

☞ Q2 Montrer Y est un processus ARMA(1,1), et donner sa représentation canonique.

☞ Q3 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\right)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z},\, Y_t = e_t + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k Y_{t-k}$$

où e désigne l'innovation de Y.
Justifier l'intérêt d'une telle représentation.

Enoncé de l'exercice 3

Etant donné un processus stationnaire X, si $\rho_X(1)$ est elevée alors X_t est “assez” correlé avec X_{t-1} et X_{t-1} avec X_{t-2} ; par conséquent il semble naturel que X_t soit “relativement” corrélé avec X_{t-2}, c'est-à-dire que $\rho_X(2)$ ne soit “pas trop” faible.
L'objet de cet exercice est de déterminer précisément le domaine de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$. On définit à cet effet

$$R = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 \,/\, y \geq 2x^2 - 1\}$$

☞ Q1 Soit X un processus stationnaire quelconque (du second ordre).
Montrer que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) \in R$.

☞ Q2 On se donne réciproquement $(\rho_1, \rho_2) \in R$ et on cherche X stationnaire tel que $(\rho_X(1), \rho_X(2)) = (\rho_1, \rho_2)$.
On considère pour cela le processus X défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z},\; X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$$

où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

(a) On note $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - \phi_1\mathbb{X} - \phi_2\mathbb{X}^2$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (ϕ_1, ϕ_2) pour que X soit stationnaire.

(b) On note P l'ensemble des (ϕ_1, ϕ_2) tel que les racines de Φ sont hors du disque unité ; déterminer P. Que peut-on dire de ϵ si $(\phi_1, \phi_2) \in P$?

(c) Calculer $(\rho_X(1), \rho_X(2))$, et en déduire l'expression de (ϕ_1, ϕ_2) en fonction de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$.

(d) Conclure.

Enoncé de l'exercice 4

On considère un processus X stationnaire du second ordre, et on note pour $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_k = \mathbb{C}ov\left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix}\right)$$

☞ Q1 Justifier que Γ_k est indépendante de $t \in \mathbb{Z}$ et qu'elle est positive.
Que dire de X si $|\Gamma_k| = 0$?

On se donne désormais $k \in \mathbb{N}$ et on supposera que $|\Gamma_k| > 0$.

☞ Q2 Calculer les cœfficients $a_1, \ldots, a_k$ de la régression de $X_t^* = \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-k}\right)$ sur $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-k} >$.

☞ Q3 Calculer σ_k^2, la variance de l'erreur de prévision $X_t - X_t^*$.

☞ Q4
(a) Montrer que $|\Gamma_{k+1}| = \sigma_k^2 |\Gamma_k|$.
(b) Montrer que $(\sigma_l^2)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
En déduire qu'elle admet une limite finie lorsque $l \to +\infty$, et que cette limite est $\sigma_\infty^2 = \mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots\right)\right)$ la variance de l'innovation du processus X.
(c) Montrer que $\frac{1}{l} \log |\Gamma_l| \xrightarrow[l \to +\infty]{} \log \sigma_\infty^2$.

☞ Q5 Application : on considère un processus du second ordre X vérifiant $X = (1 - \theta L)\epsilon$ pour $\theta \in]-1, 1[$, où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.
(a) Montrer que X est stationnaire et calculer γ_X.
(b) Calculer $|\Gamma_k|$.
(c) Vérifier que ϵ est l'innovation de X et que $\frac{1}{k} \log |\Gamma_k| \xrightarrow[k \to +\infty]{} \log \sigma_\epsilon^2$.

3 Travaux Dirigés n°3

Enoncé de l'exercice 1

On considère deux processus stationnaires du second ordre X et Y vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} Y_t = & \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ X_t = & \phi_2 X_{t-1} + V_t \end{cases}$$

où U et V sont deux bruits blancs décorrélés de variances respectives σ_U^2 et σ_V^2.
On suppose en outre que $0 < |\phi_1| < 1$ et $0 < \phi_2 < 1$.

☞ Q1 Soit $W = (\mathbb{1} - \phi_1 L)(\mathbb{1} - \phi_2 L) \circ Y$.
Montrer que W est stationnaire et calculer γ_W.
En déduire que W est un processus MA que l'on déterminera.[1]
<u>*Application numérique :*</u> $a = 1.5$, $\phi_1 = 0.4$, $\phi_2 = 0.6$, $\sigma_U^2 = 0.016$ et $\sigma_V^2 = 0.036$.

☞ Q2 Montrer que Y est un processus ARMA que l'on déterminera.

☞ Q3 Déterminer la prévision optimale $Y_t^* = \mathbb{EL}(Y_t | Y_{t-1}, \ldots)$ et la variance de l'erreur de prévision $Y_t - Y_t^*$.

Enoncé de l'exercice 2

On considère n processus stationnaires $X^1, \ldots, X^n$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (\mathbb{1} - \rho_i L) X^i = U^i$$

où $\rho_i \in]-1, 1[$ et U^i est un bruit blanc de variance σ_i^2 indépendant[2] de tout U^j pour $j \neq i$.
On définit $Z = X^1 + \cdots X^n$; on cherche à déterminer la prévision optimale de Z_{T+1} fondée sur l'observation des X^i aux dates $T, T-1, \ldots$.

☞ Q1 Montrer que pour tous $t, t' \in \mathbb{Z}$ et $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, ${X^i}_t$ est indépendant de ${X^j}_{t'}$.
Déterminer $Z_{T+1}^{*X} = \mathbb{EL}(Z_{T+1} | {X^1}_T, \ldots, {X^n}_T, {X^1}_{T-1}, \ldots, {X^n}_{T-1}, \ldots)$ et la variance V_X de l'erreur de prévision associée en fonction des variances des U^i.

☞ Q2 Montrer que Z satisfait une relation de la forme

$$\Theta(L) Z = \Delta(L) \xi$$

où Θ et Δ sont des polynômes (de degrés finis) et ξ est un bruit blanc (on discutera selon que les ρ_i sont deux-à-deux distincts ou non).

---

[1] On supposera pour ce faire que $a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 > 2\phi_2 \sigma_U^2$.
[2] Et ce à toutes dates : $\forall t, t', \forall i, j,\ (t \neq t' \text{oui} \neq j) \rightarrow {U^i}_t$ est indépendant de ${U^j}_{t'}$

☞ Q3 En déduire que Z est un processus ARMA dont on déterminera la forme canonique.

☞ Q4 Donner une condition suffisante pour que Z soit un AR pur.
On détaillera en particulier le cas $n = 2$.

☞ Q5 Dans le cas général, déterminer la prévision optimale $Z^{*Z}_{T+1} = \mathbb{EL}\left(Z_{T+1} | Z_T, Z_{T-1}, \ldots\right)$ fondée sur les observations agrégées.
Donner la variance V_Z de l'erreur de prévision associée en fonction des variances des U^i.
Comparer V_Z à V_X et conclure.

