ENSAE

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Cursus Intégré
2004-2005

Rappels de statistique mathématique
Corrigé des travaux dirigés n°8

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE222/

Version du 20050421-15h38, révisée le 21 avril 2005

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Posons $\mu = \delta_a + \lambda$ et $\mu_n = \mu^{\otimes n}$.

Remarque : nous restreindrons les démonstrations au cas où une seule observation X_1 est disponible, dans la mesure où car la généralisation à n observations i.i.d. se réduit à un passage au produit immédiat :

$$dP_{X_1,\dots,X_n} = \prod_{i=1}^{n} dP_{X_i}$$

$$\frac{dP_{X_1,\dots,X_n}}{d\mu_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{dP_{X_i}}{d\mu}$$

Remarque préliminaire

Pour $\mathcal{A}$ ensemble mesurable, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}) &= \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 = a)\mathbb{P}(X_1 = a) + \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 \neq a)\mathbb{P}(X_1 \neq a) \\ &= \alpha\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 = a) + (1-\alpha)\int_{\mathcal{A}} \varphi(x)d\lambda(x)\end{aligned}$$

où φ désigne la densité de la loi normale centrée réduite.

Or $\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 = a)$ vaut 1 si $a \in \mathcal{A}$ et 0 sinon, de sorte que

$$\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}) = \alpha\mathbb{1}_{a\in\mathcal{A}} + (1-\alpha)\int_{\mathcal{A}} \varphi(x)d\lambda(x) \tag{1}$$

Or μ est une mesure dominante d'une variable X_1 ssi :

$$\forall \mathcal{A} \text{ mesurable, } \mu(\mathcal{A}) = 0 {:} P_{X_1}(\mathcal{A}) = 0$$

En l'occurence pour tout $\mathcal{A}$ mesurable :

- $\mu(\mathcal{A}) = 0{:}\delta_a(\mathcal{A}) = 0$
- $\delta_a(\mathcal{A}) = 0{:}a \notin \mathcal{A}$, donc d'après 1 $\lambda(\mathcal{A}) = 0{:}P_{X_1}(\mathcal{A}) = 0$

Donc $(\delta_a + \lambda)^{\otimes n}$ est une mesure dominante.

☞ Q2 On a $\mathbb{1}_{a\in\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} \delta_a(x)$,

donc en reportant dans l'équation 1 il vient

$$P(X_1 \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} (\alpha\delta_a(x) + (1-\alpha)\varphi(x)d\lambda(x))$$

d'où on tire facilement

$$P(X_1 \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} (\alpha\mathbb{1}_a(x) + (1-\alpha)\varphi(x)(1-\mathbb{1}_a(x)))\, d\mu(x)$$

de sorte qu'en définitive

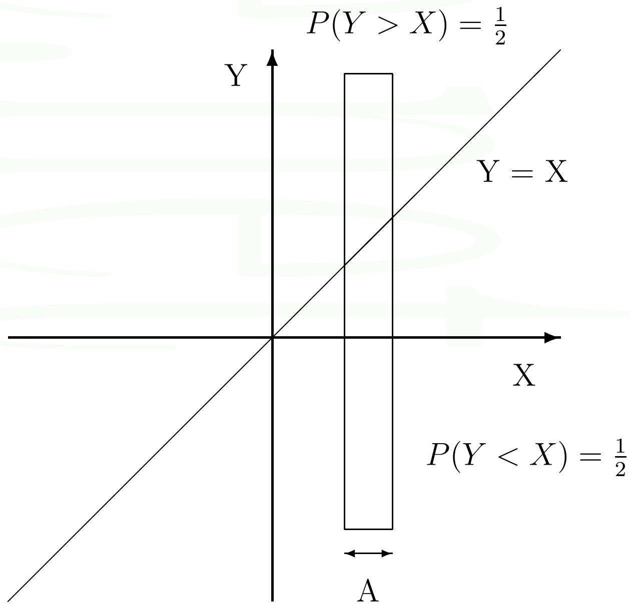
$$\frac{dP_{X_1}(x_1)}{d(\delta_a+\lambda)} = \alpha\mathbb{1}_a(x_1) + (1-\alpha)(1-\mathbb{1}_a(x_1))\phi(x_1)$$

d'où le résultat par indépendance de $(X_1, \dots, X_n)$.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Si un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) vérifie $\mathcal{P}$, alors au voisinage de tout X, la probabilité est la même pour Y d'être au-dessus ou au-dessous de X, comme illustré sur la figure suivante :



Pour simplifier la présentation, supposons que vous gagnez $+1$ si vous avez deviné juste et -1 sinon ; ce problème revient à savoir si vous pouvez vous garantir un gain espéré strictement positif.

☞ Q1 Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$ votre stratégie, et soient (x, y) une réalisation du tirage.

- Si x vous est présenté :
  Si $x > y$, votre gain est $\sigma(x)$; si $x < y$, votre gain est $-\sigma(x)$. Votre gain espéré, sachant que x vous est présenté, est donc nul.
- Si y vous est présenté, il en va de même.

Le choix de l'enveloppe étant indépendant du tirage de X et de Y, votre gain espéré est toujours nul, quelle que soit votre stratégie.

