



Cursus Intégré  
2004-2005

Rappels de statistique mathématique  
*Réponses question par question des travaux  
dirigés n° 7*

Guillaume Lacôte  
Bureau **E03**

✉ [Guillaume.Lacote@ensae.fr](mailto:Guillaume.Lacote@ensae.fr)

☞ <http://ensae.no-ip.com/SE222/>

Exercice corrigé	1
------------------	---

Pour étudier l'arrivée des appels dans un central téléphonique, on comptabilise lors de 200 observations consécutives, le nombre d'appels observés par seconde, ce qui produit les résultats suivants :

Nombre d'appels par seconde	Effectifs observés
0	6
1	15
2	40
3	42
4	37
5	30
6	10
7	9
8	5
9	3
10	2
11	1

On suppose les arrivées des appels indépendantes, et en outre que la probabilité élémentaire  $\lambda dt$  qu'il arrive un appel entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est indépendante de la date  $t$ .

Autrement dit

- le nombre  $N_t$  d'appels observés sur l'intervalle de temps  $[0, t]$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .
- plus généralement  $N_{t+s} - N_t$  est indépendant de  $N_t$  et suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda s$ .

☞ Q1

- |                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------|
| (a) Tester l'adéquation de la loi empirique à la famille des lois de Poisson. |
|-------------------------------------------------------------------------------|

Rappel :

Essentiellement, si  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \stackrel{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}$  loi discrète sur  $\llbracket 1, m \rrbracket$ , et si  $p_k = \mathbb{P}(X_i = k)$  et  $N_k = |\{i / X_i = k\}|$  est le nombre de réalisations de  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , alors (en appliquant le Théorème Central Limite centré réduit à  $(N_1, \dots, N_m)$  puis en l'"élevant au carré") on a

$$\xi_n^{\text{adéq}} = \sum_{k=1}^m \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \chi_{m-1}^2$$

(cf cours de Paul Doukhan, théorème 9.2) On en déduit une région de test asymptotique de niveau  $\alpha \in ]0, 1[$  :  $W_n^{\text{adéq}} = \{\xi_n^{\text{adéq}} > q_{1-\alpha}^{\chi_{m-1}^2}\}$ . A distance finie on s'assurera avant d'appliquer ce test asymptotique que  $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, np_k > 5$ , quitte à fusionner plusieurs classes : cette condition est requise pour que l'approximation d'une binômiale en normale soit raisonnable. Enfin, dans le cas d'une loi continue on se ramènera au cas précédent en discrétisant l'espace des réalisations en  $m$  classes.

*Pourquoi ne pas utilise le test de Kolmogorov-Smirnov ? (cf théorème 9.3)*

D'une certaine façon ce test se fonde sur la distance en  $\| \cdot \|_\infty$  tandis que le test du  $\chi^2$  se fonde sur la distance en  $\| \cdot \|_2$  entre la loi théorique et la loi empirique. De plus, ce test utilise une statistique dont on ne sait pas exprimer la loi limite (mais on sait la tabuler) ; à l'inverse le test du  $\chi^2$  utilise une statistique dont la loi limite est bien connue mais nécessite de discrétiser l'univers continu en classes ce qui introduit une erreur. De toute façon ce test est inapplicable ici car la loi de Poisson est discrète, tandis que le test du  $\chi^2$  est bien adapté.

Pour tester l'adéquation à une famille de lois paramétrée, une idée naturelle est de tester l'adéquation simple à la loi la plus vraisemblable, c'est-à-dire à la loi dont le paramètre est l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Considérons donc le modèle statistique  $(\mathbb{N}^{200}, \tau, (\mathcal{P}(\lambda)^{\otimes 200})_{\lambda \in \mathbb{R}^{+*}})$ . Dans ce modèle la vraisemblance s'écrit  $L_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$  et l'estimateur du maximum de vraisemblance est donc  $\hat{\lambda} = \bar{X}$  ; on a numériquement

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{6 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 42 \cdot 3 + 37 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 11}{200} \\ &\simeq 3,7 \end{aligned}$$

En conséquence, si la famille  $(X_i)_i$  suivait bien une loi de Poisson, celle-ci serait de paramètre  $\hat{\lambda} \simeq 3,7$  et par conséquent on aurait

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0, 11 \rrbracket, \hat{p}_k &= \mathbb{P}_{\hat{\lambda}}(X_i = k) \\ &= e^{-\hat{\lambda}} \frac{\hat{\lambda}^k}{k!} \\ &\simeq e^{-3,7} \frac{3,7^k}{k!} \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à pratiquer un test d'adéquation simple à la loi  $\mathcal{P}(\hat{\lambda})$ .

