

Rappels de statistique mathématique
Énoncé et corrigé des travaux dirigés n°5

Guillaume Lacôte
Bureau E03

✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE222/>

Énoncé de l'exercice 1

On souhaite évaluer et analyser le phénomène du chômage. Pour cela, on dispose de n observations sur les durées $y_i, 1 \leq i \leq n$, pendant lesquelles des individus sont restés sans emploi. On suppose dans la suite que les variables aléatoires correspondantes $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont i.i.d. et suivent la loi de Weibull de paramètres a et b . On rappelle que cette loi est continue sur \mathbb{R}^+ et admet la fonction de répartition pour $y > 0$

$$F(y; a, b) = 1 - \exp(-ay^b)$$

On définit la fonction de survie par

$$S(y) = 1 - F(y)$$

et la fonction de hasard par $h(y) = \frac{f(y)}{S(y)}$.

■ Partie 1 **Généralités**

- ☞ Q1 Donner l'expression de la fonction de hasard du modèle.
- ☞ Q2 Quelle est en terme de chômage l'interprétation de la fonction de hasard ? Expliquer alors pourquoi il est important de considérer le cas particulier où cette fonction est constante. Pour quelles valeurs des paramètres, la fonction de hasard est-elle constante ? Quelles sont alors les lois des durées de chômage ?
- ☞ Q3 Étudier l'évolution de la fonction de hasard en fonction de a , puis en fonction de b .

■ Partie 2 **Estimation contrainte**

On suppose dans cette partie $b = 1$. Le modèle est alors uniquement paramétré par a .

- ☞ Q1 Le modèle est-il exponentiel ? Si oui, expliciter une statistique exhaustive.
- ☞ Q2 Déterminer le vecteur du score et vérifier directement qu'il est centré.
- ☞ Q3 Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance \hat{a}_0 de a ? Est-il sans biais, y a-t-il surestimation ou sous-estimation systématique ?
- ☞ Q4 Déterminer la variance asymptotique de cet estimateur \hat{a}_0

■ Partie 3 **Estimation non contrainte**

On considère maintenant le cas où a et b peuvent a priori prendre toutes valeurs positives.

- ☞ Q1 Le modèle est-il exponentiel avec une statistique exhaustive dont la taille est indépendante du nombre n d'observations ? Si oui, expliciter une telle statistique.
- ☞ Q2 Écrire les équations de vraisemblance. Sont-elles résolubles sous forme analytique ?

- ☞ Q3 Donner la forme de la variance asymptotique de l'estimateur du maximum vraisemblance $\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ du paramètre $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- ☞ Q4 En déduire la variance asymptotique de \hat{a} lorsque $b = 1$. Comparer alors les estimateurs \hat{a} et \hat{a}_0 lorsque $b = 1$. Quelle conclusion en tirer ?
- ☞ Q5 Quelle démarche pourrait-on proposer pour étudier la distribution de l'estimateur $\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ lorsque l'échantillon est de petite taille, par exemple $n = 10$?

Partie 4 Cas indépendant - non équidistribué

On considère maintenant le cas de T observations Y_1, \dots, Y_T indépendantes, de lois respectives :

$$F(y; e^{\alpha t}, 1), \quad t \in \llbracket 1, T \rrbracket, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- ☞ Q1 Déterminer la vraisemblance du modèle \mathcal{L} , et vérifier qu'elle est concave en α à (y_1, \dots, y_T) fixé. En déduire l'équation caractérisant l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\alpha}_T$ de α .
- ☞ Q2 On note $u_t = y_t - e^{-\alpha t}$. Donner l'interprétation de u_t .
- ☞ Q3 Montrer que l'équation de la vraisemblance correspond à la condition d'orthogonalité de (u_1, \dots, u_T) et de $1, \dots, T$ pour un certain produit scalaire que l'on précisera.

Corrigé de l'exercice 1

- ☞ Q1 Par définition on a pour $y \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f(y; a, b) &= \frac{\partial F}{\partial \cdot}(y, a, b) \\ &= aby^{b-1}e^{-ay^b} \end{aligned}$$

Il en découle que

$$h(y; a, b) = aby^{b-1}\mathbf{1}_{y \geq 0}$$

- ☞ Q2 La fonction de hasard $h(y)$ s'écrit comme le rapport $\frac{f(y)}{S(y)}$. Or

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\partial F(\cdot; a, b)}{\partial y}(y) \\ &= \lim_{dy \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(Y \in [y, y + dy])}{dy} \end{aligned}$$

et par ailleurs $S(y) = 1 - F(y) = \mathbb{P}(Y \geq y)$.

Autrement dit

$$\begin{aligned} h(y) &= \lim_{dy \rightarrow 0^+} \frac{1}{dy} \frac{\mathbb{P}(Y \in [y, y + dy])}{\mathbb{P}(Y \geq y)} \\ &= \lim_{dy \rightarrow 0^+} \frac{1}{dy} \frac{\mathbb{P}(Y \in [y, y + dy] \wedge Y \geq y)}{\mathbb{P}(Y \geq y)} \\ &= \lim_{dy \rightarrow 0^+} \frac{1}{dy} \mathbb{P}(NON(Y \geq y + dy) \mid Y \geq y) \end{aligned}$$

En d'autres termes $h(y)dy$ mesure la probabilité, pour un individu encore au chômage à la date y , de **sortir du chômage** peu après y (au sens "après $y + dy$ ", ceci pour dy "voisin" de 0).

Supposer que h est constante revient à supposer que la probabilité de sortir d'une période chômage de durée dy ne dépend pas de sa date y , c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'*effet mémoire*. Sachant que

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{aby^{b-1}e^{-aby^b}}{e^{-ay^b}} \\ &= aby^{b-1} \end{aligned}$$

cette condition est vérifiée **si, et seulement si** $b = 1$.

Lorsque cette condition est vérifiée, on constate que la loi de durée du chômage s'écrit simplement pour $y \geq 0$

$$f(y; a, 1) = ae^{-ay}$$

dont on remarque qu'il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre a .

- ☞ Q3 Etudions les variations de $h(y; \cdot, \cdot)$ en fonction de a et b à $y \geq 0$ donné.

Il vient

- Selon a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial a}(y, a, b) &= by^{b-1} \\ &> 0 \quad \text{car } b > 0 \end{aligned}$$

Ainsi la situation du chômage s'améliore (au sens où la probabilité de sortie s'accroît) lorsque a s'accroît.

- Selon b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial b}(y, a, b) &= ay^{b-1} + ab \ln(y)y^{b-1} \\ &= ay^{b-1}(1 + b \ln(y)) \end{aligned}$$

En conséquence

- Si $y \in]0, e^{-\frac{1}{b}}[$, soit si $b > -\frac{1}{\ln(y)}$, la situation du chômage *se détériore* lorsque b croît.

- Si $y \in]e^{-\frac{1}{b}}, +\infty[$, soit si $b < -\frac{1}{\ln(y)}$, la situation du chômage *s'améliore* lorsque b croît.