Enoncé de l'exercice 3

On considère un processus stationnaire X vérifiant

$$\left(\mathbb{1} - 2\rho\cos\theta L + \rho^2 L^2\right) X = \epsilon$$

où $\rho \in]-1, 1[$, $\theta \in]0, \pi[$ et ϵ est un bruit blanc de variance σ^2_ϵ.

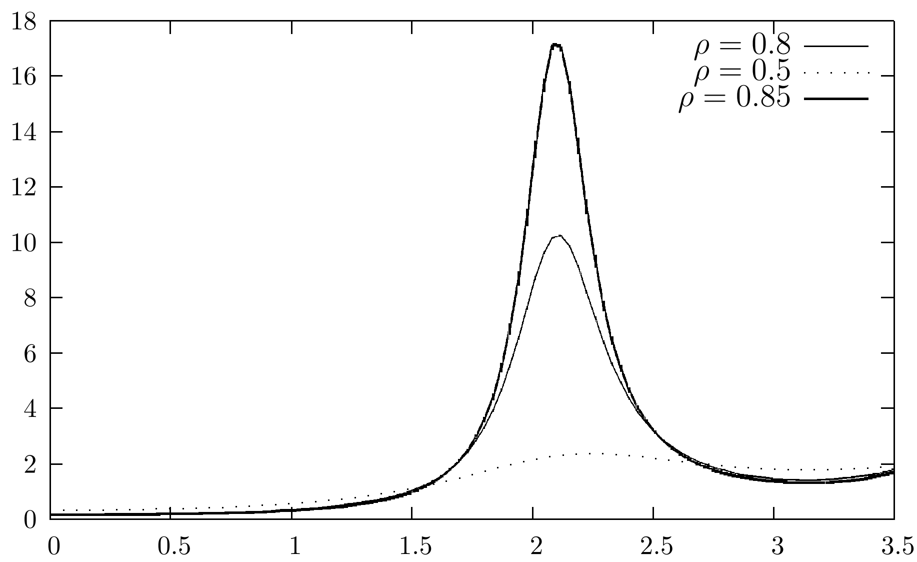
☞ Q1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ la suite *réelle* définie par

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés} \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ u_t - 2\rho\cos\theta u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} = 0 \end{cases}$$

Calculer le terme général de u.
Justifier l'expression "u est quasi-périodique".

☞ Q2 Montrer que ϵ est l'innovation de X, et calculer γ_X.
Application numérique : Tracer γ_X lorsque $\sigma^2_\epsilon = 1$, $\rho = 0.8$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

☞ Q3 Etudier la densité spectrale f_X de X, en particulier lorsque $\rho \to 1^-$.



Graphe de $\omega \mapsto \frac{1}{|1+2\rho e^{i\omega}+\rho^2 e^{2i\omega}|^2}$

4 Travaux Dirigés n°4

Enoncé de l'exercice 1

L'objet de cet exercice est de présenter la méthode de Beveridge-Nelson pour représenter tout processus même intégré comme somme d'une marche aléatoire et d'une composante cyclique (stationnaire).

☞ Q1 On considère un processus auto-régressif intégré X vérifiant

$$(\mathbb{1} - L)A(L)X = \epsilon$$

où A est un polynôme sans racine de module un et ϵ un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

(a) Montrer que quitte à substituer à ϵ un bruit blanc η de variance plus faible, on peut supposer (ce que l'on fera par la suite) que toutes les racines de A sont de module strictement supérieur à un.
En déduire que $A(\mathbb{X})$ admet pour inverse une série absolument convergente $A(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$.

(b) On suppose désormais que la série $\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \frac{1}{A(x)}\right)$ est absolument convergente. [3]
Montrer qu'il existe une série convergente (de rayon au moins 1) $\overline{A}$ telle que

$$A(\mathbb{X})^{-1} = \frac{1}{A(1)} + (1 - \mathbb{X})\overline{A}(\mathbb{X})$$

Calculer son terme général.

(c) Montrer qu'il existe deux processus T et C tels que

$$X = T + C$$

et où T est une marche aléatoire vérifiant $(\mathbb{1} - L)T = \frac{1}{A(1)}\epsilon$ et où C est stationnaire.

(d) T et C sont-ils corrélés ?

☞ Q2 On se donne un autre décomposition de X

$$\begin{cases} X = & M + S \\ (\mathbb{1} - L)M = & U \\ S = & B(L)V \end{cases}$$

où B est un polynôme dont toutes les racines sont de module strictement supérieur à 1 et U et V sont deux bruits blancs (pas nécessairement décorrélés) de variances σ_U^2 et σ_V^2.

(a) Montrer que $\frac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.
Montrer que $\sigma_U^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$.

(b) Soit $Y = (\mathbb{1} - L)X$.
Exprimer Y en fonction de ϵ et en déduire l'expression de f_Y.

---

[3] *i.e.* de rayon de convergence au moins 1 et absolument convergente en $x = 1$.

(c) Exprimer alors Y en fonction de U et V.
En supposant que U et V sont décorrélés, en déduire l'expression de f_Y en fonctionde σ_U^2 et σ_V^2.

(d) Déduire de l'étude de f_Y au voisinage de 0 que pour certains polynômes $A(\mathbb{X})$, U et V ne peuvent **pas** être décorrélés (on pourra par exemple considérer le cas où $A(\mathbb{X}) = 1 - \rho\mathbb{X}$ où $\rho > 0$).

Enoncé de l'exercice 2

En 1978 Robert E. Hall propose et fonde empiriquement dans "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence" un modèle selon lequel la consommation des ménages suit ... une marche aléatoire ! L'objet de cet exercice est de présenter très brièvement ce résultat.

☞ Q1 On considère un agent dont l'utilité $u(\cdot)$ à chaque date t dépend uniquement de sa consommation c_t. Ses sources de revenus sont le travail, qui lui rapporte w_t entre les dates t et $t+1$, et le capital, qui lui rapporte rk_t où r désigne le taux d'intérêt réel du marché (supposé constant) et k_t le stock de capital accumulé à la date t.