Comme l'hypothèse $\mathcal{P}$ semble “raisonnable”, l'intuition suggère qu'à ce jeu vous ne pourrez jamais obtenir un gain espéré strictement positif. Cette intuition est cependant erronée.

☞ Q2 (a) On a dans tous les cas $\sigma(x) = \sigma(y) = -1$ car $x < s$ et $y < s$.
Or si $x < y$, le gain espéré est

$$\mathbb{P}(\text{le nombre présenté est } x) \cdot 1 + \mathbb{P}(\text{le nombre présenté est } y) \cdot (-1) = 0$$

puisque ces deux alternatives sont équiprobables et que le choix de l'enveloppe est indépendant du tirage de X et de Y.

Il en va de même lorsque $x > y$, de sorte que le gain espéré, sachant que $x < s$ et $y < s$, est nul.

(b) Si le nombre présenté est x, on a $\sigma(x) = -1$ car $x < s$; or $x < y$, donc la réponse est juste et le gain est $+1$.
Si le nombre présenté est y, on a $\sigma(y) = +1$ car $y > s$; or $y > x$, donc la réponse est encore juste et le gain est toujours $+1$.
Ainsi dans tous les cas le gain espéré, sachant que $x < s < y$, est $+1$. Il en va de même bien-sûr sachant que $y < s < x$.

(c) D'après les résultats précédents le gain espéré en jouant σ_s est donc

$$\boxed{g(s) = \mathbb{P}(X < s < Y) + \mathbb{P}(Y < s < X)}$$

Or ces deux probabilités ne peuvent être simultanément nulles pour tout s : en effet

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X < s < Y) + \mathbb{P}(Y < s < X) ds &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbb{1}_{x<s<y} + \mathbb{1}_{y<s<x}\right) f_{X,Y}(x,y) dxdy \right) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x<s<y} ds + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y<s<x} ds \right) f_{X,Y}(x,y) dxdys \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbb{1}_{x<y}(y-x) + \mathbb{1}_{y<x}(y-x)\right) f_{X,Y}(x,y) dxdys \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |x-y| \, \mathbb{1}_{x \neq y} f_{X,Y}(x,y) dxdys \\
&= \mathbb{E}\left(|X-Y|\right)
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ alors $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ et le jeu devient trivial : la stratégie qui prétend que le nombre tiré est le plus grand est presque sûrement toujours gagnante ; en particulier lorsque $s = 0$ $g(0) > 0$.
Et si $\mathbb{P}(X \neq Y) \neq 0$ alors $\mathbb{E}(|X - Y|) > 0$, et donc $\int_{\mathbb{R}} g(s)ds > 0$.
Donc dans tous les cas

$$\boxed{\exists s \in \mathbb{R} \; / \; g(s) > 0}$$

En fait, si (X, Y) est distribué de telle sorte que toute partie de mesure non-nulle a une probabilité non-nulle, alors *n'importe quel* seuil s assure un gain espéré strictement positif.

☞ Q3 Si une telle distribution sur $\mathbb{R}^2$ existait, alors d'après la question (1) dans le jeu de Blackwell associé nul ne saurait gagner plus que zéro en moyenne, ce qui est pourtant possible d'après la question (2).

☞ Q1 La formulation du paradoxe suggère que l'on se donne une distribution de probabilité a priori sur les deux sommes X et Y ; cette distribution est nécessairement telle que $\mathbb{P}(X = 2Y \text{ ou } Y = 2X) = 1$.
Etant donné $x \in \mathbb{R}$ et à supposer que $X = x$, l'hypothèse $\mathcal{H}_x$ s'exprime en termes mathématiques sous la forme

$$\mathbb{P}(Y = 2x \,|\, X = x) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{x}{2} \,|\, X = x\right) = \frac{1}{2}$$

☞ Q2 L'hypothèse $\mathcal{H}_y$ analogue à la précédente en $Y = y \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$\mathbb{P}\left(X = 2y \,|\, Y = y\right) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y}{2} \,|\, Y = y\right) = \frac{1}{2}$$

Dans l'énoncé du paradoxe, l'hypothèse selon laquelle "chacune a autant de chances que l'autre de contenir la plus grosse somme" se traduit alors en $\mathcal{H}_x$ quelle que soit la somme x de la première enveloppe, et $\mathcal{H}_y$ quelle que soit la somme y de la deuxième enveloppe.
En d'autres termes

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(Y = 2x \,|\, X = x\right) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{x}{2} \,|\, X = x\right) = \frac{1}{2} \\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(X = 2y \,|\, Y = y\right) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y}{2} \,|\, Y = y\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'événement $Y = 2x$ est égal à l'événement $Y > x$, et l'événement $Y = \frac{x}{2}$ à $Y < x$. Par suite

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(Y > x \,|\, X = x\right) = \mathbb{P}\left(Y < x \,|\, X = x\right) = \frac{1}{2} \\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(X > y \,|\, Y = y\right) = \mathbb{P}\left(X < y \,|\, Y = y\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Par conséquent pour toute partie mesurable $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(X \in A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y \in \mathcal{A}) \neq 0$ il vient

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}\left(Y > X | X \in \mathcal{A}\right) = \mathbb{P}\left(Y < X | X \in \mathcal{A}\right) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}\left(X > Y | Y \in \mathcal{A}\right) = \mathbb{P}\left(X < Y | Y \in \mathcal{A}\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

de sorte que (X, Y) vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

☞ Q3 Ainsi, à supposer que l'on se donne une distribution a priori sur les sommes d'argent de chacune des deux enveloppes, il n'est pas possible de traduire l'hypothèse "chacune a autant de chances que l'autre de contenir la plus grosse somme" comme il est suggéré, car la distribution vérifierait alors la propriété $\mathcal{P}$ ce qui n'est pas possible.
La démarche proposée, bien qu'intuitive, n'est donc pas raisonnable : en particulier il est faux qu'après un nombre quelconque de changements d'enveloppe on ait "à nouveau intérêt à changer d'enveloppe".