On suppose dans cette partie $b = 1$. Le modèle est alors uniquement paramétré par a .

☞ Q1 La vraisemblance du modèle est donnée pour $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} L(y; a, 1) &= \prod_{i=1}^n (ae^{-ay_i} \mathbf{1}_{y_i \geq 0}) \\ &= (a^n \mathbf{1}_{\min_i y_i \geq 0}) \cdot e^{-a(\sum_{i=1}^n y_i)} \end{aligned}$$

On constate donc que le modèle est exponentiel, de statistique exhaustive $T(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i$.

☞ Q2 La log-vraisemblance est alors pour $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$

$$\ln L(y; a, 1) = n \ln a - a \sum_{i=1}^n y_i$$

Le score s'écrit donc

$$\begin{aligned} S_a(y; a, 1) &= \frac{\partial \ln L}{\partial a}(y; a, 1) \\ &= \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_i) &= \int_{\mathbb{R}} y_i \cdot ae^{-ay_i} \mathbf{1}_{y_i \geq 0} dy_i \\ &= - \int_0^{+\infty} (-au) e^{-au} du \\ &= + \frac{1}{a} [e^{-au}]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}(S_a(y; a, 1)) = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(y_i) = 0$$

de sorte que le vecteur score est bien centré (ce qui est une propriété générale, voir TD 2, exercice 2)

☞ Q3 De la condition nécessaire $\frac{\partial \ln L}{\partial a}(\hat{a}_0) = 0$ on tire $\hat{a}_0 = \frac{1}{\bar{y}}$; réciproquement \hat{a}_0 maximise bien la log-vraisemblance car celle-ci est concave.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{a}_0) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{y}}\right) \\ &> \frac{1}{\mathbb{E}(\bar{y})} \quad (\text{d'après l'inégalité de Jensen}) \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Autrement dit, \hat{a}_0 est biaisé et surestime systématiquement la vraie valeur a .

On pourrait même calculer le biais exact, en s'appuyant sur le fait que $(Y_1 + \dots + Y_n) \sim \Gamma(n, a)$ et en calculant explicitement $\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{s} f_{\Gamma(a)}(s) ds = \frac{n-1}{n-1} a$; on en déduirait que $\frac{n-1}{n} \hat{a}_0$ est un estimateur sans biais de a .

☞ Q4 On a

$$I_n(a) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = -\frac{n}{a^2}\right)$$

et donc

$$\mathbb{V}_{as}(\hat{a}_0) = \frac{a^2}{n}$$

(Attention, c'est bien $I_n(a)^{-1}$ et non pas $I_1(a)^{-1}$ car on étudie la loi asymptotique de $(\hat{a}_0 - \mathbb{E}(\hat{a}_0))$ et non pas celle de $\sqrt{n}(\hat{a}_0 - \mathbb{E}(\hat{a}_0))$)

☞ Q1 La vraisemblance du modèle est donnée pour $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} L(y; a, b) &= \prod_{i=1}^n (aby_i^{b-1} e^{-ay_i^b} \mathbf{1}_{y_i \geq 0}) \\ &= ((ab)^n \mathbf{1}_{\min_i y_i \geq 0}) \cdot (\prod_{i=1}^n y_i^{b-1}) \cdot e^{-\sum_{i=1}^n (a \cdot y_i^b)} \end{aligned}$$

On constate donc que le modèle n'est pas exponentiel, car on ne peut dissocier les termes y_i du paramètre (a, b) là où ils interviennent (à savoir $\sum_{i=1}^n y_i^b$). Donc en vertu du théorème de factorisation (Y_1, \dots, Y_n) est exhaustive et minimale, et il n'existe donc pas de statistique exhaustive comportant moins de n composantes.

☞ Q2 La log-vraisemblance s'écrit pour $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$

$$\ln L(y; a, b) = n \ln a + n \ln b + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln y_i - a \sum_{i=1}^n y_i^b$$

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a}(y; a, b) = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n y_i^b \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b}(y; a, b) = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln y_i - a \sum_{i=1}^n y_i y_i^b \end{cases}$$

et donc l'estimateur (\hat{a}, \hat{b}) de (a, b) vérifie

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i^{\hat{b}}} \\ \hat{a} \sum_{i=1}^n \ln y_i y_i^{\hat{b}} - \frac{n}{\hat{b}} = \sum_{i=1}^n \ln y_i \end{cases}$$

On constate que \hat{b} , et par suite \hat{a} , n'est pas exprimable sous forme analytique. Pour autant, l'étude de la fonction $\left(\begin{matrix} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ b & \mapsto & \frac{1}{b} + \alpha - \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i y_i^b}{\sum_{i=1}^n y_i^b} \end{matrix} \right)$ assure de l'existence et de l'unicité

\hat{b} , et donc de \hat{a} .

☞ Q3 On a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}(y; a, b) &= -\frac{n}{a^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial b}(y; a, b) &= -\sum_{i=1}^n (\ln y_i y_i^b) \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2}(y; a, b) &= -\frac{n}{b^2} - a \sum_{i=1}^n ((\ln y_i)^2 y_i^b) \end{aligned}$$

En conséquence

$$\mathbb{V}_{as} \left(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{n}{a^2} & n\mathbb{E}(y_1^b \ln y_1) \\ n\mathbb{E}(y_1^b \ln y_1) & \frac{n}{b^2} + na\mathbb{E}((\ln y_1)^2 y_1^b) \end{pmatrix}^{-1}$$

Il reste alors à exprimer $\mathbb{E}(y_1^b (\ln y_1)^i)$ pour $i \in \{1, 2\}$; ce calcul peut être fait au moyen des intégrales eulériennes.

Remarquons pour ce faire que si Z suit une loi de Weibull de paramètre (α, β) , de densité $f_{\alpha, \beta}(x) = \alpha \theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} \mathbb{1}_{x>0}$, alors pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^\alpha \ln(Z)^p) &= \int_0^{+\infty} \theta z^\alpha \ln^p(z) \alpha z^{\alpha-1} e^{-\theta z^\alpha} dz \\ &= \frac{1}{\alpha^p \theta} \int_0^{+\infty} \ln^p\left(\frac{u}{\theta}\right) u e^{-u} du \quad \text{en posant } u = \theta z^\alpha \end{aligned}$$

En particulier pour $p \in \{1, 2\}$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^\alpha \ln(Z)) &= \frac{1}{\alpha \theta} \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{u}{\theta}\right) u e^{-u} du \\ \mathbb{E}(Z^\alpha (\ln Z)^2) &= \frac{1}{\alpha^2 \theta} \int_0^{+\infty} \ln^2\left(\frac{u}{\theta}\right) u e^{-u} du \end{aligned}$$

Or (TD 2, exercice 2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^\alpha \ln(X)) &= \frac{1 - \gamma - \ln \theta}{\theta \alpha} \\ \mathbb{E}(X^\alpha (\ln X)^2) &= \frac{1}{\alpha^2 \theta} \left(\frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 - 2(1 - \gamma) \ln(\theta) + \ln(\theta)^2 \right) \end{aligned}$$