(a) Montrer que la contrainte budgétaire de l'agent à chaque date $t \in \mathbb{Z}$ s'écrit

$$k_{t+1} - k_t = (rk_t + w_t) - C_t$$

(b) On suppose que les revenus du travail à la date $t+h$ sont inconnus à la date t, et modélisés par la variable aléatoire W_{t+h} ; on note $\mathcal{I}_t$ l'ensemble d'information de l'agent disponible à la date t.
Montrer que le choix *à la date* t du processus de la consommation future de l'agent est déterminé par le programme de maximisation

$$\left| \begin{array}{l} \max_{C_t, C_{t+1}, \ldots} \mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) \middle| \mathcal{I}_t\right) \\ \text{s.c. } \left\{ \ \forall h \geq 0,\ k_{t+h+1} = \left((1+r)\,k_{t+h} + w_{t+h}\right) - C_{t+h} \right. \end{array} \right.$$

(c) Ecrire le lagrangien associé et en déduire les équations d'Euler

$$\forall h \geq 1,\ \frac{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}}}{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h-1}}} = \frac{1}{1+r}$$

(d) On suppose que l'agent a une préférence pour le présent de $\delta \geq 0$.
Donner l'utilité intertemporelle $U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right)$ tirée du processus de consommation $(C_t, C_{t+1}, \ldots)$.

(e) En supposant que l'utilité $u(\cdot)$ de l'agent est quadratique et que $\delta = r$ montrer que le profil de consommation future **anticipé à la date** t est constant : $\forall h \geq 0,\ C_{t+h}^{*t} = C_t^{*t}$

(f) Montrer que pour tout $H \geq 0$

$$\sum_{h=0}^{H} \frac{C^{*t}_{t+h}}{(1+r)^h} = (1+r)k_t + \sum_{h=0}^{H} \frac{W_{t+h}}{(1+r)^h} - \frac{1}{(1+r)^H} k_{t+H+1}$$

(g) En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de cavalerie ($i.e.$ $\lim_{h\infty} \frac{k_{t+h+1}}{(1+r)^h} = 0$) montrer finalement que

$$C^{*t+1}_{t+1} - C^{*t}_{t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t}\right)\right)$$

☞ Q2 On suppose tout d'abord que les salaires futurs suivent un processus ARMA de la forme

$$\Delta(L)W = \Theta(L)\epsilon$$

où Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc. On suppose en outre qu'à toute date t, $\mathcal{I}_t$ contient $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots$

(a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A telle que $W = A(L)\epsilon$ et que ϵ est l'innovation de W.

(b) Calculer $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)$ et $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right)$ pour $h \geq 0$.

(c) En déduire que C est une marche aléatoire.

☞ Q3 On suppose cette fois que les salaires futurs suivent un ARMA autour d'une tendance déterministe, de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

où ϕ est $\mathcal{C}^\infty$, Δ et Θ sont sous forme canonique et ϵ est un bruit blanc.

(a) Montrer qu'il existe une série absolument convergente A et une fonction ψ telles que $W = \psi(t) + A(L)\epsilon$, et calculer $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)$ et $\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right)$ pour $h \geq 0$.

(b) Montrer que C est une marche aléatoire.

☞ Q4 On suppose enfin que les salaires suivent un processus ARIMA autour d'une tendance déterministe,[4] de la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ (\mathbb{1} - L)^d \Delta(L)W_t = \phi(t) + \Theta(L)\epsilon_t$$

avec les mêmes hypothèses sur Δ, Θ, ϕ et ϵ, et avec $d \geq 1$.

(a) Montrer que si deux suites réelles u et v vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathbb{1} - L)^d u_n = v_n$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}^l_{n+l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 \ + \mathcal{C}^{d-1}_n \sum_{i=1}^{n} v_i$$

(b) En déduire que C est une marche aléatoire ; à quel bruit blanc est-elle associée ?

---

[4] La théorie macro-économique suggère en effet que le PIB est en effet intégré d'ordre 1, et que la croissance des salaires suit celle du PIB.

5 Travaux Dirigés n°5

Enoncé de l'exercice 1

L'objectif est ici de mettre en pratique les méthodes habituelles de traitement des séries temporelles. Il s'agit en particulier de mettre en œuvre l'*identification*, l'*estimation* et la *sélection* d'un modèle pour une série brute donnée.

Remarque : Les programmes SAS réalisés pour traiter cet exercice sont à envoyer à l'issue de la séance (dûment indentés et commentés) à `Guillaume.Lacote@ensae.fr`.

☞ Q1 (a) Fermer les applications qui ne sont pas strictement indispensables à l'étude des séries temporelles linéaires (ce qui exclut RISK, ICQ et MICROSOFT OUTLOOK ...).
Télécharger depuis `http://ensae.no-ip.com/SE206/` le fichier de données `Donnees1` au format SAS . [5]
Lancer le logiciel SAS , commencer un nouveau programme et importer ces données.

(b) Représenter graphiquement la série `XM` .
Commenter.
Mettre en évidence la saisonnalité éventuelle de `XM` , et définir le cas échéant `DeSaison` la série désaisonnalisée.

(c) Etudier les auto-corrélogrammes partiel et inverse de la série `DeSaison` .
Est-elle intégrée ? Définir le cas échéant `DesInt` , la série différenciée de `DeSaison` , et réitérer le processus tant que nécessaire.

(d) Etudier les auto-corrélogrammes partiel et inverse de la série `DesInt` .
Proposer des ordres maximum p^*,d^* et q^* vraisemblables pour la série `DeSaison` .

(e) Estimer le modèle le plus général ARIMA(p^*, d^*, q^*) suivi par `DeSaison` .
Vérifier que ce modèle est valide.

(f) Rechercher s'il existe des sous-modèles valides du modèle ARIMA(p^*, d^*, q^*) pour la série `DeSaison` .
Quel modèle proposez-vous finalement de retenir pour la série `XM` ?

☞ Q2 En suivant une démarche analogue, proposer un modèle valide pour la série contenue dans le fichier `Donnees2.sd2`.

☞ Q3 *(facultative)* Etudier les séries contenues dans les fichiers `Base92.sd2`, `Champ.sd2`, `Lait.sd2`, `Pari2.sd2`, `SNCF.sd2`, `TauxLongs.sd2`, `Traffic.sd2` et `Viande.sd2`.

---

[5] Le fichier `Donnees1.sd2` est au format SAS version `6` , le fichier `Donnees1.sas7bdat` au format SAS version `8` et le fichier `Donnees1.txt` au format texte prêt à être importé.

6 Travaux Dirigés n°6

Enoncé de l'exercice 1

On considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant le modèle ARIMA canonique

$$(\mathbb{1} - L)^d \Theta(L) X = \Delta(L)\epsilon$$

de conditions initiales Z données[6] et orthogonales à $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$, bruit blanc de variance σ_ϵ^2. On s'intéresse à la prévision linéaire optimale d'horizon $h \geq 0$

$$_tX_{t+h} = \mathbb{EL}\left(X_{t+h} | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_0, Z\right)$$

☞ Q1 Montrer que $({}_tX_{t+h})_{h>q}$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1 - X)^d\Theta$.

Application numérique :

En déduire $({}_tX_{t+h})_{h\in\mathbb{N}}$ pour $h \geq 1$ en fonction de X_t et ${}_tX_{t+1}$ lorsque $d = 1$, $\Theta(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$ et $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$.

