ENSAE
ECOLE NATIONALE
DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE

Cursus Intégré
2004-2005

Rappels de statistique mathématique
Enoncé et corrigé des travaux dirigés n°8

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ `http://ensae.no-ip.com/SE222/`

Enoncé de l'exercice 1

Soit un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires i.i.d telles que :
- X_i a une probabilité α de valoir a, et
- une probabilité $(1-\alpha)$ de suivre une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$,

ce qui s'écrit encore :

$$X_1 = a \cdot \mathbb{1}_{Z_1=1} + Y_1 \cdot \mathbb{1}_{Z_1=0}$$

où $Z_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,\alpha)$ est indépendante de $Y_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

☞ Q1 Montrer que $(\delta_a + \lambda)^{\otimes n}$ est une mesure dominante pour le modèle considéré.

☞ Q2 Montrer que :

$$\frac{dP_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}{d(\delta_a+\lambda)^{\otimes n}} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha \mathbb{1}_a(x_i) + (1-\alpha)(1-\mathbb{1}_a(x_i))\phi(x_i))$$

où ϕ est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Posons $\mu = \delta_a + \lambda$ et $\mu_n = \mu^{\otimes n}$.

Remarque : nous restreindrons les démonstrations au cas où une seule observation X_1 est d ponible, dans la mesure où car la généralisation à n observations i.i.d. se réduit à un passa au produit immédiat :

$$dP_{X_1,\ldots,X_n} = \prod_{i=1}^{n} dP_{X_i}$$

$$\frac{dP_{X_1,\ldots,X_n}}{d\mu_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{dP_{X_i}}{d\mu}$$

Remarque préliminaire

Pour $\mathcal{A}$ ensemble mesurable, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}) &= \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A} | X_1 = a)\mathbb{P}(X_1 = a) + \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A} | X_1 \neq a)\mathbb{P}(X_1 \neq a) \\ &= \alpha \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A} | X_1 = a) + (1-\alpha)\int_{\mathcal{A}} \varphi(x) d\lambda(x) \end{aligned}$$

où φ désigne la densité de la loi normale centrée réduite.

Or $\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A} | X_1 = a)$ vaut 1 si $a \in \mathcal{A}$ et 0 sinon, de sorte que

$$\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}) = \alpha \mathbb{1}_{a \in \mathcal{A}} + (1-\alpha)\int_{\mathcal{A}} \varphi(x) d\lambda(x)$$

Or μ est une mesure dominante d'une variable X_1 ssi :

$$\forall \mathcal{A} \text{ mesurable, } \mu(\mathcal{A}) = 0{:}P_{X_1}(\mathcal{A}) = 0$$

En l'occurence pour tout $\mathcal{A}$ mesurable :
- $\mu(\mathcal{A}) = 0{:}\delta_a(\mathcal{A}) = 0$
- $\delta_a(\mathcal{A}) = 0{:}a \notin \mathcal{A}$, donc d'après 1 $\lambda(\mathcal{A}) = 0{:}P_{X_1}(\mathcal{A}) = 0$

Donc $(\delta_a + \lambda)^{\otimes n}$ est une mesure dominante.

☞ Q2 On a $\mathbb{1}_{a\in\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} \delta_a(x)$,
donc en reportant dans l'équation 1 il vient

$$P(X_1 \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} (\alpha\delta_a(x) + (1-\alpha)\varphi(x)d\lambda(x))$$

d'où on tire facilement

$$P(X_1 \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} (\alpha\mathbb{1}_a(x) + (1-\alpha)\varphi(x)(1-\mathbb{1}_a(x)))\, d\mu(x)$$

de sorte qu'en définitive

$$\frac{dP_{X_1}(x_1)}{d(\delta_a+\lambda)} = \alpha\mathbb{1}_a(x_1) + (1-\alpha)(1-\mathbb{1}_a(x_1))\phi(x_1)$$

d'où le résultat par indépendance de $(X_1, \ldots, X_n)$.

⋆
⋆ ⋆

Enoncé de l'exercice 2

Cet exercice s'inspire librement des travaux de Dov Samet, 2003.[1]

On s'intéresse pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires réelles à la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

$$(\mathcal{P})\ \ \forall\mathcal{A} \text{ mesurable, } \begin{cases} \mathbb{P}(X<Y \text{ et } X\in\mathcal{A}) = \mathbb{P}(X>Y \text{ et } X\in\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X\in\mathcal{A}) \\ \mathbb{P}(Y<X \text{ et } Y\in\mathcal{A}) = \mathbb{P}(Y>X \text{ et } Y\in\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y\in\mathcal{A}) \end{cases}$$

☞ Q1 Comment s'interprête la propriété $\mathcal{P}$?