Ceci permet alors de conclure en posant $\theta = a$ et $\alpha = b$ que¹

$$\mathbb{V}_{as} \left(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{n}{a^2} & \frac{n^{1-\gamma-\ln a}}{ab} \\ \frac{n^{1-\gamma-\ln a}}{ab} & \frac{n}{b^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 - 2(1 - \gamma) \ln a + (\ln a)^2 \right) \end{pmatrix}^{-1}$$

Q4 Remarquons que pour toute matrice A , $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Com}(A)'$ où $\text{Com}(A)$ désigne la comatrice de A ; par suite

$$I_n(a, 1)^{-1} = \frac{1}{|I_n(a, 1)|} \begin{pmatrix} n + na\mathbb{E}((\ln y_1)^2 y_1) & -n\mathbb{E}(y_1 \ln y_1) \\ -n\mathbb{E}(y_1 \ln y_1) & \frac{n}{a^2} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs,

$$|I_n(a, 1)| = \frac{n}{a^2} (n + na\mathbb{E}((\ln y_1)^2 y_1)) - (n\mathbb{E}(y_1 \ln y_1))^2$$

¹Bien que la tentation soit forte, nous résisterons ici au plaisir d'inverser cette matrice.

En conséquence,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{as}(\hat{a}) &= \frac{n + na\mathbb{E}((\ln y_1)^2 y_1)}{|I_n(a, 1)|} \\ &= \frac{n + na\mathbb{E}((\ln y_1)^2 y_1)}{\frac{n}{a^2} (n + na\mathbb{E}((\ln y_1)^2 y_1)) - (n\mathbb{E}(y_1 \ln y_1))^2} \\ &= \frac{a^2}{n} \left(1 + \frac{a^2 (n\mathbb{E}(y_1 \ln y_1))^2}{(n + na\mathbb{E}((\ln y_1)^2 y_1)) - \frac{a^2}{n} (n\mathbb{E}(y_1 \ln y_1))^2} \right) \\ &\geq \frac{a^2}{n} \\ &= \mathbb{V}_{as}(\hat{a}_0) \end{aligned}$$

Ainsi estimer sous contrainte permet d'obtenir un estimateur *plus efficace* qu'estimer sans contrainte.

Q5 Lorsque l'échantillon est de petite taille, une simulation permettrait d'étudier la distribution

$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$, de la façon suivante :

- Observant (y_1, \dots, y_n) , on en tire $\begin{pmatrix} \hat{a}^0 \\ \hat{b}^0 \end{pmatrix}$ estimateur du maximum de vraisemblance

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \end{pmatrix}.$$

- Soit alors \mathcal{W}^0 la loi de Weibull de paramètre \hat{a}^0, \hat{b}^0 ; on tire alors un échantillon indépendant de taille N selon \mathcal{W}^0 , soit (y^0_1, \dots, y^0_N) .

- de cet échantillon on tire alors $\begin{pmatrix} \hat{a}^1 \\ \hat{b}^1 \end{pmatrix}$, et ainsi de suite.

Bien-entendu, à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a $\begin{pmatrix} \hat{a}^1 \\ \hat{b}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}^0 \\ \hat{b}^0 \end{pmatrix}$; il en va de même lorsque

le nombre d'itération devient arbitrairement grand.

L'idée serait donc plutôt de se limiter à une ou deux itérations, mais de **répéter le tirage** pour obtenir la distribution empirique de $\begin{pmatrix} \hat{a}^1 \\ \hat{b}^1 \end{pmatrix}$.

On considère maintenant le cas de T observations Y_1, \dots, Y_T indépendantes, de lois respectives

$$F(y; e^{\alpha t}, 1), \quad t \in \llbracket 1, T \rrbracket, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Q1 La vraisemblance du modèle est donnée pour $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} L(y; \alpha) &= \prod_{t=1}^T e^{\alpha t} e^{-e^{\alpha t} y_t} (\mathbb{1}_{y_t \geq 0}) \\ &= \mathbb{1}_{\inf_{t \in \llbracket 1, T \rrbracket} y_t \geq 0} e^{\alpha \sum_{t=1}^T t} e^{-\sum_{t=1}^T e^{\alpha t} y_t} \end{aligned}$$

Une condition nécessaire sur l'estimateur $\hat{\alpha}$ de α est donc

$$\sum_{t=1}^T (t y_t e^{t \hat{\alpha}}) = \frac{T(T+1)}{2}$$

condition dont on vérifie qu'elle est suffisante puisque la log-vraisemblance est strictement concave car de dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2}(y; \alpha) = - \sum_{t=1}^T t^2 y_t e^{\alpha t} < 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

☞ Q2 On a

$$\begin{aligned} u_t &= y_t - e^{-\hat{\alpha}t} \\ &= y_t - \mathbb{E}_{|\alpha=\hat{\alpha}}(y_t) \end{aligned}$$

Ainsi u_t représente l'erreur de la prévision empirique de y_t , différence entre la réalisation réelle de y_t et la meilleure prévision compte-tenu du modèle estimé.

☞ Q3 On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}(y, \alpha) &= \frac{T(T+1)}{2} - \sum_{t=1}^T t y_t e^{\alpha t} \\ &= \sum_{t=1}^T (t - t y_t e^{\alpha t}) \\ &= \sum_{t=1}^T t (1 - y_t e^{\alpha t}) \\ &= \sum_{t=1}^T t e^{\alpha t} (e^{-\alpha t} - y_t) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}(y, \hat{\alpha}) = \sum_{t=1}^T e^{\hat{\alpha}t} t u_t$$

Posons donc

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\rho} : \left(\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^T)^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ ((x_t)_t, (y_t)_t) & \mapsto & \sum_{t=1}^T \rho^t x_t y_t \end{array} \right)$$

Alors pour tout $\rho \in \mathbb{R}^{++}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\rho}$ est un produit scalaire, et en outre

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}(y, \hat{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \langle (1, \dots, T) | u \rangle_{e^{\hat{\alpha}}} = 0$$

*
* *

Enoncé de l'exercice 2

On étudie entre les dates 0 et T un groupe de n individus sans emploi à la date 0, et on cherche à modéliser les durées de chômage $(T_i)_{i \in [1, n]}$.

En pratique, on observe les durées de chômage en mois. Plus précisément, on ne dispose pas de la variable continue T_i , mais seulement de la variable discrète T_i^* donnée par

$$T_i^* = [T_i]$$

Autrement dit, la variable T_i^* vaut $t + 1$ si l'individu i a retrouvé du travail entre le t -ème ($t + 1$)-ième mois.

En outre entre t et $t + 1$, on suppose que :

- l'individu i reçoit N_t^i offres d'emploi, où N_t^i est une suite de variables i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$;
- si l'individu i est toujours au chômage à la date t , et si parmi les N_t^i offres qu'il reçoit, l'un au moins offre un salaire supérieur à une constante ξ_i , propre à l'individu (appelée salaire de réserve), alors l'individu n'est plus au chômage : ($T_i^* = t + 1$);
- les salaires des offres d'emploi sont tirés indépendamment des dates d'arrivée des offres et leur nombre dans une loi de fonction de répartition F .