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Il suffit de poser $c = -x_1$ dans la définition de l'équivariance.

☞ Q2 Le risque associé vérifie :

$$\begin{array}{rcl} R_w(T,\theta) & = & E_\theta[w(T-\theta)] \\ & = & \displaystyle\int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(x_1,\dots,x_n)-\theta) \prod_{\iota=1}^{n} f(x_i-\theta)dx_i \\ & = & \displaystyle\int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(x_1-\theta,\dots,x_n-\theta)) \prod_{\iota=1}^{n} f(x_i-\theta)dx_i \\ & = & \displaystyle\int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(u_1,\dots,u_n)) \prod_{\iota=1}^{n} f(u_i)du_i \\ & = & R_w(T,0) \end{array}$$

en effectuant un changement de variable $u_i = x_i - \theta$.

☞ Q3 (a) Soit $c \in \mathbb{R}^k$; on a

$$\begin{aligned}\psi(x+c) &= \int w(x+c-u)\prod_{i=1}^{n} f(X_i-u)du \\ &= \int w(x-v)\prod_{i=1}^{n} f(X_i-c-v)dv\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $v = u - c$.
En particulier $\psi(x+X_1) = \int w(x-v)f(-v)\prod_{i=2}^{n} f\left((X_i-X_1)-v\right)dv$
Donc $\psi(x+X_1)$ ne dépend que de x et des variables aléatoires $X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1$: soit donc T_1 tel que $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^k}\psi(x+X_1) = T_1(X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1)$.
Or $\forall\phi, \forall c\in\mathbb{R}^k,\quad \arg\inf\left(x\mapsto\phi(x+c)\right) = \left(\arg\inf\left(x\mapsto\phi(x)\right)\right)-c$.
Donc en définitive

$$T_1(X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1) = (\arg\inf\psi)-X_1 = T^*-X_1$$

Autrement dit T^* est équivariant d'après la question précédente.

(b)

$$\begin{aligned}&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n] \\ =&\int\varphi(x_1,x_1+y_2,\ldots,x_1+y_n)d\mathbb{P}(X_1=x_1|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n) \\ =&\int\varphi(x_1,x_1+y_2,\ldots,x_1+y_n)\frac{f(x_1-\theta)\prod_{i=2}^{n}f(x_1+y_i-\theta)}{\left[\int f(x_1-\theta)\prod_{i=2}^{n}f(x_1+y_i-\theta)dx_1\right]}dx_1\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables $u = \theta - x_1 + c$ (c constante quelconque) dans les deux intégrales :

$$\begin{aligned}&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n] \\ =&\int\varphi(c+\theta-u,c+y_2+\theta-u,\ldots)\frac{f(c-u)\prod_{i=2}^{n}f(c+y_i-u)}{\left[\int f(c-u)\prod_{i=2}^{n}f(c+y_i-u)du\right]}du\end{aligned}$$

La relation suivante est alors vraie pour tout $c\in\mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned}&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1] \\ =&\int\varphi(c+\theta-u,c+X_2-X_1+\theta-u,\ldots)\frac{f(c-u)\prod_{i=2}^{n}f(c+X_i-X_1-u)}{\left[\int f(c-u)\prod_{i=2}^{n}f(c+X_i-X_1-u)du\right]}du\end{aligned}$$

elle est donc vraie aussi pour $c = X_1$:

$$\begin{aligned}&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1] \\ =&\int\varphi(X_1+\theta-u,X_2+\theta-u,\ldots)\frac{\prod_{i=1}^{n}f(X_i-u)}{\left[\int f(X_1-u)\prod_{i=2}^{n}f(X_i-u)du\right]}du\end{aligned}$$

(c) Soit T un estimateur équivariant quelconque. On va montrer que T^* domine T. Pour cela, il suffit de prouver que $R_w(T,0) \geq R_w(T^*,0)$, selon le résultat de la question (2).

$$\begin{aligned} R_w(T,0) &= \mathbb{E}_0[w(T)] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0[w(T)|X_2 - X_1, \ldots, X_n - X_1]] \\ &= \mathbb{E}_0\left[\int_{\mathbb{R}} w(T-u)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i - u)}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}du\right] \end{aligned}$$

Or par définition de T^*, pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} w(T^*(x)-u)\prod_{i=1}^n f(x_i-u)du \leq \int_{\mathbb{R}} w(t-u)\prod_{i=1}^n f(x_i-u)du$$

donc

$$\begin{aligned} R_w(T,0) &\geq \mathbb{E}_0\left[\int_{\mathbb{R}} w(T^*(X)-u)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i - u)}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}du\right] \\ &= R_w(T^*,0) \end{aligned}$$

Donc T^* domine T.