☞ Q2 Soit $e_h = X_{t+h} - {}_tX_{t+h}$ l'erreur de prévision d'horizon $h \geq 0$.

(a) Montrer que $e_h \in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h} \rangle$ pour $h \geq 0$.

(b) Montrer qu'il existe une suite $(a_h)_h$ telle que

$$\forall h \geq 0,\ e_h = a_0\epsilon_{t+h} + \cdots + a_{h-1}\epsilon_{t+1}$$

et que $(a_h)_{h\geq q}$ suit la récurrence de polynôme $(1 - \mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :

Calculer $(a_h)_h$ dans l'exemple précédent.

(c) Calculer $(\mathbb{V}(e_h))_{h\in\mathbb{N}}$ et en donner un équivalent pour $h \to +\infty$ lorsque $d \geq 1$.

Application numérique :

Calculer $(\mathbb{V}(e_h))_{h\in\mathbb{N}}$ dans l'exemple précédent.

☞ Q3 En supposant que ϵ est un bruit blanc gaussien, déterminer un intervalle de prévision de X_t d'horizon $h \geq 1$ fiable à 95%.

Application numérique :

Donner l'intervalle d'horizon 2 à 95% lorsque $x_t = 12$, ${}_tx_{t+1} = 10$ et $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

---

[6] Z est donc un vecteur comprenant $d + d°\Theta$ valeurs initiales de X et $d°\Delta$ valeurs initiales de ϵ.

Enoncé de l'exercice 2

■ Partie 1

On considère un processus X stationnaire vérifiant le modèle Arma(1,1) canonique

$$(\mathbb{1} - \phi L)X = (\mathbb{1} - \theta L)\epsilon$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2.
On s'intéresse pour $t \in \mathbb{Z}$ à la prévision linéaire optimale d'horizon 1

$$_tX_{t+1} = \mathbb{EL}\left(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \ldots\right)$$

☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ telle que $_tX_{t+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t+1-k}$ et donner son terme général.

☞ Q2 L'observation de $(X_t)_{t<0}$ étant impossible, on définit pour $t \in \mathbb{N}$ la prévision linéaire empirique $_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$.
Exprimer $_t\hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t et $_{t-1}\hat{X}_t$.

☞ Q3 On définit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ l'erreur relative de la prévision tronquée.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t.

☞ Q4 Calculer $\gamma_X(0)$ puis e_0.
En déduire l'expression de $(e_t)_t$.

☞ Q5 Que dire de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ lorsque $t \to +\infty$?

■ Partie 2

On considère désormais à un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant le modèle Arima(1,1,1) canonique

$$(\mathbb{1} - L)(\mathbb{1} - \phi L)X = (\mathbb{1} - \theta L)\epsilon$$

de condition initiale $Z = (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1})$ orthogonale à $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ bruit blanc de variance σ_ϵ^2.

☞ Q1 Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ et une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{N},\ X_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$$

Montrer qu'en outre $Z \times f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$.

☞ Q2 On définit de nouveau la prévision linéaire empirique $_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+\mathbf{1}-k}$.
Exprimer $_t\hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t, X_{t-1} et $_{t-1}\hat{X}_t$.

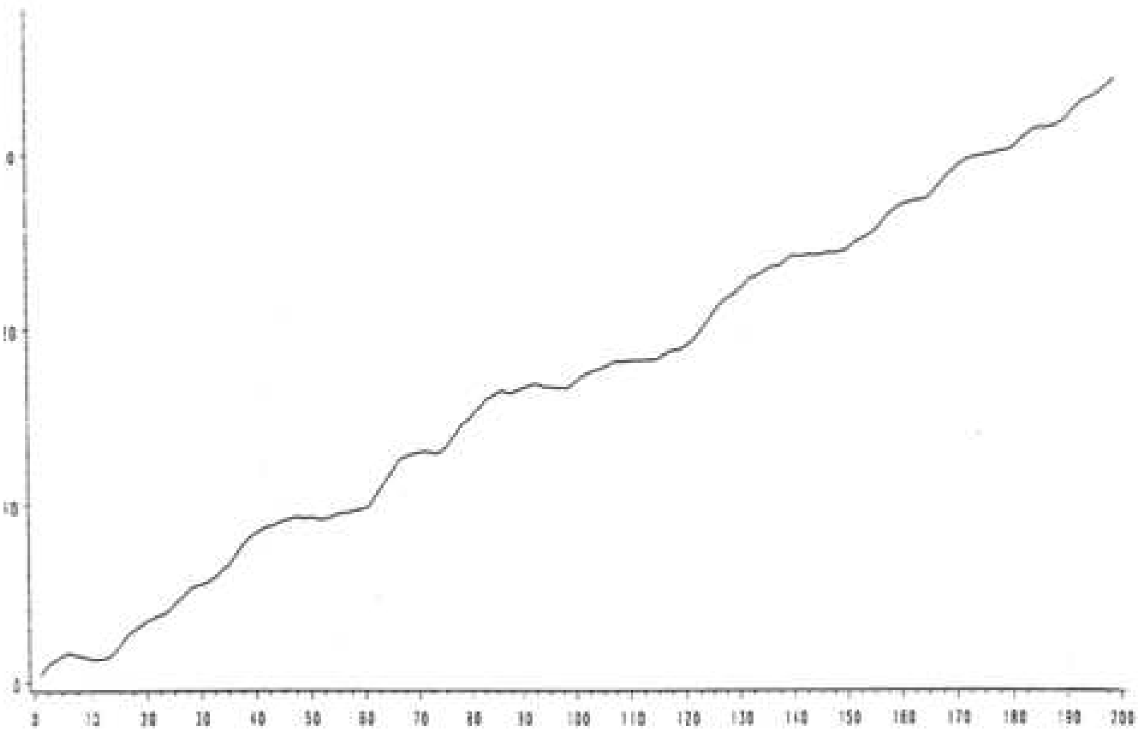
☞ Q3 Soit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ l'erreur de prévision relative.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t, et en déduire l'expression de e_t.

☞ Q4 Que dire cette fois de l'erreur de la prévision tronquée $\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right)$ lorsque $t \to +\infty$?

7 Travaux Dirigés n°7

Enoncé de l'exercice 1

On considère une série réelle observée $(y_t)_{t\in[\![0,200]\!]}$ pour laquelle on cherche une représentation stationnaire, et dont la représentation est la suivante :



☞ Q1 Justifier le modèle où y est la réalisation d'un processus Y non-stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$$

où ϵ est un bruit blanc de variance σ_ϵ^2 à déterminer.

☞ Q2 Montrer qu'il existe un polynôme Φ^* tel que Y vérifie

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \Phi^*(L)\Delta Y_t + \epsilon_t$$

où $\Delta = \mathbb{1} - L$.