On suppose dans un premier temps pour simplifier que $T = +\infty$.

☞ Q1 Calculer $\mathbb{P}(T_i^* = t + 1 | T_i > t)$ en fonction de F , ξ_i , λ .

☞ Q2 En déduire la vraisemblance de (T_1^*, \dots, T_n^*) .

☞ Q3 On suppose que tous les individus ont le même salaire de réserve : $\xi_i = \xi$ et que ce salaire de réserve commun ξ est connu, ainsi que la fonction de répartition F . Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ .

Montrer directement que cet estimateur est convergent et asymptotiquement efficace quand $n \rightarrow +\infty$.

☞ Q4 En pratique, l'enquête se termine à la fin du T -ième mois, $T < +\infty$: à cette date, certains individus sont encore au chômage ; on n'observe donc que :

$$\begin{aligned} T_i^{**} &= T_i^* \text{ si } T_i^* \leq T \\ &= T + 1 \text{ si } T_i^* > T \end{aligned}$$

Ecrire la vraisemblance des observations $(T_1^{**}, \dots, T_n^{**})$.

Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ .

Remarque : On suppose toujours le salaire de réserve commun ξ et la fonction de répartition F connue.

☞ Q5 On suppose désormais que F s'écrit :

$$F(x) = (1 - e^{-\gamma(\xi - \xi_0)}) \mathbb{1}_{\xi \geq \xi_0}$$

où γ est un paramètre inconnu à estimer et ξ_0 est connu.

Le couple (λ, γ) est-il identifiable ?

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 On suppose pour simplifier que jusqu'à la question 4, $T = +\infty$. Sinon, il faudrait alourdir les expressions des densités qui suivent en adjoignant l'indicatrice $\mathbb{1}_{t_i \leq T}$ adéquate.

On a pour $t \in \llbracket 1, T-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) &= \mathbb{P}(\text{L'individu } i \text{ reçoit au moins une offre intéressante entre } t \text{ et } t+1) \\
 &= \mathbb{P}(N_t^i \geq 1 \wedge \text{Une des } N_t^i \text{ offres propose un salaire } \geq \xi_i) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t^i = k \wedge \text{Une des } k \text{ offres propose un salaire } \geq \xi_i) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t^i = k) \cdot \mathbb{P}(\text{Une des } k \text{ offres propose un salaire } \geq \xi_i) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t^i = k) \cdot (1 - \mathbb{P}(\text{Toutes les } k \text{ offres proposent un salaire } < \xi_i)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) \cdot (1 - F(\xi_i)^k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda F(\xi_i))^k}{k!} \\
 &= e^{-\lambda} (e^\lambda - 1) - e^{-\lambda} (e^{\lambda F(\xi_i)} - 1) \\
 &= 1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}
 \end{aligned}$$

☞ Q2 On a pour $t \in \llbracket 1, T-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_i^* = t+1) &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \wedge T_i > t) \quad \text{car } T_i^* - 1 < T_i \leq T_i^* \\
 &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) \cdot \mathbb{P}(T_i > t) \\
 &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) \cdot (1 - \mathbb{P}(T_i \leq t)) \\
 &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^t \mathbb{P}(T_i^* = k) \right)
 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore, en notant $u_t = \mathbb{P}(T_i^* = t)$ et $\rho = 1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}$

$$u_{t+1} = \rho \left(1 - \sum_{k=1}^t u_k \right)$$

avec $u_1 = \mathbb{P}(T_i^* = 1) = \mathbb{P}(T_i^* = 1 | T_i > 0) = \rho$.

Alors, $u_2 = \rho(1 - \rho)$, puis $u_3 = \rho(1 - \rho - \rho(1 - \rho)) = \rho(1 - \rho)^2$.

Soit donc $t \geq 3$ tel que $\forall t' \leq t, u_{t'} = \rho(1 - \rho)^{t'-1}$; alors

$$\begin{aligned}
 u_{t+1} &= \rho \left(1 - \sum_{t'=1}^t u_{t'} \right) \\
 &= \rho \left(1 - \sum_{t'=1}^t \rho(1 - \rho)^{t'-1} \right) \\
 &= \rho \left(1 - \rho \sum_{t'=0}^{t-1} (1 - \rho)^{t'} \right) \\
 &= \rho \left(1 - \rho \frac{1 - (1 - \rho)^t}{1 - (1 - \rho)} \right) \\
 &= \rho(1 - \rho)^t
 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall t \in \llbracket 1, T-1 \rrbracket$, $u_{t+1} = \rho(1 - \rho)^t$, ce qui s'écrit encore

$$\forall t \in \llbracket 1, T-1 \rrbracket, \mathbb{P}(T_i^* = t+1) = (1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}) e^{\lambda t(F(\xi_i)-1)}$$

Autre méthode : On a directement pour $t \in \llbracket 1, T-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_i^* = t+1) &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \wedge T_i > t) \quad \text{car } T_i^* - 1 < T_i \leq T_i^* \\
 &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) \cdot \mathbb{P}(T_i > t) \\
 &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} \mathbb{P}(T_i > j+1 | T_i > j) \right) \\
 &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} (1 - \mathbb{P}(T_i \leq j+1 | T_i > j)) \right) \\
 &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 | T_i > t) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} (1 - \mathbb{P}(T_i^* = j+1 | T_i > j)) \right) \\
 &= (1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} (e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}) \right) \\
 &= (1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}) e^{\lambda t(F(\xi_i)-1)}
 \end{aligned}$$

Les comportements des individus étant censément indépendants, les variables $(T_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont statistiquement indépendantes et par conséquent

$$L_{T_1^*, \dots, T_n^*}(t_1, \dots, t_n; F, \lambda) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}) e^{\lambda(F(\xi_i)-1) \cdot (t_i-1)} \mathbb{1}_{\min_i t_i \geq 1}$$

☞ Q3 Soit $(t_1, \dots, t_n) \in \llbracket 1, T \rrbracket^n$, et soit $\phi : \begin{pmatrix} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \eta & \mapsto & (1 - \eta)^n \eta^{\sum_{i=1}^n (t_i-1)} \end{pmatrix}$.

Alors $\ln \phi$ est C^∞ , et de dérivée $\frac{\partial \ln \phi}{\partial \eta}(\eta) = -\frac{n}{1-\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n (t_i - 1)$; donc elle est maximale $\hat{\eta} = 1 - \frac{1}{\bar{t}}$ où $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$.