☞ Q4 Si $w(x-y) = \|x-y\|^2$, ψ vaut :

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \|x-u\|^2 \prod_{i=1}^n f(X_i-u)du$$

et le gradient $\psi'(x)$ vaut : $\psi'(x) = \int_{\mathbb{R}^k} 2(x-u)\ \prod_{i=1}^n f(X_i-u)du$. T^* est défini par l'équation $\psi'(T^*) = 0$, qui se réduit ici à :

$$T^* = \frac{\int_{\mathbb{R}^k} u\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}{\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}$$

☞ Q5 Lorsque $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a

$$T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

Si $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$, il vient

$$T^* = \frac{\min(X_i) + \max(X_i)}{2}$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 Les observations étant les effectifs N_k de chaque classe $k \in [\![1, K]\!]$, la vraisemblance s'écrit

$$L_{N_1,\dots,N_K}(n_1,\dots,n_K;p_1,\dots,p_K) \quad = \quad \frac{n!}{n_1!\cdots n_K!}\prod_{k=1}^{K} {p_k}^{n_k} \quad \text{en notant } n = n_1+\cdots+n_K$$

La maximisation sans hypothèse conduit aux conditions nécessaires du premier ordre, en n'omettant la contrainte $p_1+\cdots+p_K = 1$

$$\begin{array}{l} \max_{p_1,\dots,p_K}\left(\sum_{k=1}^K n_k \ln p_k\right) \\ \text{s.c. } \{p_1+\cdots+p_K = 1 \end{array}$$

Le lagrangien associé s'écrit

$$\mathcal{L}(p_1,\dots,p_K,\lambda) = \sum_{k=1}^{K} n_k \ln p_k + \lambda(1-\sum_{k=1}^{K} p_k)$$

et il vient

$$\forall k \in [\![1, K]\!],\ \frac{n_k}{\widehat{p_k}} - \lambda = 0$$

Or en sommant de 1 à K il vient

$$n = \sum_{k=1}^{K} n_k = \lambda \sum_{k=1}^{K} p_k = \lambda$$

de sorte que finalement

$$\boxed{\forall k \in [\![1, K-1]\!],\ \widehat{p_k} = \frac{n_k}{n}}$$

(et on vérifie que cette condition est également suffisante).

La maximisation sous l'hypothèse H_0 correspond au programme de maximisation sous contrainte

$$\begin{array}{l} \max_{p_1,\dots,p_K}\left(\sum_{k=1}^K n_k \ln p_k\right) \\ \text{s.c. } \left\{ \begin{array}{l} p_1+\cdots+p_K = 1 \\ p_1+p_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}$$

Le lagrangien associé s'écrit

$$\mathcal{L}(p_1,\dots,p_K,\lambda,\mu) = \sum_{k=1}^{K} n_k \ln p_k + \lambda(1-\sum_{k=1}^{K} p_k) + \mu(\frac{1}{2} - p_1 - p_2)$$

et il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1} = \frac{n_1}{p_1} - \lambda - \mu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_2} = \frac{n_2}{p_2} - \lambda - \mu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_k} = \frac{n_k}{p_k} - \lambda, \quad \forall k \in [\![3, K]\!] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{k=1}^K p_k \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \frac{1}{2} - p_1 - p_2 \end{array}\right.$$

d'où finalement

$$\boxed{\begin{cases} \widehat{p_1^0} = \frac{n_1}{2(n_1+n_2)} \\ \widehat{p_2^0} = \frac{n_2}{2(n_1+n_2)} \\ \widehat{p_k^0} = \frac{n_k}{2(n_3+\cdots+n_K)}, \qquad \forall k \in [\![3, K]\!] \end{cases}}$$

☞ Q2 Pour déterminer la statistique de Wald, appliquons le Théorème Central Limite à $\begin{pmatrix} \widehat{p_1} \\ \vdots \\ \widehat{p_K} \end{pmatrix}$; pour ce faire, calculons tout d'abord sa variance.

On a en effet pour $k \in [\![1, K]\!]$, $\widehat{p_k} = \frac{n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \in C_k}$ où C_k désigne la k-ième classe ; or

$$\mathbb{V}\left(\mathbb{1}_{X_i \in C_k}\right) = p_k \cdot 1 - (p_k)^2 = p_k(1-p_k)$$

et

$$\mathbb{C}ov\left(\mathbb{1}_{X_i \in C_k}, \mathbb{1}_{X_j \in C_l}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_i \in C_k} \cdot \mathbb{1}_{X_j \in C_l}\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_i \in C_k}\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_j \in C_l}\right) = -p_k p_l \mathbb{1}_{i=j}$$

de sorte que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{p_1} - p_1 \\ \vdots \\ \widehat{p_K} - p_K \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p1p_2 & \cdots & -p_1p_K \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_Kp_1 & -p_Kp_2 & \cdots & p_K(1-p_K) \end{pmatrix}\right)$$

Posons finalement $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^K & \to & \mathbb{R} \\ x_1, \ldots, x_K & \mapsto & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$; alors d'après le théorème de Slutsky, si H_0 est vraie on a

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\left(\widehat{p_1} + \widehat{p_2} - \frac{1}{2}\right) & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} & \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{\partial g}{\partial p_1, \ldots, p_K}\right)' \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} \widehat{p_1} \\ \vdots \\ \widehat{p_K} \end{pmatrix}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_1, \ldots, p_K}\right)\right) \\ & = & \mathcal{N}\left(0, (p_1+p_2)(1-p_1-p_2)\right) \end{aligned}$$

d'où en centrant et en réduisant, puis en élevant au carré

$$\boxed{\xi_n^W = n\frac{\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\widehat{p_1}+\widehat{p_2})(1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2})} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2}$$

☞ Q3 (a) On sait que $\widehat{p_3^0} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} p_3$ et que $\widehat{p_3} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} p_3$.