☞ Q3 On réalise alors la régression de ΔY_t sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-8}\rangle$; l'estimation des paramètres est la suivante (où `LX` désigne la série $(Y_{t-1})_{t\in\mathbb{Z}}$ et `LY` i désigne la série $(\Delta Y_{t-i})_{t\in\mathbb{Z}}$) :

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	10	2.16857	0.21686	20.901	0.0001
Error	179	1.85724	0.01038		
C Total	189	4.02581			

Root MSE	0.10186	R-square	0.5387
Dep Mean	0.17388	Adj R-sq	0.5129
C.V.	58.58278		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	0.063825	0.02139593	2.983	0.0033
T	1	0.006102	0.00204649	2.982	0.0033
LX	1	-0.036870	0.01233214	-2.990	0.0032
LY1	1	0.727153	0.07300056	9.961	0.0001
LY2	1	-0.050103	0.09109175	-0.550	0.5830
LY3	1	0.149478	0.09065962	1.649	0.1009
LY4	1	-0.101392	0.09078450	-1.117	0.2656
LY5	1	-0.000012056	0.09050397	-0.000	0.9999
LY6	1	-0.043771	0.08985815	-0.487	0.6268
LY7	1	-0.000901	0.08964794	-0.010	0.9920
LY8	1	0.077040	0.07315238	1.053	0.2937

La modélisation proposée est-elle raisonnable ?

☞ Q4 Justifier le modèle où y est la réalisation d'un processus Y stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

On s'appuiera pour ce faire sur

(a) Le test de $\phi_{\Delta Y_{t-4}} = \cdots = \phi_{\Delta Y_{t-8}} = 0$ dans le modèle à 8 retards :

The SAS System

Dependent Variable: Y

Test:	Numerator:	0.0081	DF: 5	F value:	0.7841
	Denominator:	0.010376	DF: 179	Prob>F:	0.5624

(b) La régression de ΔY_t sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-3} \rangle$:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	6	2.24814	0.37802	36.277	0.0001
[illegible]	187	[illegible]	[illegible]		
[illegible]	193	[illegible]			

Root MSE	[illegible]	R-square	[illegible]
Dep Mean	0.16994	Adj R-sq	[illegible]
C.V.	60.06933		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	0.062633	0.01847919	3.389	0.0009
T	1	0.005271	0.00187704	2.808	0.0055
LX	1	-0.031451	0.01128994	-2.786	0.0059
LY1	1	0.740109	0.07085748	10.445	0.0001
LY2	1	-0.060810	0.08868608	-0.686	0.4938
LY3	1	0.144091	0.08863452	1.626	0.1057

(c) Le test de $\phi_{\Delta Y_{t-2}} = \cdots = \phi_{\Delta Y_{t-8}} = 0$ dans le modèle à 8 retards :

The SAS System

Dependent Variable: Y

Test:	Numerator:	0.0068	DF: 7	F value:	0.6597
	Denominator:	0.010376	DF: 179	Prob>F:	0.7059

(d) La régression de ΔY_t sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1} \rangle$:

```
Analysis of Variance

                          Sum of         Mean
Source          DF       Squares       Square      F Value       Prob>F

Model            3       2.22742      0.74247       71.388       0.0001
Error          193       2.00731      0.01040
C Total        196       4.23473

     Root MSE        0.10198     R-square        0.5260
     Dep Mean        0.17070     Adj R-sq        0.5186
     C.V.           59.74365

Parameter Estimates

                     Parameter       Standard     T for H0:
Variable   DF         Estimate          Error   Parameter=0     Prob > |T|

INTERCEP    1         0.057473     0.01745812         3.292         0.0012
T           1         0.005824     0.00171041         3.405         0.0008
LX          1        -0.034680     0.01028056        -3.373         0.0009
LY1         1         0.719836     0.04962822        14.505         0.0001
```

(e) Les auto-corrélations directes du modèle final

```
Autocorrelations

Lag Covariance Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std
  0   0.010189    1.00000  |                    |********************|    0
  1 0.00014062    0.01380  |                  . |   .                |    0.071247
  2 -0.0004064   -0.03989  |                  . *|  .                |    0.071261
  3  0.0011716    0.11498  |                  . |**.                 |    0.071374
  4 -0.0002071   -0.02032  |                  . |   .                |    0.072308
  5 -0.0001937   -0.01901  |                  . |   .                |    0.072337
  6 -0.0004465   -0.04382  |                  . *|  .                |    0.072362
  7 -0.0005004   -0.04911  |                  . *|  .                |    0.072497
  8 0.00047225    0.04635  |                  . |*  .                |    0.072666
  9 0.00030036    0.02948  |                  . |*  .                |    0.072816
 10 -0.0000979   -0.00961  |                  . |   .                |    0.072876
 11 0.00085498    0.08391  |                  . |**.                 |    0.07288[illegible]
 12 0.00006212    0.00610  |                  . |   .                |    0.07337[illegible]
 13 -0.0007829   -0.07684  |                  .**|  .                |    0.073374
 14 0.00032983    0.03237  |                  . |*  .                |    0.073781
 15 0.00058924    0.05783  |                  . |*  .                |    0.073853
 16 -0.0000947   -0.00929  |                  . |   .                |    0.074083
 17 0.00019926    0.01956  |                  . |   .                |    0.074089
 18 -0.0013391   -0.13142  |                  ***|  .                |    0.074115
 19 0.00028753    0.02822  |                  . |*  .                |    0.075288
 20 0.00009309    0.00914  |                  . |   .                |    0.075342
 21 -0.0006792   -0.06666  |                  . *|  .                |    0.075348
 22 0.00099193    0.09735  |                  . |**.                 |    0.075646
 23 -0.0006691   -0.06566  |                  . *|  .                |    0.076200
 24 0.00027934    0.02741  |                  . |*  .                |    0.076566
                           "." marks two standard errors
```

(f) Les auto-corrélations inverses du modèle final

```
Inverse Autocorrelations

Lag Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
  1    -0.05452  |                  . *|  .                |
  2     0.03347  |                  .  |* .                |
[illegible]  [illegible].13303  |   ***|
[illegible]  [illegible].02593  |     *|
[illegible]  [illegible].05696  |      |*
[illegible]  [illegible].05585  |      |*
  7     0.05189  |                  .  |* .                |
  8    -0.03736  |                  . *|  .                |
  9    -0.06734  |                  . *|  .                |
 10    -0.02248  |                  .  |  .                |
 11    -0.04162  |                  . *|  .                |
 12     0.02220  |                  .  |  .                |
 13     0.07866  |                  .  |**.                |
 14    -0.00582  |                  .  |  .                |
 15    -0.09994  |                  .**|  .                |
 16     0.00537  |                  .  |  .                |
 17    -0.02800  |                  . *|  .                |
 18     0.12947  |                  .  |***                |
 19    -0.00012  |                  .  |  .                |
 20    -0.01547  |                  .  |  .                |
 21     0.03619  |                  .  |* .                |
 22    -0.09868  |                  .**|  .                |
 23     0.08316  |                  .  |**.                |
 24    -0.04172  |                  . *|  .                |
```