Or $L_{T_1^*, \dots, T_n^*}(t_1, \dots, t_n; F, \lambda) = \phi(e^{\lambda(F(\xi)-1)})$, donc par conséquent $\hat{\lambda}$ vérifie $e^{\hat{\lambda}(F(\xi)-1)} = \hat{\eta} = 1 - \frac{1}{t}$, c'est-à-dire

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{1-F(\xi)} \ln\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)$$

On a d'après la loi de grands nombres

$$\begin{aligned} \lim_{p.s., n \rightarrow \infty} \bar{T} &= \mathbb{E}(T_i^*) \\ &= \sum_{t=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i^* = t) \cdot t \\ &= \sum_{t=1}^{+\infty} (1-a)ta^{t-1}, \text{ en notant } a = e^{\lambda(F(\xi)-1)} \\ &= (1-a) \cdot \left(\begin{array}{l}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{t=1}^{+\infty} tx^{t-1} \end{array} \right) (a) \\ &= (1-a) \cdot \frac{\partial (x \mapsto \sum_{t=0}^{+\infty} x^t)}{\partial x} (a), \text{ car la série converge absolument sur le disque ouvert} \\ &= (1-a) \cdot \frac{\partial (x \mapsto \frac{1}{1-x})}{\partial x} (a) \\ &= (1-a) \cdot \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= \frac{1}{1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}} \end{aligned}$$

Remarque : Pour calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} P(k)t^k$, il suffit de décomposer le polynôme $P(\mathbb{X})$ dans la base $1, \mathbb{X} - 1, (\mathbb{X} - 1)(\mathbb{X} - 2), \dots$ ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)t^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^d \alpha_i \underbrace{(k-1) \cdots (k-i)}_{i \text{ termes}} \right) t^k \\ &= \sum_{i=0}^d \sum_{k=i}^{+\infty} \alpha_i \frac{\partial^i (x \mapsto x^k)}{\partial x^i} (t) \\ &= \sum_{i=0}^d \alpha_i \frac{\partial^i (x \mapsto \frac{1}{1-x})}{\partial x^i} (t) \\ &= \sum_{i=0}^d \alpha_i \frac{(-1)^i i!}{(1-t)^{i+1}} \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &\xrightarrow[p.s.]{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-F(\xi)} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{1-e^{\lambda(F(\xi)-1)}} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{1-F(\xi)} \ln \left(1 + \frac{1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}} \right) \\ &= \frac{1}{1-F(\xi)} \ln \left(\frac{1}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}} \right) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\hat{\lambda}$ est un estimateur convergent de λ .

Cherchons enfin la loi limite de $(\hat{\lambda} - \lambda)$; pour ce faire cherchons tout d'abord celle de $(\bar{T} - \mathbb{E}(\bar{T}))$. On a, en notant $a = e^{\lambda(F(\xi)-1)}$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T_i^*) &= \mathbb{E}(T_i^{*2}) - \mathbb{E}(T_i^*)^2 \\ &= (1-a) \sum_{t=1}^{+\infty} t^2 a^{t-1} - \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= (1-a) \left(a \sum_{t=2}^{+\infty} t(t-1)a^{t-2} + \sum_{t=1}^{+\infty} ta^{t-1} \right) - \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= (1-a) \left(a \frac{2}{(1-a)^3} + \frac{1}{(1-a)^2} \right) - \frac{1}{(1-a)^2}, \text{ car les séries convergent absolument} \\ &= \frac{1+a}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= \frac{a}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

D'après le Théorème Central Limite on a donc

$$\sqrt{n} \left(\bar{T} - \frac{1}{1-a} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{a}{(1-a)^2} \right)$$

donc d'après le théorème de Slutsky

$$\sqrt{n} (\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{a}{(1-a)^2} \cdot g' \left(\frac{1}{1-a} \right)^2 \right)$$

où $g : \left(\begin{array}{l}]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-F(\xi)} \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \end{array} \right)$.

On a $\forall x, g'(x) = \frac{1}{1-F(\xi)} \frac{1}{x(x-1)}$ et donc $g' \left(\frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{1-F(\xi)} \frac{(1-a)^2}{a}$ de sorte que finalement

$$\sqrt{n} (\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{(1-F(\xi))^2} \frac{(1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)})^2}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}} \right)$$

☞ Q4 On a pour $t \in \llbracket 1, T-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} "T_i^{**} = t + 1" &= \begin{cases} "T_i^* = t + 1" & \text{si } "T_i^* \leq T" \\ "T + 1 = t + 1" & \text{si } "T_i^* > T" \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{soit } "T_i^* \leq T \text{ et } T_i^* = t + 1" \\ \text{soit } "T_i^* > T \text{ et } T + 1 = t + 1" \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{soit } "t + 1 \leq T \text{ et } T_i^* = t + 1" \\ \text{soit } "T_i^* = T + 1 \text{ et } T + 1 = t + 1" \\ \text{soit } "T_i^* = T + 1 \text{ et } T + 1 > t + 1" \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{soit } "t + 1 \leq T \text{ et } T_i^* = t + 1" \\ \text{soit } "T_i^* = t + 1 \text{ et } T + 1 = t + 1" \\ \text{soit } "T_i^* = T + 1 \text{ et } T + 1 > t + 1" \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(T_i^{**} = t + 1) = \begin{cases} \mathbb{P}(T_i^* = t + 1) & \text{si } t + 1 \leq T \\ \mathbb{P}(T_i^* > T) & \text{si } t + 1 = T + 1 \\ 0 & \text{si } t + 1 > T + 1 \end{cases}$$

Or $\mathbb{P}(T_i^* = t + 1) = (1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}) e^{\lambda t(F(\xi)-1)}$; et par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i^* > T) &= \sum_{\tau=T+1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_i^* = \tau) \\ &= \sum_{\tau=T}^{+\infty} (1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}) (e^{\lambda(F(\xi)-1)})^\tau \\ &= e^{\lambda(F(\xi)-1) \cdot T} \end{aligned}$$

En conséquence on a

$$\begin{aligned} &L_{T_1^{**}, \dots, T_n^{**}}(t_1 + 1, \dots, t_n + 1; F, \lambda) \\ &= \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(T_i^{**} = t_i + 1) \\ &= (\prod_{t_i+1 \leq T} \mathbb{P}(T_i^* = t_i + 1)) \cdot (\prod_{t_i+1 > T} \mathbb{P}(T_i^* > T) \mathbf{1}_{t_i+1=T+1}) \\ &= (\prod_{t_i+1 \leq T} (1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}) e^{\lambda t_i(F(\xi)-1)}) \left(\prod_{t_i \geq T} (e^{\lambda(F(\xi)-1)})^T \cdot \mathbf{1}_{t_i+1=T+1} \right) \\ &= \left((1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)})^{|\{i/t_i+1 \leq T\}|} \cdot (e^{\lambda(F(\xi)-1)})^{\sum_{t_i+1 \leq T} t_i} \right) \left((e^{\lambda(F(\xi)-1)})^{\sum_{t_i \geq T} t_i} \right) \\ &= \left((1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)})^{|\{i/t_i < T\}|} \right) \left((e^{\lambda(F(\xi)-1)})^{\sum_{i, t_i} t_i} \right) \\ &= \left((1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)})^{|\{i/t_i < T\}|} \right) \left((e^{\lambda(F(\xi)-1)})^{n\bar{t}} \right) \end{aligned}$$