■ Partie 1 ***"Devinez quel est le plus grand !"***

[1]Résultats présentés à la 14$^{\text{ième}}$ conférence internationale de Théorie des jeux, Stony Brook 2003.
Voir `Http ://www.sunysb.edu/gametheory/Conf03/twopuzzles.pdf` pour un exposé plus complet.

On s'intéresse au problème suivant, présenté originellement par Blackwell (1951) :

> Deux nombres réels sont tirés aléatoirement, et chacun est placé dans une enveloppe. L'une d'elle est (indépendamment) tirée au hasard et vous est présentée. Vous devez deviner, au vu du nombre qu'elle contient, s'il s'agit du plus grand ou le plus petit des deux. Sauriez-vous deviner juste plus d'une fois sur deux en moyenne ?

Pour simplifier la présentation, supposons que vous gagnez $+1$ si vous avez deviné juste et
sinon ; ce problème revient à savoir si vous pouvez vous garantir un gain espéré strictem
positif.

☞ Q1 Soient X et Y les deux nombres tirés aléatoirement, et supposons que (X, Y) vérifie $\mathcal{P}$.
Quel est votre meilleur gain espéré ? Interprêter.

☞ Q2 Cherchons néanmoins à construire une stratégie gagnante.
Pour ce faire, donnons-nous $s \in \mathbb{R}$ et soit σ_s : $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \{-1,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > s \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right)$ la *stratégie*
seuil associée à s.

(a) Soit $(x \neq y)$ une réalisation du tirage ; le nombre qui vous est présenté est soit x, soit
Quel est votre gain espéré en jouant selon σ_s sachant que $x < s$ et $y < s$?

(b) Quel est votre gain espéré sachant que $x < s < y$?

(c) En déduire que si votre gain espéré (sur tous les tirages possibles) est strictement positif.

☞ Q3 En déduire qu'aucune paire de variables aléatoires réelles (X, Y) ne peut vérifier $\mathcal{P}$.

■ Partie 2 ***Le jeu des enveloppes***

On s'intéresse désormais au célèbre jeu dit *des enveloppes*, introduit par Kraitchik (1953) so
la forme suivante :

> On considère deux enveloppes contenant une certaine somme d'argent, mais l'une contenant le double de l'autre ; chacune a autant de chances que l'autre de contenir la plus grosse somme. L'une d'elles vous est donnée au hasard, et vous devez choisir entre la prendre, ou prendre l'autre.
> A supposer qu'elle contienne x, l'autre a une chance sur deux de contenir $2x$ et une chance sur deux de contenir $\frac{x}{2}$; donc le contenu espéré de l'autre enveloppe est $\frac{5}{4}x > x$, de sorte que vous avez intérêt à changer d'enveloppe. Mais le même raisonnement s'applique aussi à la nouvelle enveloppe, de sorte que vous avez à nouveau intérêt à changer d'enveloppe, et ainsi de suite . . .
> Que faire dans cette situation ?

Résoudre ce paradoxe a été le prétexte à une littérature foisonnante ; voici une solution.
Notons X la somme (variable aléatoire réelle) contenue dans l'enveloppe qui vous est présent
et Y celle contenue dans l'autre.

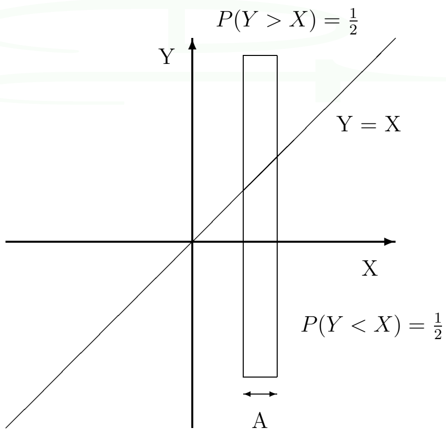
☞ Q1 Quel sens donner à l'expression $\mathcal{H}_x$: "l'autre a une chance sur deux de contenir $2x$ et une chance sur deux de contenir $\frac{x}{2}$" ?

☞ Q2 En déduire que si cette hypothèse est vraie, alors la distribution de (X, Y) vérifie $\mathcal{P}$.