(g) Les auto-corrélations partielles du modèle final

```
Partial Autocorrelations

Lag Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
  1    0.01380  |                    .  |  .                  |
  2   -0.04008  |                    . *|  .                  |
  3    0.11632  |                    .  |**.                  |
  4   -0.02618  |                    . *|  .                  |
  5   -0.00875  |                    .  |  .                  |
  6   -0.05951  |                    . *|  .                  |
  7   -0.04355  |                    . *|  .                  |
  8    0.04756  |                    .  |* .                  |
  9    0.03607  |                    .  |* .                  |
 10    0.00167  |                    .  |  .                  |
 11    0.07362  |                    .  |* .                  |
 12   -0.00746  |                    .  |  .                  |
 13   -0.07370  |                    . *|  .                  |
 14    0.02050  |                    .  |  .                  |
 15    0.06359  |                    .  |* .                  |
 16    0.01179  |                    .  |  .                  |
 17    0.02093  |                    .  |  .                  |
 18   -0.14741  |                    ***|  .                  |
 19    0.02405  |                    .  |  .                  |
 20   -0.01415  |                    .  |  .                  |
 21   -0.01533  |                    .  |  .                  |
 22    0.09851  |                    .  |**.                  |
 23   -0.08730  |                    .**|  .                  |
 24    0.04548  |                    .  |* .                  |
```

(h) <u>Le test de Porte-Manteau du bruit blanc du modèle final :</u>

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi Square	DF	Prob	Autocorrelations					
6	3.58	6	0.733	0.014	-0.040	0.115	-0.020	-0.019	-0.044
12	6.22	12	0.905	-0.049	0.046	0.029	-0.010	0.084	0.006
18	12.30	18	0.831	-0.077	0.032	0.058	-0.009	0.020	-0.131
24	16.75	24	0.859	0.028	0.009	-0.067	0.097	-0.066	0.027

☞ Q5 Montrer que le modèle retenu s'écrit

$$(\mathbb{1} - \rho L) Y_t = \mu + \beta t + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

et exprimer ρ en fonction de ϕ.

☞ Q6 Tester l'hypothèse "$\mathcal{H}_0^1 : \beta = 0$ et $\rho = 1$" en utilisant les tables suivantes :

(a)

```
Dependent Variable: Y
Test:               Numerator:      0.0607   DF:    2   F value:   5.8394
                    Denominator:  0.010401   DF:  193   Prob>F:    0.0034
```

(b)

TABLE I

EMPIRICAL DISTRIBUTION OF τ_μ FOR $(\alpha, \rho) = (0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + e_t$.

(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value: 0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.20	2.61	2.97	3.41
50	2.18	2.56	2.89	3.28
100	2.17	2.54	2.86	3.22
250	2.16	2.53	2.84	3.19
500	2.16	2.52	2.83	3.18
∞	2.16	2.52	2.83	3.18
s.e.	0.003	0.004	0.006	0.008

TABLE II

EMPIRICAL DISTRIBUTION OF τ_{τ} FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$.

(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value: 0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.77	3.20	3.59	4.05
50	2.75	3.14	3.47	3.87
100	2.73	3.11	3.42	3.78
250	2.73	3.09	3.39	3.74
500	2.72	3.08	3.38	3.72
∞	2.72	3.08	3.38	3.71
s.e.	0.004	0.005	0.007	0.008

(c)

TABLE III

EMPIRICAL DISTRIBUTION OF $\tau_{\beta\tau}$ FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$

(Symmetric Distribution)

Sample size n	Probability of a smaller value: 0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.39	2.85	3.25	3.74
50	2.38	2.81	3.18	3.60
100	2.38	2.79	3.14	3.53
250	2.38	2.79	3.12	3.49
500	2.38	2.78	3.11	3.48
∞	2.38	2.78	3.11	3.46
s.e.	0.004	0.005	0.006	0.009

TABLE V

EMPIRICAL DISTRIBUTION OF Φ_3 FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$

Sample size n	Probability of a smaller value: 0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.61	0.75	0.89	1.10	4.67	5.68	6.75	8.21
50	0.62	0.77	0.91	1.12	4.31	5.13	5.94	7.02
100	0.63	0.77	0.92	1.12	4.16	4.88	5.59	6.50
250	0.63	0.77	0.92	1.13	4.07	4.75	5.40	6.22
500	0.63	0.77	0.92	1.13	4.05	4.71	5.35	6.15
∞	0.63	0.77	0.92	1.13	4.03	4.68	5.31	6.09
s.e.	0.003	0.003	0.003	0.003	0.01	0.02	0.03	0.05

(d)

TABLE IV

EMPIRICAL DISTRIBUTION OF Φ_1 FOR $(\alpha, \rho) = (0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + e_t$

Sample size n	Probability of a smaller value: 0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.29	0.38	0.49	0.65	4.12	5.18	6.30	7.88
50	0.29	0.39	0.50	0.66	3.94	4.86	5.80	7.06
100	0.29	0.39	0.50	0.67	3.86	4.71	5.57	6.70
250	0.30	0.39	0.51	0.67	3.81	4.63	5.45	6.52
500	0.30	0.39	0.51	0.67	3.79	4.61	5.41	6.47
∞	0.30	0.40	0.51	0.67	3.78	4.59	5.38	6.43
s.e.	0.002	0.002	0.002	0.002	0.01	0.02	0.03	0.05

TABLE VI

EMPIRICAL DISTRIBUTION OF Φ_3 FOR $(\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1)$ IN $Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$

Sample size n	Probability of a smaller value: 0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
25	0.74	0.90	1.08	1.33	5.91	7.24	8.65	10.61
50	0.76	0.93	1.11	1.37	5.61	6.73	7.81	9.31
100	0.76	0.94	1.12	1.38	5.47	6.49	7.44	8.73
250	0.76	0.94	1.13	1.39	5.39	6.34	7.25	8.43
500	0.76	0.94	1.13	1.39	5.36	6.30	7.20	8.34
∞	0.77	0.94	1.13	1.39	5.34	6.25	7.16	8.27
s.e.	0.004	0.004	0.003	0.004	0.015	0.020	0.032	0.058

(e)

TABLE B.5
Critical Values for the Phillips-Perron Z_ρ Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated *OLS* Autoregressive Coefficient