Pour ce faire, afin de préserver la légitimité du test asymptotique à distance finie on s'assure que  $\forall k \in \llbracket 0, 11 \rrbracket, N_k < 5$ , ce qui conduit à fusionner les quatre dernières modalités selon le tableau suivant :

Modalité	Effectif observé
$X_i = 0$	$N_0 = 6$
$X_i = 1$	$N_1 = 15$
$X_i = 2$	$N_2 = 40$
$X_i = 3$	$N_3 = 42$
$X_i = 4$	$N_4 = 37$
$X_i = 5$	$N_5 = 30$
$X_i = 6$	$N_6 = 10$
$X_i = 7$	$N_7 = 9$
$X_i \geq 8$	$N_8 = 11$

Par conséquent  $\xi_{200}^{\text{adéq}} = \sum_{k=0}^8 \frac{(N_k - n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k} \simeq 7,58$ . Or si  $(X_i)_i$  suit bien une certaine loi de poisson, alors  $\xi_{200}^{\text{adéq}}$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $(9 - 1) - \dim(\mathbb{R}^{+*}) = 7$  degrés de liberté

(puisque'on n'a conservé que 9 classes). Le fractile de niveau 5% valant  $q_{95\%}^{\chi_7^2} \simeq 14,1$ , on **accepte** finalement au seuil 5% l'hypothèse d'adéquation de la vrai loi inconnue de  $(X_i)_i$  à la famille des lois de Poisson ; on peut en outre affirmer que  $(X_i)_i$  suit vraisemblablement une loi de Poisson de paramètre 3, 7.

(b) Quel est le niveau limite permettant d'accepter l'adéquation à la loi de Poisson ?

Le niveau limite entre l'acceptation et le rejet de l'hypothèse pour l'échantillon observé est par définition la *p-value*, qui est telle que  $\xi_{200}^{\text{adéq}} = q_{p\text{-value}}^{\chi_7^2}$  ; on a ici *p-value*  $\simeq 19\%$ , ce qui est assez élevé : l'hypothèse est rejetée au seuil 20%, mais acceptée à tout niveau  $\alpha \leq 18\%$ .

Q2

A une date antérieure le nombre d'appels sur un intervalle de temps  $[0, t]$  suivait une loi de Poisson de paramètre 4.

Tester la stabilité du comportement entre les deux dates.

On cherche cette fois à tester l'adéquation simple de la loi des  $(X_i)_i$  à la loi de Poisson de paramètre 4.

De la même façon que dans le cas précédent les quatre dernières classes doivent être regroupées, et on calcule successivement  $p_k = e^{-4} \cdot \frac{4^k}{k!}$  pour  $k \in \llbracket 0, 8 \rrbracket$ , puis  $\xi_{200}^{\text{adéq}} = \sum_{k=0}^8 \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \simeq 16,8$ , qui est censée suivre une loi du  $\chi^2$  à  $(9 - 1) = 8$  degrés de liberté (il n'y a pas de paramètre à estimer ici, donc  $\dim(\Theta) = 0$ ). Comme  $q_{99\%}^{\chi_8^2} \simeq 20,09$  on **accepte** l'hypothèse de stabilité au niveau 1%.

Q3

Que donnerait un test d'adéquation à une loi de Poisson de paramètre 3, 7 ? Conclure. Table de la loi de Poisson :

	$\mathbb{P}_{3,7}(X = k)$	$\mathbb{P}_4(X = k)$
0	0.0247	0,0183
1	0.0915	0,0733
2	0.1684	0,1465
3	0.2087	0,1957
4	0.1930	0,1954
5	0.1428	0,1563
6	0.0881	0,1042
7	0.0465	0,0595
8	0.0215	0,0298
9	0.0099	0,0132
10	0.0046	0,0053
11	0.0021	0,0019
12	0.0001	0,0006
13	< 0.0001	0,0002
14	< 0.0001	0,0001

De façon similaire, on reprend  $p_k = e^{-3,7} \frac{3,7^k}{k!}$  pour  $k \in \llbracket 0, 8 \rrbracket$ , ce dont on tire  $\xi_{200}^{\text{adéq}} \simeq 7,58$ , qui est censée suivre une loi du  $\chi^2$  à 8 degrés de liberté (là encore,  $\lambda = 3,7$  est donné a priori et il n’y a pas de paramètre à estimer). Bien évidemment, 3,7 étant la valeur de l’estimateur du maximum de vraisemblance dans le modèle statistique d’une famille de lois de Poisson de paramètre inconnu, à laquelle l’adéquation a déjà été acceptée au niveau  $\alpha$ , l’adéquation simple à la loi de paramètre  $\hat{\lambda} = 3,7$  est **nécessairement** acceptée au même niveau  $\alpha$  puisque  $1 - F_{\chi_8^2}(x) > 1 - F_{\chi_7^2}(x)$  pour tout  $x$ .

En définitive, en notant  $p^{\chi^2}(k)$  la p-value de la loi du  $\chi^2$  à  $k$  degrés de liberté on a :

$\xi_{200}^{\text{adéq}}$	Adéquation à la famille $\mathcal{P}(\lambda)_\lambda$	Adéquation simple à la loi $\mathcal{P}(3,7)$
$[0, q^{\chi^2}(7)[$	acceptée	acceptée
$]q^{\chi^2}(7), q^{\chi^2}(8)[$	rejetée	acceptée
$]q^{\chi^2}(8), +\infty[$	rejetée	rejetée

**Exercice corrigé 2**

On s’intéresse à la proportion des ménages équipés d’un magnétoscope. Pour cela, on tire de manière équiprobable avec remise un échantillon de  $n$  ménages, et on observe pour chaque ménage  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la variable

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si le ménage } i \text{ est équipé} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

☞ Q1 Réaliser un test de l’hypothèse nulle : “la proportion des ménages équipés n’excède pas 20 %”.