Soit donc pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $p_3(\lambda) = \lambda\widehat{p_3^0} + (1-\lambda)\widehat{p_3} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} p_3$.

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{as}\left(p_3(\lambda)\right) &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}+\lambda\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\right)\\ &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)+2\lambda\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)+\lambda^2\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\\ &\geq \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)\end{aligned}$$

car $\widehat{p_3^0}$ est asymptotiquement efficace, car sa variance est égale à la borne FDCR $I(p_3)^{-1}$. Par conséquent le polynôme du second degré $P(\mathbb{X})=\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\mathbb{X}^2+2\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)\mathbb{X}$ est de signe constant. En particulier,

$$\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)=0$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right) &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\right)\\ &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)+\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)=\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right)-\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)}$$

(b) La loi asymptotique de $\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)$ se déduit de celle de $\begin{pmatrix}\widehat{p_1}\\ \vdots\\ \widehat{p_K}\end{pmatrix}$ déterminée précédemment.

Soit en effet $g:\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^K & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x_1,\dots,x_K) & \longmapsto & \frac{x_3}{2(1-x_1-x_2)}\end{array}\right)$; ainsi $g\left(\widehat{p_3}\right)=\widehat{p_3^0}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_1}(p_1,\dots,p_K) &= \frac{p_3}{2\left(1-p_1-p_2\right)^2}\\ &= 2p_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_2}(p_1,\dots,p_K) &= \frac{p_3}{2\left(1-p_1-p_2\right)^2}\\ &= 2p_3\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}(p_1,\dots,p_K) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(p_1,\dots,p_K) = 0,\quad \forall k\in[\![3,K]\!]$$

Donc d'après le théorème de Slutsky

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\widehat{p_3^0}-p_3\right) & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\begin{pmatrix}2p_3\\2p_3\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \cdots & -p_1p_K\\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_K\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -p_Kp_1 & -p_Kp_2 & \cdots & p_K(1-p_K)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2p_3\\2p_3\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)\\
& = \mathcal{N}\left(0,\begin{pmatrix}2p_3\\2p_3\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}'\times\begin{pmatrix}2p_3p_1(1-p_1)-2p_1p_2p_3-p_1p_3\\ -2p_1p_2p_3+2p_3p_2(1-p_2)-p_2p_3\\ -2{p_3}^2p_1-2{p_3}^2p_2+p_3(1-p_3)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right)\\
& = \mathcal{N}\left(0,\left\{\begin{array}{c}4{p_3}^2p_1(1-p_1)-4p_1p_2{p_3}^2-2p_1{p_3}^2\\ -4p_1p_2{p_3}^2+4{p_3}^2p_2(1-p_2)-2p_2{p_3}^2\\ -2{p_3}^2p_1-2{p_3}^2p_2+p_3(1-p_3)\end{array}\right.\right)\\
& = \mathcal{N}\left(0,\left\{\begin{array}{l}[4p_1(1-p_1)-4p_1p_2-2p_1-4p_1p_2+\\ \quad 4p_2(1-p_2)-2p_2-2p_1-2p_2]\,{p_3}^2\\ -{p_3}^2+p_3\end{array}\right.\right)\\
& = \mathcal{N}\left(0,\left\{-4(p_1+p_2)^2{p_3}^2-{p_3}^2+p_3\right)\\
& = \boxed{\mathcal{N}\left(0,p_3(1-2p_3)\right)} \quad \text{sous } H_0 : \text{“ } p_1+p_2=\frac{1}{2} \text{ ”}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)=p_3(1-2p_3)}$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right) &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right)-\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)\\
&= p_3(1-p_3)-p_3(1-2p_3)\\
&= \boxed{{p_3}^2}
\end{aligned}$$

Posons donc $\widehat{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)}=\widehat{p_3}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)$. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}
\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0} &= \frac{n_3}{n}-\frac{n_3}{2(n-n_1-n2)}\\
&= \frac{n_3}{n}\left(1-\frac{1}{2(1-\frac{n_1}{n}-\frac{n_2}{n}}\right)\\
&= \widehat{p_3}\left(1-\frac{1}{2(1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2})}\right)\\
&= \widehat{p_3}\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\xi_n^H &= n\frac{\widehat{p_3}^2\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2}{\widehat{p_3}^2} \\
&= \boxed{n\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2
\end{aligned}$$

(d) Si H_0 est fausse, alors $p_1 + p_2 \neq \frac{1}{2}$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\xi_n^H &= \left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2 \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \left(\frac{p_1+p_2-\frac{1}{2}}{1-p_1-p_2}\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\xi_n^H \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} (+\infty)$$

Ainsi, si H_0 est fausse alors $\mathbb{P}\left(\xi_n^H < q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left((+\infty) < q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}\right) = 0$: le test d'Hausman est donc convergent.