Sample size T	Probability that $T(\hat\rho - 1)$ is less than entry: 0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
				Case 1				
25	−11.9	−9.3	−7.3	−5.3	1.01	1.40	1.79	2.28
50	−12.9	−9.9	−7.7	−5.5	0.97	1.35	1.70	2.16
100	−13.3	−10.2	−7.9	−5.6	0.95	1.31	1.65	2.09
250	−13.6	−10.3	−8.0	−5.7	0.93	1.28	1.62	2.04
500	−13.7	−10.4	−8.0	−5.7	0.93	1.28	1.61	2.04
∞	−13.8	−10.5	−8.1	−5.7	0.93	1.28	1.60	2.03
				Case 2				
25	−17.2	−14.6	−12.5	−10.2	−0.76	0.01	0.65	1.40
50	−18.9	−15.7	−13.3	−10.7	−0.81	−0.07	0.53	1.22
100	−19.8	−16.3	−13.7	−11.0	−0.83	−0.10	0.47	1.14
250	−20.3	−16.6	−14.0	−11.2	−0.84	−0.12	0.43	1.09
500	−20.5	−16.8	−14.0	−11.2	−0.84	−0.13	0.42	1.06
∞	−20.7	−16.9	−14.1	−11.3	−0.85	−0.13	0.41	1.04
				Case 4				
25	−22.5	−19.9	−17.9	−15.6	−3.66	−2.51	−1.53	−0.43
50	−25.7	−22.4	−19.8	−16.8	−3.71	−2.60	−1.66	−0.65
100	−27.4	−23.6	−20.7	−17.5	−3.74	−2.62	−1.73	−0.75
250	−28.4	−24.4	−21.3	−18.0	−3.75	−2.64	−1.78	−0.82
500	−28.9	−24.8	−21.5	−18.1	−3.76	−2.65	−1.78	−0.84
∞	−29.5	−25.1	−21.8	−18.3	−3.77	−2.66	−1.79	−0.87

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 371.

TABLE B.6
Critical Values for the Phillips-Perron Z_t Test and for the Dickey-Fuller Test Based on Estimated *OLS* t Statistic

Sample size T	Probability that $(\hat\rho - 1)/\hat\sigma_{\hat\rho}$ is less than entry: 0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
				Case 1				
25	−2.66	−2.26	−1.95	−1.60	0.92	1.33	1.70	2.16
50	−2.62	−2.25	−1.95	−1.61	0.91	1.31	1.66	2.08
100	−2.60	−2.24	−1.95	−1.61	0.90	1.29	1.64	2.03
250	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62	0.89	1.29	1.63	2.01
500	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
∞	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
				Case 2				
25	−3.75	−3.33	−3.00	−2.63	−0.37	0.00	0.34	0.72
50	−3.58	−3.22	−2.93	−2.60	−0.40	−0.03	0.29	0.66
100	−3.51	−3.17	−2.89	−2.58	−0.42	−0.05	0.26	0.63
250	−3.46	−3.14	−2.88	−2.57	−0.42	−0.06	0.24	0.62
500	−3.44	−3.13	−2.87	−2.57	−0.43	−0.07	0.24	0.61
∞	−3.43	−3.12	−2.86	−2.57	−0.44	−0.07	0.23	0.60
				Case 4				
25	−4.38	−3.95	−3.60	−3.24	−1.14	−0.80	−0.50	−0.15
50	−4.15	−3.80	−3.50	−3.18	−1.19	−0.87	−0.58	−0.24
100	−4.04	−3.73	−3.45	−3.15	−1.22	−0.90	−0.62	−0.28
250	−3.99	−3.69	−3.43	−3.13	−1.23	−0.92	−0.64	−0.31
500	−3.98	−3.68	−3.42	−3.13	−1.24	−0.93	−0.65	−0.32
∞	−3.96	−3.66	−3.41	−3.12	−1.25	−0.94	−0.66	−0.33

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 373.

☞ Q7 Tester finalement l'hypothèse "$\mathcal{H}_0^2 : \mu = 0, \beta = 0$ et $\rho = 1$" et conclure.

Enoncé de l'exercice 2

On considère un processus stationnaire multivarié $X \in \left((\mathbb{R}^n)^\Omega\right)^\mathbb{Z}$, $n \geq 2$, qui suit le modèle auto-régressif

$$\Phi(L)X = \epsilon$$

où ϵ est un bruit blanc de variance-covariance Σ suposée définie positive. On suppose en outre que le modèle est sous forme canonique, c'est-à-dire que les racines de $Det\Phi$ sont toutes de module stictement supérieur à un.

On se donne $m \in [\![1, n-1]\!]$ et on note $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \hline X^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix}$; on cherche à donner un sens à l'expression "y est la cause x". [7]

Dans la suite pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée $A = \left(\begin{array}{c|c} A^{1,1} & A^{1,2} \\ \hline A^{2,1} & A^{2,2} \end{array}\right) \begin{matrix} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{matrix}$.

■ Partie 1 **Définition de la notion de causalité**

☞ Q1 *A un instant donné*, l'intuition suggère que si $X_\mathbf{t}^2$ cause $X_\mathbf{t}^1$ alors X_t^2 intervient significativement dans la valeur de X_t^1 ; en particulier la prévision optimale de X_t^1 n'est dans ce cas pas la même selon que l'on connaît X_t^2 ou pas. On dit donc que X_t^2 ne cause pas instantanément X_t^1 au sans de Granger, et on note $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$, *ssi* $\mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}, \ldots\right)$

(a) Montrer que $\mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_t^2, X_{t-1}, \ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}, \ldots\right) + \mathbb{EL}\left(\epsilon_t^1 | \epsilon_t^2\right)$

(b) Montrer que

$$X_t^2 \not\rightsquigarrow X_t^1 \Leftrightarrow \Sigma^{1,2} = (0) \Leftrightarrow X_t^1 \not\rightsquigarrow X_t^2$$

(on dit dans ce cas par symétrie que X^2 et X^1 ne se causent pas instantanément au sens de Granger).

☞ Q2 Par extension on dit alors que X^2 ne cause pas globalement X^1, ou simplement que X^2 ne cause pas X^1 au sens de Granger (ce que l'on note $X^2 \not\twoheadrightarrow X^1$) *ssi*

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}, \ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}^1, \ldots\right)$$

On cherche à montrer que

$$X^2 \not\twoheadrightarrow X^1 \Leftrightarrow \Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$$

(où $\Phi(\mathbb{X})^{1,2}$ désigne le bloc supérieur droit du polynôme matriciel $\Phi(\mathbb{X})$).

[7] La démarche proposée est tirée (de façon très simplifiée) des travaux de Clive W.J. Granger, co-lauréat avec Robert F. Engle du prix Nobel d'économie 2003. C. Granger fut lauréat non pas pour la notion de causalité qu'il définit (utilisée pour établir la thèse polémique du réchauffement de la planète), mais pour ses résultats de cointégration. Voir `http://www.nobel.se/economics/laureates/2003/ecoadv.pdf`

(a) Montrer tout d'abord que $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0) \rightarrow X^2 \not\rightsquigarrow X^1$.