On en tire que

$$\frac{\partial \ln L_{T_1^{**}, \dots, T_n^{**}}(t_1, \dots, t_n; F, \lambda)}{\partial \lambda} = - \frac{|\{i/t_i < T\}|}{1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}} + \frac{n(\bar{t} - 1)}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}}$$

de sorte que

$$e^{\widehat{\lambda(F(\xi)-1)}} = \frac{n(\bar{t} - 1)}{|\{i/t_i < T\}| + n(\bar{t} - 1)}$$

et donc

$$\widehat{\lambda^{censure}} = \frac{1}{F(\xi)-1} \ln \left(\frac{n(\bar{t}-1)}{|\{i/t_i < T\}| + n(\bar{t}-1)} \right)$$

Comme en l'absence de censure ($T = +\infty$) on a $\hat{\lambda} = \frac{1}{F(\xi)-1} \ln(1 - \frac{1}{\bar{t}})$ on a

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda^{censure}} - \hat{\lambda} &= \frac{1}{F(\xi) - 1} \left(\ln \left(\frac{\bar{t} - 1}{\frac{|\{i/t_i < T\}|}{n} + \bar{t} - 1} \right) - \ln \left(\frac{\bar{t} - 1}{\bar{t}} \right) \right) \\ &= - \frac{1}{F(\xi) - 1} \ln \left(1 + \frac{|\{i/t_i < T\}|}{n} \right) \end{aligned}$$

☞ Q5 La vraisemblance s'écrit cette fois

$$L_{T_1^{**}, \dots, T_n^{**}}(t_1, \dots, t_n; \gamma, \lambda) = \left(1 - e^{-\lambda e^{\gamma(\xi - \xi_0)}}\right)^n \left(e^{-\lambda e^{\gamma(\xi - \xi_0)}}\right)^{n\bar{t}} \mathbf{1}_{\xi \geq \xi_0}$$

On constate alors que $\phi : ((\lambda, \gamma) \mapsto \lambda r^\gamma)$ n'est jamais injective (car $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}, \phi(1, 1) = r = \phi(\frac{1}{2}, \sqrt{r})$), de sorte que la vraisemblance $((\lambda, \gamma) \mapsto L_{T_1^{**}, \dots, T_n^{**}}(t_1, \dots, t_n; \gamma, \lambda))$ ne l'est pas non plus, de sorte que le paramètre (λ, γ) n'est pas identifiable. D'où l'intérêt des calculs précédents...

*
* *

Enoncé de l'exercice 3

■ Partie 1 Préliminaire

☞ Q1 On rappelle que la loi exponentielle de paramètre λ admet la densité $f(y, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Soient n variables aléatoires $Y_1 \dots Y_n$ i.i.d. de densité $f(\cdot, \lambda)$.

Montrer que $\sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi de densité $\lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y)$ (on pourra commencer par le montrer pour $n = 2$ puis procéder par récurrence).

Dans tout le problème, Z_i et C_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ désignent des variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$.

■ **Partie 2 Observation parfaite**

On dispose d'un échantillon d'observations $(z_i, c_i)_{i \in [1, n]}$

- ☞ Q1 Ecrire le modèle statistique correspondant.
S'agit-il d'une famille exponentielle? Si oui, peut-on exhiber une statistique exhaustive?
- ☞ Q2 Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \end{pmatrix}$ du paramètre $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$?
- ☞ Q3 Déterminer la loi asymptotiquement de $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \end{pmatrix}$.
- ☞ Q4 Déterminer la loi (à distance finie) de $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \end{pmatrix}$.
Est-il biaisé à distance finie?
Calculer sa matrice de variance-covariance.
- ☞ Q5 Proposer des estimateurs sans biais optimaux de λ et μ , si possible efficaces.

■ **Partie 3 Observation imparfaite**

On suppose dans cette seconde partie que les seules observations disponibles portent sur $X_i = \text{Min}(Z_i, C_i)$, $i = 1, \dots, n$.

- ☞ Q1 Calculer la fonction de répartition de la variable X_i pour $i \in [1, n]$
- ☞ Q2 Ecrire le modèle statistique correspondant et déterminer les fonctions identifiables du paramètre $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.
- ☞ Q3 Quels sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de $\gamma = \lambda + \mu$ fondés :
i) sur $(X_i)_{i \in [1, n]}$;
ii) sur $(Z_i, C_i)_{i \in [1, n]}$?
Est-il naturel que ces estimateurs soient différents?
- ☞ Q4 Comparer les propriétés asymptotiques de ces estimateurs.

■ **Partie 4 Conclusion**

- ☞ Q1 Dédurre des parties I et II l'expression de l'espérance conditionnelle

$$E \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \min(Z_i, C_i)} \middle| \sum_{i=1}^n Z_i, \sum_{i=1}^n C_i \right)$$

Corrigé de l'exercice 3

- ☞ Q1 L'assertion est triviale lorsque $n = 1$.

Soit donc $n \geq 1$ tel que l'assertion soit vraie.

Soient Y_1, \dots, Y_{n+1} i.i.d. de densité $f_{\mathcal{E}}(\cdot, \lambda)$.

Définissons pour $k \in [1, n+1]$ $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i$.

Constatant que $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$, définissons $\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*2} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \times]0, 1[\\ (x, y) & \mapsto & (x + y, \frac{x}{x+y}) \end{pmatrix}$. Alors ϕ

est un C^∞ -difféomorphisme, de jacobien $\left| \begin{pmatrix} y & x \\ 1-y & x \end{pmatrix}^{-1} \right| = \frac{1}{x}$.

Or $L_{S_n, Y_{n+1}}(s, y) = \left(\lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} \mathbf{1}_{s>0} \right) \cdot \left(\lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{y>0} \right)$, par hypothèse de récurrence et puisque S_n et Y_{n+1} sont indépendantes (car les $(Y_i)_i$ sont toutes indépendantes).

En conséquence, puisque $\phi^{-1}(u, v) = (uv, u(1-v))$, $L_{\phi(S_n, Y_{n+1})}(u, v) = \lambda^{n+1} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0}$.

En particulier d'après le théorème de projection $L_{(\phi(S_n, Y_{n+1}))_1}(u) = \lambda^{n+1} \frac{u^n}{n!} e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0}$, c'est-à-dire

$$L_{Y_1+\dots+Y_{n+1}}(u) = \lambda^{n+1} \frac{u^n}{n!} e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0}$$

de sorte que l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- ☞ Q1 Le modèle statistique s'écrit $\left\{ \left(\mathbb{R}^{+2} \right)^n, (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E})^{\otimes n} \right\}$.