(e) On a enfin

$$\begin{aligned}
\frac{\xi_n^H}{\xi_n^W} &= \frac{n\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2}{n\frac{\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\widehat{p_1}+\widehat{p_2})(1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2})}} \\
&= \frac{\widehat{p_1}+\widehat{p_2}}{1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} (1)
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux statistiques de test ξ_n^H et ξ_n^W sont asymptotiquement équivalentes.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 5

☞ Q1 (a) Comme $[\![0, N-1]\!] \subsetneq \mathbb{N}$ $f_{\phi,s}$ n'est pas injective, soient $i < j$ les deux premiers entiers tels que $f_{\phi,s}(i) = f_{\phi,s}(j)$, et posons $T = j - i \geq 1$. Alors $f_{\phi,s}(i+T) = f_{\phi,s}(i)$, donc $f_{\phi,s}(i+1+T) = f_{\phi,s}(i+1)$ et par récurrence $\forall k \geq i, f_{\phi,s}(k+T) = f_{\phi,s}(k)$ et donc $f_{\phi,s}$ et périodique au-delà de i.

Remarquons que la suite $(f_{\phi,s}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est *déterministe* et pas aléatoire ; ll s'agit de déterminer si elle peut être la suite des *réalisations* d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[\![0, N-1]\!]$.

Définissons $g(k) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}|\{i \in \mathbb{N}/y(i) = k\}|$ la fréquence empirique de $k \in [\![0, N-1]\!]$; alors $f_{\phi,s}$ "génère" une variable distribuée selon la loi $\mathcal{L}$ sur $[\![0, N-1]\!]$ si la fréquence empirique de tout k est égale à sa probabilité selon $\mathcal{L}$.

En particulier, $f_{\phi,s}$ est uniformément distribuée *ssi* $\forall k \in [\![0, N-1]\!] f_{\phi,s}(k) = \frac{1}{N-1}$.

(b) On a $T \leq N$: en effet pour tout $a \in \mathbb{N}$, $t \mapsto f_{\phi,s}(a+t)$ ne peut pas être injective de $[\![0, N]\!]$ vers $[\![0, N-1]\!]$, donc il existe $i < j \in [\![0, N]\!]$ tel que $f_{\phi,s}(a+j) = f_{\phi,s}(a+i)$, et par suite $T_{\phi,s} \leq N$.

Or si $T_{\phi,s} < N$, alors $f_{\phi,s}([i, +\infty[) = \{f_{\phi,s}(i), f_{\phi,s}(i+1), \ldots, f_{\phi,s}(i + T_{\phi,s} - 1)\}$, donc $|f_{\phi,s}([i, +\infty[)| \leq T_{\phi,s} < N$, et donc $f_{\phi,s}([i, +\infty[) \subsetneq [\![0, N-1]\!]$. Ainsi l'un au moins des entiers de $[\![0, N-1]\!]$ n'est plus jamais atteint au-delà de i, et sa fréquence empirique est donc nulle : $f_{\phi,s}$ ne "génère" pas une loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$.

Remarquons réciproquement que si $f_{\phi,s}$ est périodique de période exactement N, alors elle est uniforme.

Ainsi, un "bon générateur" de nombres pseudo-aléatoires sur $[\![0, N-1]\!]$ est périodique de période N.

(c) Par définition de la division euclidienne, $f_{\psi_{a,c,p},s}$ est à valeur dans $[\![0, p-1]\!]$ donc pour qu'elle soit un bon générateur sur $[\![0, N-1]\!]$ il est nécessaire que $p = N$.

Par ailleurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et sa période divise p. Donc si $c = 0$ et si p est premier, $f_{\psi_{a,c,p},s}$ est de période 1 ou p, donc p (car $a \geq 2$), et est donc un bon générateur uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$ (en fait il suffit que p soit premier avec a, et il n'est pas nécessaire que $c = 0$).

Ces générateurs ont été introduits par Lehmer et sont encore souvent utilisés[1]. On sait notamment que $2^{31} - 1 = 2147483647$ est premier (vérifié par Euler en 1750), ainsi que $2^{61} - 1$ (Pervouchine 1883) et $2^{127} - 1$ (Lucas, 1876). [2]

☞ Q2 (a) Il s'agit d'une sorte de critère ergodique : la suite x est suffisamment "équi-répartie" et "équilibrée" pour que sommer aux points chargés par x ou sommer en tout point de $[0, 1]$ soit équivalent.

(b) Supposons que r est rationnel.

[1] cf Knuth, D.E., 1981 ; The Art of Computer Programming, Volume 2 Seminumerical Algorithms, Addison-Wesley, Reading Mass., 688 pages, ISBN 0-201-03822-6

[2] Parmi les nombres sous la forme $2^n - 1$ seuls ceux où $n \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127\}$ sont premiers, et non pas seulement pour $n \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257\}$ comme prétendu incorrectement par Marin Mersenne dans la préface de Cogitata Physica-Mathematica (1644). Parmi les $2^{2^n-1} - 1$ courants en informatique, ceux pour $n \in \{2, 3, 5, 7\}$ sont premiers.

