ENSAE

Deuxième année - Cursus intégré

Rappels de Statistique Mathématique

Ecrit. Deux heures. Tous documents autorisés

Nicolas CHOPIN

lundi 26 mai 2003

EXERCICE 1

On considère un échantillon $T_1, \ldots, T_n$ de durées de fonctionnement de n machines, suivant une loi de Weibull $We(\alpha, \beta)$, de densité

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} \exp(-\alpha t^{\beta}),$$

avec $\alpha, \beta > 0$ inconnus.

1) Préciser le modèle considéré. Est-il exponentiel?

2) Donner les équations vérifiées par l'estimateur du maximum de vraisemblance.

3) On veut tester l'hypothèse $H_0 : \beta = 1$. Parmi les tests asymptotiques que vous connaissez, lequel vous semble le plus simple à utiliser? Justifier. Bien préciser la construction et les propriétés du test.

EXERCICE 2

Soit un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ tel que $X_i \sim \mathcal{P}(\theta)$ (loi de Poisson), $\theta > 0$. Rappelons que si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, alors

$$P(X = k) = e^{-\theta}\theta^k / k!$$

pour tout entier $k \geq 0$. Soit T_n la proportion de X_i valant 0,

$$T_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_0(X_i).$$

1) Donner une statistique exhaustive et complète du modèle.

2) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$. En déduire un estimateur sans biais optimal T'_n de $\exp(-\theta)$.

3) Montrer que T'_n est convergent et asymptotiquement normal.

EXERCICE 3

Soit un échantillon de variables i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ tel que $X_i \sim B(1,p)$ (loi binomiale de paramètre p), $p \in [0,1]$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1) Préciser le modèle statistique considéré. Est-il exponentiel? Donner une statistique exhaustive et complète.

2) Rappeler l'espérance et la variance de S_n. En déduire des estimateurs $T_{n,1}$ et $T_{n,2}$, respectivement sans biais optimaux de p et de $p(1-p)$. $T_{n,1}$ est-il efficace? Même question pour $T_{n,2}$.

3) Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance du modèle et rappeler ses propriétés asymptotiques. En déduire les propriétés asymptotiques de $T_{n,2}$. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?

4) On souhaite tester l'hypothèse $H_0 : p = 0$ contre $H_1 : p > 0$. Pourquoi ne peut-on pas utiliser les tests asymptotiques vus en cours? (préciser au cas par cas). Expliquer plus généralement pourquoi toute tentative de construction d'un test (asymptotique ou à distance finie) ne peut qu'échouer dans ce cas précis.

5) On attribue à p la loi a priori Beta(α, β). Donner la loi a posteriori correspondante. Calculer son espérance $T_{n,3}$, et rappeler pourquoi il s'agit d'un estimateur bayésien.

Rappel : la densité d'une Beta(α, β) est

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(t).$$

Rappelons que la fonction Γ est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt,$$

pour $x > 0$. Elle vérifie de plus : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

6) Donner les propriétés asymptotiques de $T_{n,3}$ (convergence? normalité asymptotique?).Comparer $T_{n,1}$ et $T_{n,3}$ dans le cas où tous les x_i observés sont nuls et commenter.

7) (Question facultative et plus difficile, à traiter de préférence si vous avez fini tout le reste.) Que se passe-t-il si l'on essaie d'effectuer un test bayésien de $H_0 : p = 0$ avec la loi a priori donnée dans la question précédente? On décide alors d'attribuer à p la loi a priori suivante :

$$\pi : \begin{cases} p = 0 \text{ avec probabilité } p_0 \\ p \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \text{ avec probabilité } 1 - p_0 \end{cases}$$

Donner la probabilité a posteriori de l'événement $\{p = 0\}$. Donner son expression simplifiée lorsque $\alpha = \beta = 1$. En quoi consisterait un test bayésien de $H_0 : p = 0$ dans ce cas précis?

EXERCICE 4

Soit un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ tel que $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ (loi Normale), avec $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Construire un test U.P.P. (uniformément plus puissant) au seuil α de $H_0 : \theta \leq 0$ contre $H_1 : \theta > 0$. Construire un second test U.P.P. au seuil α' de $H_0' : \theta \geq 0$ contre $H_1' : \theta < 0$.

2) En déduire que si $\alpha, \alpha' < 1/2$, l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n)$ conduisant à une acceptation simultanée de H_0 et H_0' est non vide. Montrer que la probabilité d'appartenir à cet ensemble tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$, à condition que $\theta \neq 0$.