Deuxième année
2002-2003

Théorie des tests
Corrigé des travaux dirigés n°1

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com//SE207/

Dernière mise-à-jour: 20030402-10h07

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 (a) Notant $t_1 = \sum_{i=1}^n x_i$ il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n &= \frac{\lambda_1^{t_1}}{x_1! \cdots x_n!} e^{-n\lambda_1} \\ &= \boxed{\tfrac{t_1!}{x_1! \cdots x_n!} \tfrac{e^{(\ln \lambda_1) t_1}}{t_1!} e^{-n\lambda_1}}\end{aligned}$$

(b) Les variables aléatoires T_1 et T_2 suivent chacune une loi de Poisson de paramètre $n\lambda_1$ et $n\lambda_2$ respectivement. Par conséquent pour $i \in \{1, 2\}$ on a

$$\mathbb{P}T_i = t_i = \frac{(n\lambda_i)^{t_i}}{t_i!} e^{-n\lambda_i}$$

et donc

$$\mathbb{P}X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n = n^{-t_1} \frac{t_1!}{x_1! \cdots x_n!} \mathbb{P}T_1 = t_1$$

On pose $\boxed{\theta_i = \ln \lambda_i}$; d'après le théorème de factorisation la statistique T_1 est bien exhaustive pour le paramètre θ_1.

(c) Par indépendance des variables T_1 et T_2 il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}T_1 = t_1 \wedge T_2 = t_2 &= \mathbb{P}T_1 = t_1 \cdot \mathbb{P}T_2 = t_2 \\ &= \frac{(n\lambda_1)^{t_1} (n\lambda_2)^{t_2}}{t_1! t_2!} e^{-n(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ &= \frac{n^{t_1 + t_2}}{t_1! t_2!} e^{-n(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{\ln(\lambda_1) t_1 + \ln(\lambda_2) t_2} \\ &= \left(e^{n(\lambda_1 + \lambda_2)}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{n^{t_1 + t_2}}{t_1! t_2!}\right) \cdot \left(e^{\ln(\lambda_1) t_1 + \ln(\lambda_2) t_2}\right)\end{aligned}$$

On pose donc

$$\boxed{\begin{aligned} Z_T(\theta_1, \theta_2) &= e^{n\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}\right)} \\ h_T(t_1, t_2) &= \tfrac{n^{t_1 + t_2}}{t_1! t_2!} \end{aligned}}$$

☞ Q2 (a) La démarche est la même que celle présentée en cours.

(b) Le rapport p s'écrit, en divisant par λ_2 :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{e^{\tau_1}}{1 + e^{\tau_1}}$$

Le fait que l'expression ne dépende que de τ_1 est une propriété de la famille des lois exponentielles.

(c) *(facultative)*

(d) *(facultative)*

☞ Q3 (a) Cette propriété est démontrée en cours.

(b) Notons $W(u) = \{\hat{E} \leq t_1 \leq a(u)\} \bigcup \{b(u)\hat{E} \leq t_1 \leq u\}$ la région de rejet. On a

$$\mathbb{P}T_1 \in W(t) \mid U = u = 2^{-u} \sum_{k=0}^{a(u)} \mathcal{C}_u^k \frac{e^{k\tau_1}}{(e^{\tau_1}+1)^u} + 2^{-u} \sum_{k=b(u)}^{u} \mathcal{C}_u^k \frac{e^{k\tau_1}}{(e^{\tau_1}+1)^u}$$

Les conditions recherchées expriment d'une part que la mesure de la région de rejet $W(u)$ sous H_0 est α lorsque $\tau_1 = 0$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}T_1 \in W(t) \mid U = u = 2^{-u} \sum_{k=0}^{a(u)} \mathcal{C}_u^k + 2^{-u} \sum_{k=b(u)}^{u} \mathcal{C}_u^k \approx \alpha$$

et d'autre part que la dérivée de l'application

$$\tau_1 \mapsto \mathbb{P}T_1 \in W(t) \mid U = u$$

est nulle en $\tau_1 = 0$, ce qui s'écrit

$$\sum_{k=0}^{a(u)} \left(k - \frac{u}{2}\right) \mathcal{C}_u^k + \sum_{k=b(u)}^{u} \left(k - \frac{u}{2}\right) \mathcal{C}_u^k = 0$$

soit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{a(u)} \left(k - \frac{u}{2}\right) \mathcal{C}_u^k &= \sum_{k=b(u)}^{u} \left(\frac{u}{2} - k\right) \mathcal{C}_u^k \\ &= \sum_{l=0}^{u-b(u)} \left(\frac{u}{2} - (u-l)\right) \mathcal{C}_u^{u-l} \\ &= \sum_{l=0}^{u-b(u)} \left(l - \frac{u}{2}\right) \mathcal{C}_u^l \end{aligned}$$

Cette égalité étant vérifiée lorsque $a(u) = b(u)$, la région de rejet est symétrique par rapport à $\frac{u}{2}$ et la condition s'écrit finalement

$$\boxed{2^{-u} \sum_{k=0}^{a(u)} \mathcal{C}_u^k = 2^{-u} \sum_{k=b(u)}^{u} \mathcal{C}_u^k \approx \frac{\alpha}{2}}$$

(c) $a(u)$ et $b(u)$ peuvent être approchés en utilisant l'approximation normale des lois binômiales.