



Cursus Intégré  
2004-2005

Rappels de statistique mathématique  
*Énoncé des travaux dirigés n°3*

Guillaume Lacôte  
Bureau **E03**

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE222/>

Énoncé de l'exercice 1

Soit  $Y$  un vecteur aléatoire de taille  $N$  et  $X$  une matrice aléatoire à  $N$  lignes et  $K$  colonnes. Soit  $\theta \rightarrow S(\theta)$  une application de classe  $C^1$  définie sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille  $N$ . On suppose que  $S(0) = A$  et on note :  $A = \frac{\partial S}{\partial \theta}(0)$ .

On rappelle par ailleurs que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(|S|)}{\partial \theta} &= \text{Tr}(S^{-1}S') \\ \frac{\partial S^{-1}}{\partial \theta} &= -S^{-1}S'S^{-1} \end{aligned}$$

On considère le modèle linéaire (conditionnel) gaussien suivant :

$$\mathbb{P}_Y^X = \mathcal{N}(Xb, S(\theta))$$

où  $b \in \mathbb{R}^K$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  sont les paramètres inconnus.

- ☞ Q1 Ecrire la vraisemblance du modèle.
- ☞ Q2 Ecrire le vecteur score (de taille  $K+1$ ) et vérifier qu'il est d'espérance nulle.
- ☞ Q3 Calculer la matrice d'information du modèle en  $(b, \theta = 0)$ .  
Le résultat s'exprime très simplement en fonction de  $X$  et  $A$ .
- ☞ Q4 Dans cette question, on suppose que  $S(\theta)$  est la matrice de terme général :

$$S(\theta)_{i,j} = (\theta^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq N}$$

Calculer  $I_{b,\theta}(b, 0)$ .

Énoncé de l'exercice 2

- ☞ Q1 Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (e.m.v.)  $\hat{p}$  de  $p$  dans le modèle

$$X_i \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{B}(1, p)$$

et calculer la loi limite de  $\sqrt{n}(\hat{p} - p)$ .

☞ Q2 Calculer l'e.m.v.  $(\hat{m}, \hat{\sigma}^2)$  de  $(m, \sigma^2)$  dans le modèle

$$X_i \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

et donner la loi limite du vecteur

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{m} - m \\ \hat{\sigma}^2 - \sigma^2 \end{pmatrix}$$

☞ Q3 Calculer l'e.m.v.  $(\hat{a}, \hat{b})$  de  $(a, b)$  dans le modèle

$$X_i \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{U}([a, b]) \text{ loi uniforme sur } [a, b]$$

Donner la loi limite du vecteur

$$n \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ b - \hat{b} \end{pmatrix}$$

---

### Énoncé de l'exercice 3

Exemple tiré de *Basu D. (1988) Stastical Information and Likelihood, Springer-Verlag, N.Y.*

Dans une urne contenant 1000 tickets, 20 sont marqués  $\theta$  et 980 sont marqués  $10\theta$ .

- ☞ Q1 Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  lorsque l'on tire un unique ticket de valeur  $X$ , et montrer que  $P(\hat{\theta} = \theta) = 0.98$ .
- ☞ Q2 On renumérote les tickets marqués  $10\theta$  par  $a_i\theta$  ( $1 \leq i \leq 980$ ) où les  $a_i$  sont des réels connus, deux-à-deux distincts, et compris dans l'intervalle  $[10, 10.1]$ . Donner le nouvel estimateur du maximum de vraisemblance  $\tilde{\theta}$  et montrer que  $P(\tilde{\theta} = \theta) = 0.02$ . Ce résultat vous semble-t-il paradoxal?
-