Soient $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, 1)$ et la loi a priori $\theta \sim N(0, \tau^2)$. La loi a posteriori est alors

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|x) &\propto \pi(\theta) \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i; \theta, 1) \\
&\propto \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\tau^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\tau^2} - \frac{n}{2}(\overline{x} - \theta)^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\tau_n^2}(\theta - \mu_n)^2 + \frac{\mu_n^2}{2\tau_n^2} - \frac{n}{2}\overline{x}^2\right\} \qquad (1)
\end{aligned}$$

où $\varphi(\cdot, \mu, \sigma^2)$ est la densité d'une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, $\tau_n^{-2} = n + \tau^{-2}$ et $\mu_n = n\overline{x}/(n + \tau^{-2})$; remarquer que certains des facteurs constants en θ ont disparu, de part la relation de proportionnalité, et se rappeler que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\theta - \overline{x})^2.$$

On en déduit que $\theta|x \sim N(\mu_n, \tau_n^2)$ et la constante de normalisation de (1) est bien entendu

$$\exp\{-\frac{\mu_n^2}{2\tau_n^2} + -\frac{n}{2}\overline{x}^2\}/\tau_n\sqrt{2\pi} = \exp\left\{-\frac{(n\overline{x})^2}{n + \tau^{-2}} + \frac{n}{2}\overline{x}^2\right\}\sqrt{\frac{n + \tau^{-2}}{2\pi}}.$$

Si l'on souhaite tester $\theta = 0$ contre $\theta \neq 0$ dans un tel cadre, une solution est de considérer une loi a priori modifiée, de la forme :

$$\widetilde{\pi}(\theta) = p\delta_0 + (1 - p)\pi(\theta),$$

c'est à dire, θ vaut exactement zéro, avec probabilité p, ou suit la loi de densité π, avec probabilité $1 - p$. On a vu dans le cours que le facteur de Bayes vaut alors :

$$B = \frac{L(x; 0)}{\int L(x; \theta)\pi(\theta)\, d\theta}$$

quelle que soit la valeur de p; ce qui donne ici (en simplifiant les facteurs communs au denominateur et au numerateur) :

$$B = \frac{\exp\left\{-\frac{n}{2}(\overline{x})^2\right\}}{\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\int \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\tau^2} - \frac{n}{2}(\overline{x} - \theta)^2\right\}\, d\theta}$$

Soit, puisque nous avons déjà calculé la constante de normalisation :

$$B = \tau\sqrt{(n + \tau^{-2})}\exp\left\{-\frac{(n\overline{x})^2}{2(n + \tau^{-2})}\right\}.$$

Pour τ fixé, B se comporte d'une façon naturelle : il tend vers 0 exponentiellement vite lorsque $\overline{x}$ s'écarte sensiblement de 0, vers $+\infty$ à la vitesse $\sqrt{n}$ sinon. En revanche, $B \to 1$ lorsque $\tau \to +\infty$, et on retrouve le paradoxe de Jeffreys-Lindley : une information a priori nulle est incompatible avec une hypothèse infiniment précise.