Soit  $p$  la vraie probabilité qu’un ménage soit équipé en magnétoscope (on identifiera la proportion de ménages équipés à  $p$ ). On a immédiatement  $\hat{p}(y_1, \dots, y_n) = \bar{y}$ , pour lequel  $\sqrt{n}(\hat{p} - p) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1 - p))$

En appliquant la même méthode que pour l’exercice exercice 3, on montre qu’on accepte  $H_0 : “p \leq p_0 = 20\%”$  ssi  $\bar{y} < k_\alpha$  avec

$$k_\alpha = p_0 + q_{1-\alpha}^{\mathcal{N}(0,1)} \sqrt{\frac{\bar{y}((1 - \bar{y}))}{n}}$$

☞ Q2 On se demande si la probabilité qu’un ménage  $i$  soit équipé n’est pas fonction d’une variable (scalaire)  $x_i$  donnée (revenu, âge du chef de famille...).

On définit à cet effet un modèle statistique conditionnel à  $X_i$  de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(y_i = 1 \mid x_i) = \frac{e^{a+bx_i}}{1 + e^{a+bx_i}}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres réels inconnus.

On cherche alors à tester  $H_0 : b = 0$ .

- (a) Calculer le score et la matrice d'information de Fisher du modèle pour  $n$  observations.

La vraisemblance du modèle s'écrit pour  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$L_{Y_1, \dots, Y_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n}(y_1, \dots, y_n; a, b) = \prod_{i=1}^n \frac{(e^{a+bx_i})^{y_i}}{1 + e^{a+bx_i}}$$

Le score s'écrit donc

$$\frac{\partial L_{Y_1, \dots, Y_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n}}{\partial \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}(y_1, \dots, y_n; a, b) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{e^{a+bx_i}}{1+e^{a+bx_i}} \right) \\ \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{e^{a+bx_i}}{1+e^{a+bx_i}} \right) x_i \end{pmatrix}$$

et l'information de Fisher est donc

$$I_n(a, b) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left( \frac{e^{a+bx_i}}{(1 + e^{a+bx_i})^2} \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ x_i & x_i^2 \end{pmatrix} \right)$$

qu'on ne peut expliciter davantage sans hypothèse sur la distribution de  $(X_i)_i$ .

Expliciter le modèle contraint par  $H_0$ .

- (b) Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance  $\hat{a}^0$  et  $\hat{b}^0$  de  $a$  et  $b$  dans ce modèle, puis évaluer le score en  $(\hat{a}^0, \hat{b}^0)$ .

Sous l'hypothèse  $H_0$  : " $b = 0$ " il vient

$$\forall x_i \in \mathbb{R}, \mathbb{P}_{H_0}(Y_i = 1 | X_i = x_i) = \frac{e^a}{1 + e^a}$$

c'est-à-dire que  $(Y_i | X_i)$  suit une binômiale de paramètre  $p_0 = \frac{e^a}{1+e^a}$  indépendant de  $x_i$ .

La vraisemblance conditionnelle sous  $H_0$  est donc

$$L_{Y_1, \dots, Y_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n}^{H_0}(y_1, \dots, y_n; a, b) = \frac{e^{a \sum_{i=1}^n y_i}}{(1 + e^a)^n}$$

et un estimateur  $\hat{a}^0$  de  $a$  vérifie donc, sous  $H_0$ ,  $\frac{e^{\hat{a}^0}}{1+e^{\hat{a}^0}} = \bar{y}$ , soit  $\hat{a}^0 = \ln \frac{\bar{y}}{1-\bar{y}}$ . On a bien entendu  $\hat{b}^0 = 0$ .

Il vient alors

$$\frac{\partial L_{Y_1, \dots, Y_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n}^{H_0}}{\partial \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}(y_1, \dots, y_n; \hat{a}^0, \hat{b}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) x_i \end{pmatrix}$$

- (c) Donner un estimateur  $\widehat{I}_1^{H_0}$  de  $I_1$ , convergent sous  $H_0$  et fonction des estimateurs contraints des paramètres.

La matrice d'information de Fisher sous  $H_0$  est

$$I_n(a, b) =_{|H_0} \frac{e^a}{(1+e^a)^2} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ x_i & x_i^2 \end{pmatrix} \right)$$

Or  $\frac{e^{\widehat{a}^0}}{1+e^{\widehat{a}^0}} = \bar{y}$ , donc  $\frac{e^{\widehat{a}^0}}{(1+e^{\widehat{a}^0})^2} = \bar{y}(1-\bar{y})$  et par conséquent (en notant  $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ )

$$\widehat{I}_1^{H_0} = \bar{y}(1-\bar{y}) \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{pmatrix}$$

est un estimateur convergent de  $I_1$  si  $H_0$  est vraie.

- (d) Exprimer la statistique du test du score de l'hypothèse  $H_0$ .  
Quelle est sa loi asymptotique sous  $H_0$ ? Sur quelle corrélation repose le test?

On a par définition

$$\xi_n^S = \frac{1}{n} \widehat{S}^0{}' \left( \widehat{I}_1^{H_0} \right)^{-1} \widehat{S}^0$$

en notant  $\widehat{S}^0 = \frac{\partial L_{Y_1, \dots, Y_n | X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}}{\partial (a, b)'} (y_1, \dots, y_n; \widehat{a}^0, \widehat{b}^0)$ .

