Cursus Intégré
2004-2005

Rappels de statistique mathématique
Enoncé des travaux dirigés n°4

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE222/

Version du 20050421-15h38, révisée le 21 avril 2005

Enoncé de l'exercice 1

Soit f la densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ translatée de α

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left[-\frac{x-\alpha}{\theta}\right] \mathbb{1}_{[\alpha,+\infty[}(x)$$

☞ Q1 Donner les e.m.v. $\hat{\alpha}$ et $\hat{\theta}$ de α et θ.

☞ Q2 Calculer la loi (à distance finie) de $n(\hat{\alpha} - \alpha)$.

☞ Q3 Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$.

☞ Q4 Rappeler l'expression de la loi de la statistique d'ordre $(X_{(1)}, \ldots, X_{(N)})$ en fonction de f. En déduire la loi du n-uplet

$$(nX_{(1)}, (n-1)(X_{(2)} - X_{(1)}), \ldots, 2(X_{(n-1)} - X_{(n-2)}), X_{(n)} - X_{(n-1)})$$

En déduire que $\hat{\theta}$ et $\hat{\alpha}$ sont indépendants (à distance finie).

Enoncé de l'exercice 2

Cet exercice présente les bases de l'estimation bayésienne.

☞ Q1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, A un événement non-vide et $(H_1, \ldots, H_n)$ un *système complet d'hypothèses incompatibles non-vides* (c'est-à-dire une partition de Ω).
Exprimer $\mathbb{P}(H_i|A)$ en fonction des probabilités de $H_1, \ldots, H_n$, de celles de A conditionnellement à H_i et inversement, mais pas de $\mathbb{P}(A)$.

☞ Q2 Soit $(X_1, \ldots, X_n) \underset{iid}{\leadsto} \mathcal{L}_\theta$, de paramètre inconnu $\theta \in \Theta$.
On suppose que θ suit une loi *a priori* de densité π_0 sur Θ.
Donner la densité $\pi_{\cdot|x}$ de la loi *a posteriori* de θ conditionnellement à l'observation de $X = x$.

☞ Q3 Définissons pour tout estimateur $\widehat{\theta}(x)$ de θ la *fonction de risque quadratique*

$$R_\nu\left(\widehat{\theta}\right) = \int_\Theta \mathbb{E}_\theta \left(\widehat{\theta}(X) - \theta\right)^2 d\nu(\theta))$$

où ν désigne une loi quelconque sur Θ (par exemple $d\nu = \pi_0 d\lambda$).
On appelle *estimateur bayésien* de θ l'estimateur $\widehat{\theta}$ qui minimise le risque associé.
Montrer que l'estimateur bayésien de θ associé au risque R_{π_0} est

$$\widehat{\theta}(x) = \mathbb{E}_{\pi_{\cdot|x}}(\theta) = \int_\Theta \theta \pi_{\cdot|x}(\theta) d\theta$$

☞ Q4 Donner l'estimateur bayésien de $\theta \in [a, b]$ lorsque $\pi_0 = \mathcal{U}_{[a,b]}$ en fonction de la densité de la loi $\mathcal{L}_\theta$ de X.
Expliciter cet estimateur lorsque $\mathcal{L}_\theta$ est la loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$ de paramètre inconnu $\theta > 0$.

Enoncé de l'exercice 3

Un des premiers exemples d'utilisation de la Statistique Bayésienne remonte à Laplace, en 1786. Celui-ci décida de répondre à la question suivante : au regard du nombre observé n_g de naissances masculines parmi n naissances à Paris, peut-on dire si la probabilité p qu'un enfant qui naisse soit un garçon est supérieure à $\frac{1}{2}$?

☞ Q1 Laplace munit le paramètre p d'une loi a priori uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Ce choix vous semble-t-il naturel ?

☞ Q2 Exprimer alors la loi a posteriori de p, puis exprimer la probabilité $\mathbb{P}\left(p > \frac{1}{2} | N_g = n_g\right)$ sous forme d'un rapport d'intégrales.
Remarque : Laplace, obtint, pour $n = 493472$ et $n_g = 251527$, une probabilité $\mathbb{P}\left(p > \frac{1}{2} | N_g = n_g\right) \simeq 1 - 1.15.10^{-42}$ et en conclut que p était très vraisemblablement plus grand que $\frac{1}{2}$.

☞ Q3 Donner l'espérance et la variance de la loi a posteriori en fonction de la vrai valeur p_0 du paramètre p. Quelles sont leurs limites lorsque $n \to +\infty$?
Rappel : la loi Beta $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ de paramètres $\alpha > 0$, $\beta > 0$ admet pour densité :

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

où $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$.
Son espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et sa variance $\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

☞ Q4 Ces limites sont-elles modifiées si on choisit pour loi a priori sur p une loi $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ quelconque ? Pourquoi est-il judicieux malgré tout de se restreindre au moins à la classe des lois a priori telles que $\alpha = \beta$?