On a de plus pour $i \in [1, n]$ $L_{Z_i, C_i}(z_i, c_i; \lambda, \mu) = \lambda \mu e^{-\lambda z_i - \mu c_i}$, et donc

$$L_{Z_1, \dots, Z_n, C_1, \dots, C_n}(z_1, \dots, z_n, c_1, \dots, c_n; \lambda, \mu) = (\lambda \mu)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n z_i - \mu \sum_{i=1}^n c_i} \mathbf{1}_{\min_i z_i \geq 0} \mathbf{1}_{\min_i c_i \geq 0}$$

En particulier le modèle est exponentiel et une statistique exhaustive est

$$(z_1, \dots, z_n, c_1, \dots, c_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n z_i, \sum_{i=1}^n c_i \right)$$

- ☞ Q2 On a immédiatement $\frac{\partial \ln L_{Z_1, \dots, Z_n, C_1, \dots, C_n}}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n z_i$, et par suite un estimateur de λ et $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n z_i}$ (la log-vraisemblance étant concave, elle est bien maximale en \bar{z}). De même un estimateur de μ et $\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{c}}$.
- ☞ Q3 On calcule successivement

$$\frac{\partial^2 \ln L_{Z_1, \dots, Z_n, C_1, \dots, C_n}}{\partial \lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_{Z_1, \dots, Z_n, C_1, \dots, C_n}}{\partial \lambda \partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_{Z_1, \dots, Z_n, C_1, \dots, C_n}}{\partial \mu^2} = \frac{n}{\mu^2}$$

de sorte que $I_1(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2} \end{pmatrix}$ d'inverse $I_1(\lambda, \mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$ et donc d'après le Théorème Central Limite

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \widehat{\lambda} - \lambda \\ \widehat{\mu} - \mu \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \right)$$

Q4 Déterminons la loi de $\widehat{\lambda}$: soit donc $h : (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ mesurable bornée, et calculons $\mathbb{E} (h(\widehat{\lambda}))$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (h(\widehat{\lambda})) &= \mathbb{E} \left(h \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n z_i} \right) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h \left(\frac{n}{s} \right) \lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{s>0} ds \\ &= - \int_{0^+}^{+\infty} h(u) \lambda^n \frac{\left(\frac{n}{u}\right)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda \frac{n}{u}} \mathbb{1}_{u>0} \left(-\frac{n}{u^2}\right) du \end{aligned}$$

En conséquence, $L_{\widehat{\lambda}}(u) = \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{n}{u}\right)^{n+1} e^{-\lambda \frac{n}{u}} \mathbb{1}_{u>0}$.

De façon similaire, $L_{\widehat{\mu}}(v) = \frac{\mu^n}{n!} \left(\frac{n}{v}\right)^{n+1} e^{-\mu \frac{n}{v}} \mathbb{1}_{v>0}$.

Ainsi,

$$L_{\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}}(l, m) = \frac{(\lambda \mu)^n}{(n!)^2} \left(\frac{n^2}{lm}\right)^{n+1} e^{-n \frac{\lambda}{l} - n \frac{\mu}{m}}$$

Par ailleurs on a pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\widehat{\lambda}) &= \int_{\mathbb{R}} l \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{n}{l}\right)^{n+1} e^{-\lambda \frac{n}{l}} \mathbb{1}_{l>0} dl \\ &= \int_{0^+}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \left(\frac{n}{l}\right)^n e^{-\lambda \frac{n}{l}} \\ &= \int_{0^+}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-2} e^{-\lambda u} n du \\ &= \frac{n \lambda}{(n-1)} \int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \lambda^{n-2} u^{n-2} e^{-\lambda u} \lambda du \\ &= \frac{n \lambda}{(n-1)} \underbrace{\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} v^{n-2} e^{-v} dv}_{\int_{0^+}^{+\infty} f_{\Gamma(n-2, \lambda)}(v) dv = 1} \\ &= \frac{n}{n-1} \lambda \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathbb{E} \left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda} \\ \widehat{\mu} \end{pmatrix} \right) = \frac{n}{n-1} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $\begin{pmatrix} \widehat{\lambda} \\ \widehat{\mu} \end{pmatrix}$ est biaisé à distance finie.

Enfin pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\widehat{\lambda}^2) &= \int_{\mathbb{R}} l^2 \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{n}{l}\right)^{n+1} e^{-\lambda \frac{n}{l}} \mathbb{1}_{l>0} dl \\ &= - \int_{0^+}^{+\infty} \left(\frac{n}{u}\right)^2 \frac{\lambda^n}{n!} u^{n+1} e^{-\lambda u} \left(-\frac{n}{u^2}\right) du \\ &= \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)(n-2)} \int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} \lambda^{n-3} u^{n-3} e^{-\lambda u} \lambda du \\ &= \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)(n-2)} \underbrace{\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} v^{n-3} e^{-v} dv}_{\int_{0^+}^{+\infty} f_{\Gamma(n-3, \lambda)}(v) dv = 1} \\ &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \lambda^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{V} (\widehat{\lambda}) &= \mathbb{E} (\widehat{\lambda}^2) - \mathbb{E} (\widehat{\lambda})^2 \\ &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \lambda^2 - \left(\frac{n}{n-1} \lambda\right)^2 \\ &= \frac{n^2(n-1) - (n-2)n^2}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 \\ &= \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 \end{aligned}$$

(on vérifie que l'e.m.v. est asymptotiquement efficace : $\mathbb{V} (\widehat{\lambda}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \lambda^2$).

Autre méthode (plus rapide) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\widehat{\lambda}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{s} \lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{n}{n-1} \lambda \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1} \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{n}{n-1} \lambda \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1} \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda s} ds}_{f_{\Gamma(n-1, \lambda)}(s)} \\ &= \frac{n}{n-1} \lambda \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\widehat{\lambda}^2) &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-2} \frac{s^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \lambda^2 \end{aligned}$$

Enfin, remarquant que toutes les $Z_1, \dots, Z_n, C_1, \dots, C_n$ sont indépendantes, on a $\text{Cov}(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = 0$ de sorte que

$$\mathbb{V} \left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda} \\ \widehat{\mu} \end{pmatrix} \right) = \frac{n^2}{n-1} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

☞ Q5 Posons $\widehat{\lambda}^* = \frac{n-1}{n} \widehat{\lambda}$ et $\widehat{\mu}^* = \frac{n}{n-1} \widehat{\mu}$.

D'après le résultat précédent, $\begin{pmatrix} \widehat{\lambda}^* \\ \widehat{\mu}^* \end{pmatrix}$ est un estimateur sans biais de $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. Or $T(Z, C) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i \right)$ est une statistique exhaustive complète (car canonique dans un modèle exponentielle); en conséquence, d'après le théorème de Lehman-Scheffé, $\begin{pmatrix} \widehat{\lambda}^* \\ \widehat{\mu}^* \end{pmatrix}$ est optimal parmi les estimateurs sans biais de $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda}^* \\ \widehat{\mu}^* \end{pmatrix} \right) &= \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \text{Cov} \left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda} \\ \widehat{\mu} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{n-2} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or la borne FDCR du modèle est $\frac{1}{n} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$.

En conséquence, $\begin{pmatrix} \widehat{\lambda}^* \\ \widehat{\mu}^* \end{pmatrix}$ n'est **pas** un estimateur efficace de $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.

On suppose dans cette seconde partie que les seules observations disponibles portent sur $X_i = \text{Min}(Z_i, C_i)$, $i = 1, \dots, n$.