Or

$$\begin{aligned} \left( \widehat{I}_1^{H_0} \right)^{-1} &=_{|H_0} \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &=_{|H_0} \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} \cdot \frac{1}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\xi_n^S(y_1, \dots, y_n) \\ &=_{|H_0} \frac{1}{n} \left( 0, \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) x_i \right) \times \left( \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} \frac{1}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \begin{pmatrix} \bar{x}^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) x_i \end{pmatrix} \\ &=_{|H_0} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) x_i \right) \cdot \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} \frac{1}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) x_i \right) \\ &=_{|H_0} \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

Par construction, si  $H_0$  est vraie alors

$$\xi_n^S \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

ce qui permet de tester effectivement  $H_0$ .

Remarquons que  $\xi_n^S$  est une fonction de  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  uniquement à travers sa variance et sa covariance avec  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ ; en outre elle est croissante avec cette dernière, comme le suggère l'intuition : dire que la loi de  $Y_i$  conditionnellement à  $X_i$  dépend effectivement de  $X_i$  (ce qui revient à dire " $\neg H_0$ "), c'est dire que les observations  $Y_i$  sont significativement corrélées avec celles de  $X_i$ , et inversement.

### Exercice corrigé 3

Un industriel reçoit  $K$  lots de  $n$  pièces, avec la garantie que la proportion  $p$  de pièces défectueuses est la même dans chaque lot et inférieure à 5%. Pour vérifier que la garantie est exacte, on tire avec remise des pièces dans chaque lot, jusqu'à obtenir une pièce défectueuse par lot. Soit  $Y_k$ , la variable aléatoire désignant le nombre de tirages nécessaires dans le lot  $k$ .

☞ Q1

Calculer la loi de  $Y_k$ .  
Calculer  $\mathbb{E}(Y_k)$  et  $\mathbb{V}(Y_k)$ .

Dans la pratique la variable  $Y_k$  est tronquée, c'est-à-dire l'opérateur n'attend pas plus de  $N \geq 1$  tirages successifs qu'une pièce soit défectueuse. Les calculs pourraient être menés directement dans le cas où  $N = +\infty$ , ce qui revient à supprimer tous les termes en facteur de " $x^N$ " dans les lignes qui suivent.

On a pour  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  et  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , en notant  $M = \sum_{n=N+1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_k = n) &= \mathbb{P}(\text{"Les } n-1 \text{ premières pièces tirées sont conformes et la } n\text{-ième est défectueuse"}) \\ &= \frac{1}{M} (1-p)^{n-1} \cdot p \quad (\text{le tirage s'effectue avec remise}) \end{aligned}$$

Le tirage s'effectuant avec remise, le nombre de tirages nécessaires  $n$  pour obtenir une pièce défectueuse n'est pas borné (avec toutefois  $\mathbb{P}(n = +\infty) = 0$ ).



$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_k) &= \sum_{n=0}^N n\mathbb{P}(Y_k = n) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^N np(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{1}{M} p \sum_{n=0}^N \left( \frac{\partial}{\partial x} (x \mapsto x^n) \right)_{(1-p)} \\
&= \frac{1}{M} p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} (x \mapsto \sum_{n=0}^N x^n) \right)_{(1-p)} \right) \\
&= \frac{1}{M} p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} (x \mapsto \frac{1-x^{N+1}}{1-x}) \right)_{(1-p)} \right) \\
&= \frac{1}{M} p \left( x \mapsto \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^{N+1})}{(1-x)^2} \right)_{(1-p)} \\
&= \frac{1}{M} p \left( x \mapsto \frac{1 + Nx^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2} \right)_{(1-p)} \\
&= \frac{1}{M} \frac{1}{p} (1 - (1-p)^N ((N+1)p + 1 - p)) \\
&\xrightarrow{N \infty} \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y_k^2) &= \sum_{n=0}^N n^2 \mathbb{P}(Y_k = n) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^N n^2 p (1-p)^{n-1} \\
 &= \frac{1}{M} p \left( (1-p) \sum_{n=2}^N n(n-1) (1-p)^{n-2} + \sum_{n=1}^N n (1-p)^{n-1} \right) \\
 &= \frac{1}{M} p \left( (1-p) \left( \sum_{n=2}^N \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x \mapsto x^n) \right)_{(1-p)} + \left( \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x} (x \mapsto x^n) \right)_{(1-p)} \right) \\
 &= \frac{1}{M} p \left( (1-p) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x \mapsto \frac{1-x^{N+1}}{1-x}) \right)_{(1-p)} + \left( \frac{\partial}{\partial x} (x \mapsto \frac{1-x^{N+1}}{1-x}) \right)_{(1-p)} \right) \\
 &= \frac{1}{M} \left\{ p(1-p) \left( x \mapsto \frac{(N(N+1)x^N - (N+1)Nx^{N-1})(1-x) + 2(1+Nx^{N+1} - (N+1)x^N)}{(1-x)^3} \right)_{(1-p)} \right. \\
 &\quad \left. + p \left( x \mapsto \frac{1+Nx^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2} \right)_{(1-p)} \right\} \\
 &= \frac{1}{M} \left\{ p(1-p) \left( x \mapsto \frac{2-N(N+1)x^{N-1} + 2N^2x^N - N(N-1)x^{N+1}}{(1-x)^3} \right)_{(1-p)} \right. \\
 &\quad \left. + p \left( x \mapsto \frac{1+Nx^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2} \right)_{(1-p)} \right\} \\
 &= \frac{1}{p^2} \left\{ 2(1-p) - N(N+1)(1-p)^N + 2N^2(1-p)^{N+1} - N(N+1)(1-p)^{N+2} \right. \\
 &\quad \left. \dots + p - (N+1)p(1-p)^N - (1-p)^{N+1} \right\} \\
 &= \frac{1}{M} \frac{2-p - (1-p)^N (N(N+1) - 2N^2(1-p) + N(N-1)(1-p)^2 + (N+1)p)}{p^2} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2-p}{p^2}
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(Y_k) &= \mathbb{E}(Y_k^2) - (\mathbb{E}(Y_k))^2 \\
 &= \frac{1}{M} \frac{1}{p^2} \left\{ \begin{array}{l} 1-p \\ -(1-p)^N [N(N+1) - 2N^2(1-p) + N(N-1)(1-p)^2 - ((N+1)p + 2 - 2p)] \\ -(1-p)^{2N} [N(N+1) - 2N^2(1-p) + N(N-1)(1-p)^2 + (N+1)p]^2 \end{array} \right\} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1-p}{p^2}
 \end{aligned}$$