☞ Q3 Conclure.

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Si un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) vérifie $\mathcal{P}$, alors au voisinage de tout X, la probabilité est la même pour Y d'être au-dessus ou au-dessous de X, comme illustré sur la figure suivante :



Pour simplifier la présentation, supposons que vous gagnez $+1$ si vous avez deviné juste et -1 sinon ; ce problème revient à savoir si vous pouvez vous garantir un gain espéré strictement positif.

☞ Q1 Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$ votre stratégie, et soient (x, y) une réalisation du tirage.
- Si x vous est présenté :
  Si $x > y$, votre gain est $\sigma(x)$; si $x < y$, votre gain est $-\sigma(x)$. Votre gain espéré, sachant que x vous est présenté, est donc nul.
- Si y vous est présenté, il en va de même.

Le choix de l'enveloppe étant indépendant du tirage de X et de Y, votre gain espéré est toujours nul, quelle que soit votre stratégie.

Comme l'hypothèse $\mathcal{P}$ semble "raisonnable", l'intuition suggère qu'à ce jeu vous ne pourrez jamais obtenir un gain espéré strictement positif. Cette intuition est cependant erronée.

☞ Q2 (a) On a dans tous les cas $\sigma(x) = \sigma(y) = -1$ car $x < s$ et $y < s$.
Or si $x < y$, le gain espéré est

$$\mathbb{P}(\text{le nombre présenté est } x) \cdot 1 + \mathbb{P}(\text{le nombre présenté est } y) \cdot (-1) = 0$$

puisque ces deux alternatives sont équiprobables et que le choix de l'enveloppe est in pendant du tirage de X et de Y.
Il en va de même lorsque $x > y$, de sorte que le gain espéré, sachant que $x < s$ et $y <$ est nul.

(b) Si le nombre présenté est x, on a $\sigma(x) = -1$ car $x < s$; or $x < y$, donc la réponse est ju et le gain est $+1$.
Si le nombre présenté est y, on a $\sigma(y) = +1$ car $y > s$; or $y > x$, donc la réponse encore juste et le gain est toujours $+1$.
Ainsi dans tous les cas le gain espéré, sachant que $x < s < y$, est $+1$. Il en va de mê bien-sûr sachant que $y < s < x$.

(c) D'après les résultats précédents le gain espéré en jouant σ_s est donc

$$\boxed{g(s) = \mathbb{P}(X < s < Y) + \mathbb{P}(Y < s < X)}$$

Or ces deux probabilités ne peuvent être simultanément nulles pour tout s : en effet

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X < s < Y) + \mathbb{P}(Y < s < X) ds &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbb{1}_{x<s<y} + \mathbb{1}_{y<s<x} \right) f_{X,Y}(x,y) dx dy \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x<s<y} ds + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y<s<x} ds \right) f_{X,Y}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbb{1}_{x<y}(y-x) + \mathbb{1}_{y<x}(y-x) \right) f_{X,Y}(x,y) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |x-y| \, \mathbb{1}_{x \neq y} f_{X,Y}(x,y) dx dy s \\
&= \mathbb{E}(|X-Y|)
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ alors $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ et le jeu devient trivial : la stratégie qui préte que le nombre tiré est le plus grand est presque sûrement toujours gagnante ; en particu lorsque $s = 0$ $g(0) > 0$.
Et si $\mathbb{P}(X \neq Y) \neq 0$ alors $\mathbb{E}(|X - Y|) > 0$, et donc $\int_{\mathbb{R}} g(s) ds > 0$.
Donc dans tous les cas

$$\boxed{\exists s \in \mathbb{R} \ / \ g(s) > 0}$$

En fait, si (X, Y) est distribué de telle sorte que toute partie de mesure non-nulle a u probabilité non-nulle, alors *n'importe quel* seuil s assure un gain espéré strictement positi

☞ Q3 Si une telle distribution sur $\mathbb{R}^2$ existait, alors d'après la question (1) dans le jeu de Blackw associé nul ne saurait gagner plus que zéro en moyenne, ce qui est pourtant possible d'aprè question (2).

☞ Q1 La formulation du paradoxe suggère que l'on se donne une distribution de probabilité a priori sur les deux sommes X et Y ; cette distribution est nécessairement telle que $\mathbb{P}(X = 2Y \text{ ou } Y = 2X) = 1$.