– Supposons tout d'abord que $f_p = x \mapsto e^{2\pi i p x}$, $p \in \mathbb{Z}$. Par définition $rk = frac\,(rk) + E(rk)$ et donc

$$\begin{aligned} S_n^x\,(f_p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i p x_k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{(2p\pi i)\,rk} \text{ car } e^{(2p\pi i)E(rk)} = 1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(e^{(2p\pi i)\,r}\right)^k \end{aligned}$$

Comme r est irrationnel, si $p \neq 0$, alors $e^{(2p\pi i)r} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned} S_n^x\,(f_p) &= \frac{1}{n}\frac{e^{(2p\pi i)r} - \left(e^{(2p\pi i)r}\right)^{n+1}}{1 - e^{(2p\pi i)r}} \\ &= \frac{1}{n} e^{(2p\pi i)r\,\frac{n+1}{2}} \frac{\sin(\pi n r)}{\sin(\pi r)} \end{aligned}$$

et donc

$$|S_n^x\,(f_p)| \leq \frac{1}{n}\frac{1}{|\sin(\pi r)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

soit

$$S_n^x\,(f_p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[0,1]} e^{2\pi p i u} du$$

Lorsque $p = 0$, on a bien-sûr $S_n^x\,(f_0) = 1 = \int_{[0,1]} f_0$.

– Le résultat reste donc vrai par linéarité de l'intégrale pour tout polynôme trigonométrique.
– Soit enfin f continue sur $[0,1]$; d'après le théorème de Dirichlet f est limite *uniforme* d'une suite $(P_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques. Donc

$$\begin{aligned} S_n^x(f) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lim_{l\to\infty} P_l(x_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} S_{nb}^x\,(P_k) \quad \text{car la somme } \sum_{k=1}^{n} \text{ est finie} \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} P_l \quad \text{d'après le résultat précédent} \\ &= \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} P_l \quad \text{cqr la convergence de } (P_l)_{l\in\mathbb{N}} \text{ est uniforme} \\ &= \int_{[0,1]} f \end{aligned}$$

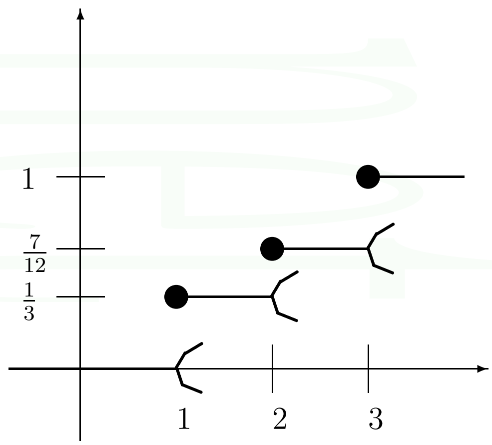
ce qui achève la preuve.

Dans le cas en revanche où $r = \frac{a}{b}$ est rationnel, alors $(rk)_{k\in\mathbb{N}} = \{0, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}\}$: la suite x ne prend que b valeurs distinctes et le résultat est faux, par exemple lorsque f est la fonction affine par morceaux telle que

$$\begin{cases} f\left(\frac{k}{b}\right) & = 1 \\ f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{b}\right) & = 2 \end{cases}$$

car alors $S_n^x(f) = 1 < \frac{3}{2} = \int_{[0,1]} f$.

☞ Q3 (a) Le graphe de $F_{\mathcal{L}}$ est le suivant :



On a donc

$$F_{\mathcal{L}}^{-1}(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } 0 = t \\ 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{3} \\ 2 & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{7}{12} \\ 3 & \text{si } \frac{7}{12} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Par conséquent lorsque $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, $X = F_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ ne charge positivement que $\{1, 2, 3\}$ et on a

$$\begin{array}{rclcl} \mathbb{P}(X=1) & = & \mathbb{P}\left(0 \leq U < \frac{1}{3}\right) & = & \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X=2) & = & \mathbb{P}\left(\frac{1}{3} \leq U < \frac{7}{12}\right) & = & \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(X=3) & = & \mathbb{P}\left(\frac{7}{12} \leq U < 1\right) & = & \frac{5}{12} \end{array}$$

de sorte que $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$.

(b) On a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(X \leq t\right) & = & \mathbb{P}\left(F_{\mathcal{L}}^{-1}(U) \leq t\right) \\ & = & \mathbb{P}\left(U \leq F_{\mathcal{L}}(t)\right) \quad \text{car } F_{\mathcal{L}} \text{ est croissante} \\ & = & F_{\mathcal{L}}(t) \quad \text{car } U \rightsquigarrow U_{[0,1]} \end{array}$$

Par conséquent $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$.

Remarquons que $F_{\mathcal{L}}$ étant strictement croissante, c'est sa continuité qui nous assure qu'elle est bijective.

(c)

$$F_{\mathcal{E}(\lambda)}(u) = \int_0^u \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(1 - e^{-\lambda u}\right)$$

Soit donc $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$; alors $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$; or par ailleurs $(1-U) \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, et donc $-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
On génère donc u_n réalisation de $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ et on renvoit $x_n = -\frac{1}{\lambda}\ln(u_n)$.