On se placera dans toute la suite dans le cas où  $N = +\infty$

→ Q2

Proposer un test de Wald de l'hypothèse :

$$\underline{H_0} : p = 5\%$$

Le test de Wald se fonde sur la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui vaut ici  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{y}}$ . Ecrire le Théorème Central Limite implique donc de l'écrire en  $\bar{y}$  puis d'appliquer le théorème de Slutsky à  $g : (x \mapsto \frac{1}{x})$ . On en tirerait alors la statistique de Wald habituelle, dont on saurait qu'elle suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2$  à un degré de liberté.

Pour autant, comme  $g$  est bijective, nous préférons appliquer le Théorème Central Limite à  $\bar{y}$  (comparé à  $g^{-1}(p_0) = \frac{1}{p_0}$ ), et reconstruire de façon analogue à la construction de la statistique de Wald une statistique qui suit un  $\chi^2$  à un degré de liberté.

On a en effet d'après le Théorème Central Limite

$$\sqrt{K} \left( \bar{y} - \frac{1}{p} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{1-p}{p^2} \right)$$

donc

$$\sqrt{K} \frac{\bar{y} - \frac{1}{p}}{\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}} \xrightarrow[K\infty]{\mathcal{N}} (0, 1)$$

et donc

$$K \frac{\left( \bar{y} - \frac{1}{p} \right)^2}{\frac{1-p}{p^2}} \xrightarrow[K\infty]{} \chi_1^2$$

Enfin, en approchant la variance  $\frac{1-p}{p^2}$  par  $\frac{1-\frac{1}{\bar{y}}}{\frac{1}{\bar{y}^2}} = \bar{y}(\bar{y} - 1)$  il vient

$$\xi_n^W(y_1, \dots, y_n) = K \frac{\left( \bar{y} - \frac{1}{p_0} \right)^2}{\bar{y}(\bar{y} - 1)} \xrightarrow[K\infty]{H_0} \chi_1^2$$

☞ Q3

Soit  $A_k = \{ \bar{Y} < k_\alpha \}$ , pour  $k_\alpha$  donné; calculer  $\mathbb{P}_p(A_k)$  en fonction de  $p = p_0$ .

Montrer que  $\sup_{p \leq 5\%} (\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A_k)) = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p=5\%}(A_k)$ .

En déduire un test asymptotique de l'hypothèse :

$$H_0 : p \leq 5\%$$

On cherche à tester l'hypothèse  $H_0 : "p \leq p_0 = 5\%"$  au seuil  $\alpha \in [0, 1[$  en comparant  $\hat{p} = \bar{y}$  à un certain fractile  $k_\alpha$ . L'idée est donc d'exploiter la normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{p}$  pour en déduire la forme explicite (et tabulable) de  $k_\alpha$

Considérons donc  $k_\alpha \in \mathbb{R}$ ; on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(A_k) &= \mathbb{P}_p(\bar{y} < k_\alpha) \\ &= \mathbb{P}_p \left( \sqrt{K} \frac{\bar{y} - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} < \sqrt{K} \frac{k_\alpha - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} \right) \end{aligned}$$

Remarque : Même si cela ne change rien à la méthode, rien n'implique que  $k_\alpha$  ne dépende pas de la taille  $K$  de l'échantillon. On est donc amené à exprimer  $k_\alpha$  en tant que fonction de  $K$ , supposée suffisamment régulière.

Ainsi, si  $k_\alpha : (\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R})$  est une fonction de  $K$  qui admet une limite finie lorsque  $K \rightarrow +\infty$ , on a

$$\mathbb{P}_p(A_k) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \Phi \left( \lim_{K \rightarrow \infty} \sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} \right)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite; il reste déterminer  $\sup_{p \leq p_0} \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A_k)$ .