(b) Ecrire dans le cas général la décomposition de Wold de X^1 sur $\langle \epsilon^1, \epsilon^2 \rangle$.

(c) On suppose que $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$; montrer qu'ϵ^1 est alors l'innovation de X^1.

(d) En déduire que si $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$, alors $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$.

■ Partie 2 **Test de la notion de causalité**

On se place dans le cas où $m = n - m = 1$, et on note $p = d°\Phi$.
On suppose de plus que $\Phi(0) = \mathcal{I}d$.

☞ Q1 Montrer que X vérifie aussi le modèle

$$\Psi(L)X = \eta$$

pour un certain polynôme matriciel Ψ (de degré p) et un bruit blanc η à déterminer

☞ Q2 Montrer que la régression $\mathcal{R}$ par les moindres carrés de X_t sur $\langle X_{t-1}, \ldots, X_{t-p} \rangle$ est équivalente aux deux estimations séparées $\mathcal{R}^1$ de X_t^1 sur $\left\langle X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \ldots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \right\rangle$ et $\mathcal{R}^2$ de X_t^2 sur $\left\langle \mathbf{X_t^1}, X_{t-1}^1, X_{t-1}^2, \ldots, X_{t-p}^1, X_{t-p}^2 \right\rangle$.

☞ Q3 On considère l'hypothèse $\mathcal{H}_0$: " $X^1 \not\rightsquigarrow X^2$ ".
Réécrire les régressions $\mathcal{R}^1$ et $\mathcal{R}^2$ sous $\mathcal{H}_0$.
Montrer qu'à supposer qu' ϵ^1 est gaussien, le test de l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ se ramène à un test de Student que l'on explicitera.

☞ Q4 On considère l'hypothèse $\mathcal{H}_0^*$: " $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$ ".
En supposant qu'ϵ est gaussien, proposer une procédure de test de $\mathcal{H}_0^*$.

8 Travaux Dirigés n°8

Enoncé de l'exercice 1

On considère deux processus stationnaires X et Y vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_t & = & (\mathbb{1} - \theta_1 L)U_t \\ Y_t & = & c + \frac{\mu}{1-\phi L} X_{t-3} + (\mathbb{1} - \theta_2 L)V_t \end{array}\right.$$

où c est une constante et u et v sont deux bruits blanc indépendants de variances respectives σ_u^2 et σ_v^2.

☞ Q1 Ecrire le vecteur (X_t, Y_t)' sous forme d'un processus ARMA bivarié.
Donner des conditions suffisantes pour que (u_t, v_t)' soit l'innovation du processus (ce que l'on supposera par la suite).

☞ Q2 Montrer que Y_t est en fait un processus ARMA unidimensionnel.
Déterminer son ordre et montrer que ses coefficients sont liés de manière non linéaire à ceux introduits dans la définition des processus.

☞ Q3 Déterminer la prévision optimale des valeurs futures de Y_t connaissant le passé de X_t et Y_t.

Enoncé de l'exercice 2

On considère deux processus du second ordre $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_t & = & X_{t-1} + U_t \\ Y_t & = & \frac{5}{6} Y_{t-1} - \frac{1}{6} Y_{t-2} - X_{t-1} + V_t \end{array}\right.$$

où U et V sont deux bruits blanc indépendants de variances respectives σ_u^2 et σ_v^2.
On suppose en outre que $\forall t < 0; X_t = Y_t = U_t = V_t = 0$

☞ Q1 (a) Vérifier que ni $(X_t)_{t>0}$ ni $(Y_t)_{t>0}$ n'est stationnaire.

(b) Vérifier que $(\Delta X_t)_{t\geq 2}$ et $(\Delta Y_t)_{t\geq 2}$ sont équivalents à des processus stationnaires, et préciser le cas échéant leur forme ARMA .

On note $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\epsilon = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

☞ Q2 Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel) A tel que

$$\forall t > 0,\ A(L)Z = \epsilon$$

et en donner la représentation canonique du modèle

☞ Q3 Montrer qu'il existe un polynôme (matriciel) A^* de degré $d°A - 1$ tel que $A(\mathbb{X}) = A(1) + (1 - \mathbb{X})A^*(\mathbb{X})$.
En déduire qu'il existe une combinaison linéaire de X et Y qui est asymptotiquement équivalente à un processus stationnaire.

Enoncé de l'exercice 3

On considère un processus vectoriel $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de taille n, dont on suppose qu'il est intégré d'ordre 1, et qu'il admet une représentation VAR de la forme :

$$\Phi(L)Y = \mu + \epsilon$$

où ϵ est l'innovation de Y et $\Phi(0) = \mathcal{I}d$.

☞ Q1 (a) En utilisant la décomposition $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$, montrer qu'on peut écrire le modèle sous la forme équivalente :

$$(\mathbb{1} - L)Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i(\mathbb{1} - L)Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t$$

(b) Montrer que le rang de $\Phi(1)$ est inférieur strictement à n.

(c) On suppose que le rang de $\Phi(1)$ est égal à r. Montrer qu'il existe deux matrices α et β de dimensions (n, r) et de rang r telles que $\Phi(1) = \alpha\beta'$.

(d) Montrer que $\beta' y_t$ est nécessairement stationnaire (les colonnes de β sont alors appelées vecteurs de cointégration de y_t).

☞ Q2 On suppose que la représentation de Wold du processus Y est de la forme

$$(\mathbb{1} - L)Y = m + C(L)\epsilon$$

avec $C(0) = \mathcal{I}d$.

(a) En utilisant la décomposition

$$C(L) = C(1) + (\mathbb{1} - L)C^+(L)$$

montrer, en généralisant la démarche présentée dans TD 4, exercice 1, qu'il existe une marche aléatoire[8] (multivariée) T et un processus stationnaire S tels que $Y = S + T$.

(b) Montrer qu'on a nécessairement : $\beta' m = 0$ et $\beta' C(1) = 0$.

[8] Avec dérive : $(\mathbb{1} - L)T = \eta$ où η est un bruit d'espérance a priori **non-nulle**.

(c) Soit $\beta^\perp$ une base[9] de l'orthogonal de β. Déduire de la question précédente qu'il existe $m_0 \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $\delta \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$ tels que $m = \beta^\perp m_0'$ et $C(1) = \beta^\perp \delta'$.

(d) En déduire que T_t s'exprime en fait comme combinaison linéaire de $n-r$ marches aléatoires univariées (ces marches aléatoires sont appelées *tendances communes* aux séries $(Y_t^i)_t$).

---

[9] C'est-à-dire que les colonnes de $\beta^\perp$ forment une base de l'orthogonal de l'espace engendré par les colonnes de β.