



Cursus Intégré
2004-2005

Rappels de statistique mathématique
Énoncé des travaux dirigés n°3

Guillaume Lacôte

 Bureau **E03**

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE222/>

Enoncé de l'exercice 1

Soit Y un vecteur aléatoire de taille N et X une matrice aléatoire à N lignes et K colonnes. Soit $\theta \rightarrow S(\theta)$ une application de classe C^1 définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R} , à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille N . On suppose que $S(0) = I_N$ et on note : $A = \frac{\partial S}{\partial \theta}(0)$.

On rappelle par ailleurs que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(|S|)}{\partial \theta} &= \text{Tr} \left(S^{-1} S' \right) \\ \frac{\partial S^{-1}}{\partial \theta} &= -S^{-1} S' S^{-1} \end{aligned}$$

On considère le modèle linéaire (conditionnel) gaussien suivant :

$$\mathbb{P}_Y^X = \mathcal{N}(Xb, S(\theta))$$

où $b \in \mathbb{R}^K$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont les paramètres inconnus.

- ☞ Q1 Ecrire la vraisemblance du modèle.
- ☞ Q2 Ecrire le vecteur score (de taille $K + 1$) et vérifier qu'il est d'espérance nulle.
- ☞ Q3 Calculer la matrice d'information du modèle en $(b, \theta = 0)$.
Le résultat s'exprime très simplement en fonction de X et A .
- ☞ Q4 Dans cette question, on suppose que $S(\theta)$ est la matrice de terme général :

$$S(\theta)_{i,j} = (\theta^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq N}$$

Calculer $I_{b,\theta}(b, 0)$.

Enoncé de l'exercice 2

- ☞ Q1 Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (e.m.v.) \hat{p} de p dans le modèle

$$X_i \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{B}(1, p)$$

et calculer la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{p} - p)$.

☞ Q2 Calculer l'e.m.v. $(\hat{m}, \hat{\sigma}^2)$ de (m, σ^2) dans le modèle

$$X_i \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

et donner la loi limite du vecteur

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{m} - m \\ \hat{\sigma}^2 - \sigma^2 \end{pmatrix}$$

☞ Q3 Calculer l'e.m.v. (\hat{a}, \hat{b}) de (a, b) dans le modèle

$$X_i \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{U}([a, b]) \quad \text{loi uniforme sur } [a, b]$$

Donner la loi limite du vecteur

$$n \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ b - \hat{b} \end{pmatrix}$$

Énoncé de l'exercice 3

Exemple tiré de *Basu D. (1988) Stastical Information and Likelihood, Springer-Verlag, N.Y.*

Dans une urne contenant 1000 tickets, 20 sont marqués θ et 980 sont marqués 10θ .

- ☞ Q1 Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ lorsque l'on tire un unique ticket de valeur X , et montrer que $P(\hat{\theta} = \theta) = 0.98$.
- ☞ Q2 On renumérote les tickets marqués 10θ par $a_i\theta$ ($1 \leq i \leq 980$) où les a_i sont des réels connus, deux-à-deux distincts, et compris dans l'intervalle $[10, 10.1]$. Donner le nouvel estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{\theta}$ et montrer que $P(\tilde{\theta} = \theta) = 0.02$. Ce résultat vous semble-t-il paradoxal ?