Or si  $p_2 \leq p_1 \leq p_0$ , on a

$$\sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p_2}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} \leq \sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p_1}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}}$$

et par conséquent

$$\Phi \left( \lim_{K \rightarrow \infty} \sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p_2}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} \right) \leq \Phi \left( \lim_{K \rightarrow \infty} \sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p_1}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} \right)$$

soit encore

$$\mathbb{P}_{p_2}(A_k) \leq \mathbb{P}_{p_1}(A_k)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sup_{p \leq p_0} \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A_k) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{p \leq p_0} \mathbb{P}_p(A_k) \quad \text{par continuité uniforme} \dots \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p=p_0}(A_k) \\ &= \Phi \left( \lim_{K \rightarrow \infty} \sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} \right) \end{aligned}$$

Pour  $K$  asymptotiquement grand et  $\alpha \in [0, 1[$  on accepte donc  $H_0$  ssi

$$\sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p_0}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}} > q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)}$$

où  $q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)}$  désigne le fractile de niveau  $\alpha$  de la loi normale centrée réduite.

L'idée est alors de définir  $k_\alpha$  de façon à ce que  $\Phi(T(k_\alpha)) = q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)}$ , où  $T(x) = \sqrt{K} \frac{x - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y} - 1)}}$ ; de cette façon, tester si  $p \leq p_0$  au seuil  $\alpha$ , c'est-à-dire comparer  $\sup_{p \leq p_0} \mathbb{P}_{p, k_\alpha}(A_k)$  à  $\alpha$ , revient juste à comparer  $\bar{y}$  à  $k_\alpha$ .

Plus précisément,  $H_0$  est acceptée ssi  $\bar{y} > k_\alpha(K)$  avec

$$k_\alpha(K) = \frac{1}{p_0} + q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)} \sqrt{\frac{\bar{y}(\bar{y} - 1)}{K}}$$

(et on vérifie a posteriori que  $\lim_{K \rightarrow \infty} k_\alpha(K) = \frac{1}{p_0}$  existe).

<b>Exercice corrigé 4</b>
---------------------------

On dispose de  $n$  observations i.i.d. d'un couple de variables aléatoires positives scalaires  $(W_i, X_i)$ .

Le but de l'exercice est de suggérer une procédure pour tester l'hypothèse  $H_0$  selon laquelle la loi conditionnelle de  $W_i$  sachant  $X_i$  est une loi de Pareto, de densité :

$$f(W|X, b) = \frac{bX}{W_0} \left(\frac{W_0}{W}\right)^{bX+1} \mathbb{1}_{W \geq W_0}$$

pour  $b > 0$  et  $W_0 > 0$

☞ Q1 On suppose dans un premier temps que les  $X_i$  sont tous égaux à  $X \in \mathbb{R}$  connu, et que  $W_0$  est connu, de sorte que le seul paramètre inconnu du modèle est  $\alpha = bX + 1$ .

- |                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) Calculer l'espérance et la variance de $W$ , notées $m$ et $v$ .<br>A quelle condition sur $\alpha$ , supposée vérifiée par la suite, les moments $m$ et $v$ existent-ils ? |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

On a

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}(W) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{bx}{W_0} \left(\frac{W_0}{W}\right)^{\alpha} \mathbb{1}_{W \geq W_0} W dW \\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 1)W_0^{\alpha-1} \int_{W_0}^{+\infty} W^{1-\alpha} dW \\ &= (\alpha - 1)W_0^{\alpha-1} \left[ \frac{W^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{W_0}^{+\infty} \\ &= \boxed{\frac{\alpha-1}{\alpha-2} W_0} \end{aligned}$$

aussitôt que  $\alpha > 2$ , et par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W^2) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{bx}{W_0} \left(\frac{W_0}{W}\right)^{\alpha} \mathbb{1}_{W \geq W_0} W^2 dW \\ &= (\alpha - 1)W_0^{\alpha-1} \int_{W_0}^{+\infty} W^{2-\alpha} dW \\ &= (\alpha - 1)W_0^{\alpha-1} \left[ \frac{W^{3-\alpha}}{3-\alpha} \right]_{W_0}^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} W_0^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} v &= \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2 \\ &= \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} - \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2} \right)^2 \right) W_0^2 \\ &= \boxed{\frac{\alpha-1}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)} W_0^2} \end{aligned}$$

aussitôt que  $\alpha > 3$ .

En toute rigueur, il faudrait encore prouver que lorsque  $\alpha < 2$ ,

$\mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2 = (+\infty) - (+\infty)$  diverge effectivement, en écrivant

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2 &= \int_{\mathbb{R}} W^2 f(W|\alpha) dW - \left( \int_{\mathbb{R}} W f(W|\alpha) dW \right)^2 \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \left( \int_{W_0}^M W^2 f(W|\alpha) dW \right) - \left( \int_{W_0}^M W f(W|\alpha) dW \right)^2 \right) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \left( \int_{W_0}^M W^2 f(W|\alpha) dW \right) - \left( \int_{W_0}^M W f(W|\alpha) dW \right) \left( \int_{W_0}^M \omega f(\omega|\alpha) d\omega \right) \right) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \int_{W_0}^M \left( W^2 - W \left( \int_{W_0}^M \omega f(\omega|\alpha) d\omega \right) \right) f(W|\alpha) dW \right) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \int_{W_0}^M \left( W^2 - W \left[ \frac{W^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{W_0}^M \right) f(W|\alpha) dW \right) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \int_{W_0}^M W \left( W - \frac{M^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{W_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) (\alpha-1) W_0^{\alpha-1} W^{-\alpha} dW \right) \\
 &= (\alpha-1) W_0^{\alpha-1} \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \int_{W_0}^M W^{2-\alpha} - \left( \frac{M^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{W_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) W^{1-\alpha} dW \right) \\
 &\underset{M \rightarrow \infty}{\approx} (\alpha-1) W_0^{\alpha-1} \left( \frac{M^{3-\alpha}}{3-\alpha} - \frac{M^{4-2\alpha}}{(2-\alpha)^2} \right) \\
 &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \pm \infty \quad \text{selon le signe de } \alpha - 1
 \end{aligned}$$

Ainsi les deux premiers moments existent ssi  $\alpha = Xb + 1 > 3$ , condition supposée vérifiée par la suite.