☞ Q1 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i > t) &= \mathbb{P}(Z_i > t \wedge C_i > t) \\ &= \mathbb{P}(Z_i > t) \cdot \mathbb{P}(C_i > t) \quad \text{par indépendance} \\ &= \left(\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \right) \left(\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\mu v} dv \right) \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned}$$

de sorte que $X_i \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda + \mu)$.

☞ Q2 Le modèle statistique s'écrit ici $\{\mathbb{R}^{+n}, \mathcal{E}^{\otimes n}\}$.

Sa vraisemblance étant $L_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \lambda, \mu) = (\lambda + \mu)^n e^{-(\lambda+\mu) \sum_{i=1}^n x_i}$, la seule fonction identifiable de (λ, μ) est $\lambda + \mu$.

☞ Q3 Cherchons à estimer $\gamma = \lambda + \mu$.

- (i) La maximisation de $L_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \gamma) = (\gamma)^n e^{-(\gamma) \sum_{i=1}^n x_i}$ conduit à l'estimateur $\widehat{\gamma}_X = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \min(z_i, c_i)}$;
- (ii) tandis que celle de $L_{Z_1, \dots, Z_n, C_1, \dots, C_n}(z_1, \dots, z_n, c_1, \dots, c_n; \lambda, \mu)$ conduit à estimer λ et μ individuellement, ce dont on tire une estimation convergente de $\lambda + \mu$, à savoir $\widehat{\gamma}_{Z,C} = \widehat{\lambda} + \widehat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sum_{i=1}^n Z_i} + \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{\sum_{i=1}^n C_i}$.

Bien entendu il n'y a aucune raison pour que ces estimateurs, fondés sur des observations différentes (c'est-à-dire, en définitive, définis dans des modèles statistiques différents), soient les mêmes. Comme il est montré ci-après ils ont même des variances asymptotiques différentes.

☞ Q4 On a alternativement

- (i) $\frac{\partial \ln L_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n x_i$,
 puis $\frac{\partial^2 \ln L_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \gamma)}{\partial \gamma^2} = -\frac{n}{\gamma^2}$,
 donc

$$\sqrt{n}(\widehat{\gamma}_X - \gamma) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(O, (\lambda + \mu)^2)$$

- (ii) Soit $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*2} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*2} \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, y) \end{pmatrix}$ qui est de classe C^∞ , et de jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. AL d'après le théorème de Slutsky

$$\sqrt{n} \left(g \left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda} \\ \widehat{\mu} \end{pmatrix} \right) - g \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right) \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial g}{\partial(x,y)}(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial(x,y)}(\lambda, \mu) \right)$$

En particulier selon la première composante,²

$$\sqrt{n}(\widehat{\gamma}_{Z,C} - \gamma) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(O, \lambda^2 + \mu^2)$$

On constate que $(\lambda + \mu)^2 \geq \lambda^2 + \mu^2$, avec égalité ssi $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$ (situations dégénérées sans intérêt). Autrement dit, asymptotiquement $\widehat{\gamma}_{Z,C}$ est préférable à $\widehat{\gamma}_X$, ce que l'on écrira sous la forme publicitaire

$$\widehat{\lambda} + \widehat{\mu} \gg \widehat{\lambda} + \widehat{\mu}$$

Ce résultat est bien-sûr naturel dans la mesure où le premier estimateur est fondé sur une information plus fine que le second.

☞ Q1 Pour calculer $\mathbb{E} \left(\frac{1}{X_1 + \dots + X_n} \mid Z_1 + \dots + Z_n, C_1 + \dots + C_n \right)$, il semble naturel de déterminer tout d'abord

$$\begin{aligned} &L_{X_1 + \dots + X_n \mid Z_1 + \dots + Z_n, C_1 + \dots + C_n} \\ &= \frac{L_{X_1 + \dots + X_n, Z_1 + \dots + Z_n, C_1 + \dots + C_n}}{L_{Z_1 + \dots + Z_n, C_1 + \dots + C_n}} \end{aligned}$$

²Il n'est pas nécessaire pour pratiquer la delta méthode que g soit inversible, et il aurait suffi ici de considérer $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*2} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{pmatrix}$.

La difficulté ici est que X_i n'est **pas** indépendante de (Z_i, C_i) , puisque $X_i = \min(Z_i, C_i)$, ce qui complique singulièrement le calcul.

En fait, le résultat s'exprime très simplement et peut être démontré de la façon suivante, astucieuse quoique moins naturelle.

Notons en effet $\hat{\theta} = \mathbb{E} \left(\frac{1}{X_1 + \dots + X_n} \mid Z_1 + \dots + Z_n = z, C_1 + \dots + C_n = c \right)$; alors d'après la partie

II $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais de $\frac{\lambda + \mu}{n-1}$. La statistique en $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ étant régulière (car le modèle est exponentiel), d'après le théorème de Lehman-Scheffé $\hat{\theta}$ est en outre optimal.

Mais d'après la partie **I**, $\frac{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}{n}$ est un autre estimateur sans biais de $\frac{\lambda + \mu}{n-1}$, lui aussi optimal.

En conséquence, $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta} - \frac{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}{n}$ sont décorréllés, ainsi que $\frac{\hat{\lambda}}{n}$ et $(\hat{\theta} - \frac{\hat{\mu}}{n}) - \frac{\hat{\lambda}}{n}$, et que $\frac{\hat{\mu}}{n}$ et $(\hat{\theta} - \frac{\hat{\lambda}}{n}) - \frac{\hat{\mu}}{n}$, et ce en vertu du lemme suivant :

Si \hat{a} et \hat{b} sont deux estimateurs sans biais optimaux du même paramètre, alors $\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a} - \hat{b}) = 0$

En effet, définissons pour $t \in \mathbb{R}$ $c_t = (1-t)\hat{a} + t\hat{b} = \hat{a} + t(\hat{b} - \hat{a})$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{V}(c_t) \geq \mathbb{V}(\hat{b})$ puisque \hat{b} est optimal;

ceci s'écrit $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{V}(\hat{a}) + 2t\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b} - \hat{a}) + t^2\mathbb{V}(\hat{b} - \hat{a})$ qui est une inégalité polynômiale en t qui de celui-ci est négatif ou nul, ce dont on tire le résultat.

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\hat{\theta}) &= \mathbb{V}\left(\frac{\hat{\lambda}}{n}\right) + \mathbb{V}\left(\frac{\hat{\mu}}{n}\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\frac{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}{n}\right) \quad \text{car } \hat{\lambda} \text{ et } \hat{\mu} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les deux estimateurs $\hat{\theta}$ et $\frac{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}{n}$ qui ont même espérance, même variance et sont exactement corrélés, sont égaux presque sûrement :³

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}{n} \text{ p.s.}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \min(Z_i, C_i)} \mid \sum_{i=1}^n Z_i \wedge \sum_{i=1}^n C_i \right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n Z_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad \text{p.s.}$$

³Ce résultat est généralement connu comme l'*unicité presque sûre* d'un estimateur optimal fonction d'une statistique totale.

★
★ ★