(d) Soit $G : \mathbb{R}^2 \to R^n$ absolument continue ; alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(G(R^2,\theta)\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} G\left(x^2+y^2, \arctan\frac{y}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dyxy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} G\left(\rho^2,\theta\right) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

par le changement de variables en coordonnées pôlaires [3]. En particulier si G est un produit $G(a,b) = G_1(a)G_2(b)$ alors

$$\mathbb{E}\left(G_1(R^2)G_2(\theta)\right) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{G_1(\rho^2)e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho}_{\text{ne dépend que de } \rho} d\rho\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi} \underbrace{G_2(\theta)}_{\text{que de } \theta} d\theta\right)$$

Par conséquent, les variables R^2 et θ sont indépendantes.
En outre on a pour toute G_1 absolument continue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(G_1(R^2)\right) &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sigma^2} G_1(\rho^2) e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2\sigma^2} G_1(u) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u} du \end{aligned}$$

et donc $R^2 \rightsquigarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2\sigma^2})$.

[3] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to E$ mesurable absolument continue, et soit à calculer $\int_{\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$.
Posons

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \left(\begin{array}{c} x^2+y^2 \\ \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}\right) \end{array}\right)$$

ϕ est différentiable et de jacobienne

$$Jac(\phi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} & \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{pmatrix}$$

donc de jacobien

$$\left|Jac(\phi)_{(x,y)}\right| = 2x\frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - 2y\left(-\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = 2$$

de sorte que

$$\int_{\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\phi(\mathcal{A})} f\left(\phi^{-1}(\rho^2,\theta)\right) 2\left(\frac{1}{2}\rho d\rho\right) d\theta$$

Par ailleurs pour toute G_2 absolument continue

$$\mathbb{E}\left(G_2(\theta)\right) = \int_{[0,2\pi[} G_2(\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

et donc $\theta \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$

Pour générer une réalisation d'une variable qui suivrait la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, on génère donc $\frac{\theta_n}{2\pi}$ uniformément sur $[0,1]$ et r_n^2 selon la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{\sigma^2})$ et on renvoit le nombre

$$\boxed{x_n = m + \sqrt{r_n^2}\cos\left(2\pi\left(\frac{\theta_n}{2\pi}\right)\right)}$$

(e)

$$F_{\mathcal{W}(\alpha,\beta)}(y) = \int_0^y f_{\mathcal{W}(\alpha,\beta)}(x)dx = 1 - e^{\alpha y^\beta}$$

et donc on génère u_n réalisation de $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ et on renvoit

$$\boxed{x_n = \left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left(u_n\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

(f) La densité $f_{\mathcal{P}(\lambda)}$ s'écrit sur $\mathbb{R}$ comme une somme infinie de masses de Diracq $f_{\mathcal{P}(\lambda)}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\delta_k(s)$ donc un algorithme consiste à générer u uniformément sur $[0,1]$ et à le placer dans l'un des intervalles $[S_n, S_{n+1}[$ où $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Le calcul des $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut néanmoins être dissuasif en pratique ; il est possible en fait de s'en passer.

Soient en effet $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{E}(\mu)$; alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_1 + \cdots + Y_n \rightsquigarrow \Gamma(n,\mu)$ (voir TD 1, exercice 2), et donc

$$\mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_n > 1\right) = \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}dt$$

Définissons alors $\nu(Y) = \min\{n \,/\, Y_1 + \cdots + Y_n > 1\} - 1$; alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\nu(Y) = n\right) &= \mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_{n+1} > 1\right) - \mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_n > 1\right) \\
&= \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt - \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{\mu^n n!}e^{-\frac{1}{\mu}}
\end{aligned}$$

et donc $\nu(Y) \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

Ainsi, engendrer une loi de Poisson de paramètre λ revient à engendrer une succession de lois exponentielles d'espérance $\frac{1}{\lambda}$. Or $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mathcal{W}\left(\frac{1}{\lambda},1\right)$ donc d'après la question précédente si $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $-\frac{1}{\lambda}\ln U \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Par conséquent posons $U_i = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}Y_i}$; U_i est uniforme, et en outre

$$\begin{aligned} Y_1 + \cdots + Y_n > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} \ln U_k > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad U_1 \cdots U_n > e^{-\lambda} \\ &\Leftrightarrow \quad X_n > e^{-\lambda} \end{aligned}$$

où $X_n = U_1 \cdots U_n$
Définissons donc finalement $N(X) = \min\{n / X_n < e^{-\lambda}\} - 1$; alors $N(X) = \nu(X)$, donc $N(X) \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Pour générer une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, il suffit donc de générer une suite $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ uniformes sur $[0,1]$, et de renvoyer le premier entier $n-1$ tel que $u_1 \cdots u_n > e^{-\lambda}$.
Un tel algorithme s'écrit : [4]

1 $n \leftarrow 0$ `et` $x \leftarrow 1$

2 `Tant que` $x > e^{-\lambda}$

3   `Générer` u_n `uniformément sur` $[0,1]$

4     $x \leftarrow x \times u_n$ `et` $n \leftarrow n+1$

5 `Renvoyer` n

⋆
⋆ ⋆

[4] Pour un exposé plus complet, voir D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 2, p 132.