- (b) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$ .

On a pour  $(w_1, \dots, w_n) \in [W_0, +\infty[{}^n$

$$\begin{aligned}
 L_{W_1, \dots, W_n}(w_1, \dots, w_n; \alpha) &= \prod_{i=1}^n \frac{\alpha-1}{W_0} \left( \frac{W_0}{w_i} \right)^\alpha \\
 &= (\alpha-1)^n W_0^{n(\alpha-1)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n w_i^\alpha}
 \end{aligned}$$

Par suite l'estimateur du maximisation de vraisemblance  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  vérifie

$$\frac{n}{\hat{\alpha}-1} - \sum_{i=1}^n \ln \frac{w_i}{W_0} = 0$$

de sorte que

$$\hat{\alpha} = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{w_i}{W_0}}$$

(et on vérifie que cette condition est bien suffisante)

- (c) Déterminer le score et l'information de Fisher du modèle.  
En déduire  $\mathbb{E}(\ln W)$  et  $\mathbb{E}((\ln W)^2)$ .

On a pour une observation  $w \in [W_0, +\infty[$

$$\begin{aligned} S_1(w; \alpha) &= \frac{\partial \ln L_{W_1}(w; \alpha)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} - \ln \frac{w}{W_0} \end{aligned}$$

Or le score est centré, ce qui s'écrit  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha-1} - \ln \frac{W}{W_0}\right) = 0$ , soit

$$\mathbb{E}(\ln W) = \frac{1}{\alpha-1} + \ln W_0$$

De façon similaire on a

$$\begin{aligned} I_1(\alpha) &= -E \frac{\partial^2 \ln L_{W_1}(w; \alpha)}{\partial \alpha^2} \\ &= \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \end{aligned}$$

Or  $I_1(\alpha) = \mathbb{V}(S_1(W; \alpha)) = \mathbb{E}(S_1(W; \alpha)^2)$ , donc finalement

$$\mathbb{V}(\ln W) = \frac{1}{(\alpha - 1)^2}$$

et

$$\mathbb{E}((\ln W)^2) = \frac{1}{(\alpha-1)^2} + \left(\frac{1}{\alpha-1} + \ln W_0\right)^2$$

Soit  $s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(W_i) - \overline{\ln W})^2$ , où  $\overline{\ln W}$  est la moyenne empirique des logarithmes de  $W_i$ .

On se propose de fonder un test de  $H_0$  sur la différence :

(d)

$$s - \frac{1}{(\hat{\alpha} - 1)^2}$$

Justifier un tel test.

Notons  $Y_i = \ln W_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ; alors

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

est la variance empirique de  $(\ln W_1, \dots, \ln W_n)$ .

Or si  $H_0$  est vraie, alors  $\mathbb{V}(\ln W_i) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$  dont un estimateur convergent est  $\frac{1}{(\hat{\alpha}-1)^2}$ , d'où l'idée de construire une statistique de test fondée sur  $s - \frac{1}{(\hat{\alpha}-1)^2}$ .

Un tel test est habituellement appelé *test d'indépendance de Fisher*.

- (e) Ecrire le Théorème Central Limite pour  $(\ln W_i, (\ln W_i)^2)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ , et tester l'hypothèse  $H_0$  (On donnera la forme de la matrice de variance-covariance sans pour autant la calculer explicitement).

On a

$$\sqrt{n} \left( \begin{pmatrix} \frac{\overline{\ln W}}{(\overline{\ln W})^2} \\ \frac{\overline{(\ln W)^2}}{(\overline{\ln W})^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\ln W) \\ \mathbb{E}((\ln W)^2) \end{pmatrix} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Omega \right)$$

avec  $\Omega = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(\ln W) & \text{Cov}(\ln W, (\ln W)^2) \\ \text{Cov}(\ln W, (\ln W)^2) & \mathbb{V}((\ln W)^2) \end{pmatrix}$  que l'on n'explicitera pas davantage.

Soit alors  $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (m, v) & \mapsto & v - m^2 \end{pmatrix}$ ; alors d'après le théorème de Slutsky

$$\sqrt{n} \left( s - \frac{1}{(\alpha-1)^2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, M(\alpha))$$

avec  $M(\alpha) = \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha)' \times \Omega \times \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ .

Enfin, en considérant l'estimateur convergent  $\widehat{M}(\alpha) = M(\hat{\alpha})$  de  $M(\alpha)$  on en tire que

$$\sqrt{n} \left( \frac{s - \frac{1}{(\alpha-1)^2}}{\sqrt{M(\hat{\alpha})}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

de sorte que finalement si  $H_0$  est vraie

$$\xi_n^F = n \frac{\left( s - \frac{1}{(\alpha-1)^2} \right)^2}{M(\hat{\alpha})} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

☞ Q2 On suppose toujours  $W_0$  connu, mais les  $X_i$  prennent désormais des valeurs a priori distinctes.

- (a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $b$ .



On a pour  $(w_1, \dots, w_n, x_1, \dots, x_n) \in [W_0, +\infty[^{2n}$

$$\begin{aligned} L_{W_1, \dots, W_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n}(w_1, \dots, w_n, x_1, \dots, x_n; b) &= \prod_{i=1}^n \frac{bx_i}{W_0} \left( \frac{W_0}{w_i} \right)^{bx_i+1} \\ &= b^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) W_0^{b \sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^n w_i^{bx_i+1}} \end{aligned}$$

Par suite l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{b}$  de  $b$  vérifie

$$\frac{n}{\hat{b}} + \sum_{i=1}^n x_i \ln W_0 - \sum_{i=1}^n x_i \ln w_i = 0$$

ce dont on tire

$$\hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i \ln \frac{w_i}{W_0}}$$

(et on vérifie que cette condition est bien suffisante)

- (b) Montrer que :  $\mathbb{E} \left( X^2 \left( \ln \frac{W_0}{W} \right)^2 - \frac{2X}{b} \ln \frac{W_0}{W} \right) = 0$ .  
Comment testeriez-vous alors l'hypothèse  $H_0$  ?

Le score s'écrit cette fois pour une observation

$$\begin{aligned} S_1(w|X = x; b) &= \frac{\partial \ln L_{W_1|X=x}(w; b)}{\partial b}(w; b) \\ &= \frac{1}{b} - x \ln \frac{w}{W_0} \end{aligned}$$

Il est centré, et donc

$$\mathbb{E} \left( X \ln \frac{W}{W_0} \right) = \frac{1}{b}$$

Par ailleurs l'information de Fisher s'écrit

$$\begin{aligned} I_1(b) &= -E \frac{\partial^2 \ln L_{W_1|X_1}(w; b)}{\partial b^2} \\ &= \frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 I_1(b) &= \mathbb{V}(S_1(W|X; b)) \\
 &= \mathbb{E}(S_1(W|X; b)^2) \\
 &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{b} - X \ln \frac{W}{W_0}\right)^2\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{b^2} - 2\frac{X}{b} \ln \frac{W}{W_0} + X^2 \left(\ln \frac{W}{W_0}\right)^2\right) \\
 &= \frac{1}{b^2} + \mathbb{E}\left(X^2 \left(\ln \frac{W}{W_0}\right)^2 - 2\frac{X}{b} \ln \frac{W}{W_0}\right)
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(X^2 \left(\ln \frac{W}{W_0}\right)^2 - 2\frac{X}{b} \ln \frac{W}{W_0}\right) = 0$$

De façon similaire au cas où les  $X_i$  étaient constants, on cherche alors à tester  $H_0$  en considérant l'estimateur empirique de cette expression, à savoir

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\ln \frac{w_i}{W_0}\right)^2 - \frac{1}{b} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i \ln \frac{w_i}{W_0}$$

Il suffit alors, en s'appuyant sur la loi asymptotique de  $\begin{pmatrix} X \ln \frac{W}{W_0} \\ X^2 \left(\ln \frac{W}{W_0}\right)^2 \end{pmatrix}$  obtenue par le Théorème Central Limite, d'appliquer le théorème de Slutsky en considérant  $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (m, v) & \mapsto & v - \frac{2}{b}m \end{pmatrix}$ , ce qui conduit à

$$\sqrt{n}(t - 0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, N(b))$$

où  $t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\ln \frac{w_i}{W_0}\right)^2 - \frac{2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \ln \frac{w_i}{W_0}\right)^2$  (en substituant  $\hat{b}$  à  $b$ )

et  $N(b) = \frac{\partial g}{\partial b}(b)' \times \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X \ln \frac{W}{W_0} \\ X^2 \left(\ln \frac{W}{W_0}\right)^2 \end{pmatrix}\right) \times \frac{\partial g}{\partial b}(b)$ .

On en tire en définitive la statistique de test

$$\xi_n^F = n \frac{\left(t - \frac{1}{b^2}\right)^2}{N(\hat{b})} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

si  $H_0$  est vraie.

☞ Q3 On suppose enfin que  $W_0$  est inconnu.

- (a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $W_0$ .

On a pour  $(w_1, \dots, w_n, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$L_{W_1, \dots, W_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n}(w_1, \dots, w_n; W_0, b) = b^n \left( \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{(w_i)^{bx_i+1}} \right) W_0^{b \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{1}_{\min_i w_i \geq W_0}$$

En particulier l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\widehat{W}_0$  de  $W_0$  est

$$\widehat{W}_0 = \min_i w_i$$

- (b) Peut-on adapter la procédure de test précédemment mise-en-œuvre ?

La difficulté est que le modèle statistique n'est plus régulier; en particulier, la log-vraisemblance n'est plus dérivable, donc ni le score ni la matrice d'information de Fisher ne sont définis. La procédure de test utilisée précédemment, fondées sur leurs propriétés statistiques, n'est donc plus applicable.