Etant donné $x \in \mathbb{R}$ et à supposer que $X = x$, l'hypothèse $\mathcal{H}_x$ s'exprime en termes mathématiques sous la forme

$$\mathbb{P}(Y = 2x \,|\, X = x) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{x}{2} \,|\, X = x\right) = \frac{1}{2}$$

☞ Q2 L'hypothèse $\mathcal{H}_y$ analogue à la précédente en $Y = y \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$\mathbb{P}(X = 2y \,|\, Y = y) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y}{2} \,|\, Y = y\right) = \frac{1}{2}$$

Dans l'énoncé du paradoxe, l'hypothèse selon laquelle "chacune a autant de chances que l'autre de contenir la plus grosse somme" se traduit alors en $\mathcal{H}_x$ quelle que soit la somme x de la première enveloppe, et $\mathcal{H}_y$ quelle que soit la somme y de la deuxième enveloppe.

En d'autres termes

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y = 2x \,|\, X = x) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{x}{2} \,|\, X = x\right) = \frac{1}{2} \\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = 2y \,|\, Y = y) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y}{2} \,|\, Y = y\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'événement $Y = 2x$ est égal à l'événement $Y > x$, et l'événement $Y = \frac{x}{2}$ à $Y < x$. Par suite

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y > x \,|\, X = x) = \mathbb{P}(Y < x \,|\, X = x) = \frac{1}{2} \\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X > y \,|\, Y = y) = \mathbb{P}(X < y \,|\, Y = y) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Par conséquent pour toute partie mesurable $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(X \in A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y \in \mathcal{A}) \neq 0$ il vient

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(Y > X | X \in \mathcal{A}) = \mathbb{P}(Y < X | X \in \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X > Y | Y \in \mathcal{A}) = \mathbb{P}(X < Y | Y \in \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \end{array}$$

de sorte que (X, Y) vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

☞ Q3 Ainsi, à supposer que l'on se donne une distribution a priori sur les sommes d'argent de chacune des deux enveloppes, il n'est pas possible de traduire l'hypothèse "chacune a autant de chances que l'autre de contenir la plus grosse somme" comme il est suggéré, car la distribution vérifierait alors la propriété $\mathcal{P}$ ce qui n'est pas possible.

La démarche proposée, bien qu'intuitive, n'est donc pas raisonnable : en particulier il est faux qu'après un nombre quelconque de changements d'enveloppe on ait "à nouveau intérêt à changer d'enveloppe".

⋆

⋆ ⋆

Enoncé de l'exercice 3

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires i.i.d dans $\mathbb{R}^k$, de loi paramétrique $\mathcal{P}_\theta$ de densité

$$\frac{d\mathcal{P}_\theta(x)}{d\lambda} = f(x - \theta)$$

$\theta \in \mathbb{R}^k$ est appelé *paramètre de position.*

On cherche à étudier les estimateurs T du paramètre θ. On se restreint pour cela à la classe d
estimateurs *équivariants*, c'est-à-dire des estimateurs T vérifiant :

$$\forall c \in \mathbb{R}^k, T(X_1 + c, \ldots, X_n + c) = T(X_1, \ldots, X_n) + c$$

Cette restriction est naturelle : en effet, pour tout $c \in \mathbb{R}^k$, $X_i + c \leadsto \mathcal{P}_{\theta+c}$, et on ne peut admet
qu'un simple changement d'échelle puisse mener à une estimation différente.

☞ Q1 Montrer que :

$$\text{T équivariant} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists T_1 : (\mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^k) \;/\; \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^k \\ T(x_1, \ldots, x_n) = T_1(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1) + x_1 \end{array}$$

☞ Q2 Soit $W(x, y) = w(x - y)$ une fonction de perte. Montrer que, si un estimateur T est équivaria
le risque associé, pour la perte W, ne dépend pas de θ.

Un estimateur équivariant T qui minimise le risque $R_w(T, 0)$ (c'est-à-dire au point $\theta = 0$)
alors un estimateur optimal (parmi les équivariants) pour la fonction de perte W.

☞ Q3 Soit la fonction

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} w(x - u) \prod_{i=1}^n f(X_i - u) du$$

et l'estimateur T^* défini par

$$\psi(T^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^k} \psi(x)$$

T^* est appelé *l'estimateur de Pitman* (on suppose ici que w est telle que l'équation $\psi(x^*)$
$\inf_{x \in \mathbb{R}^k} \psi(x)$ admette une solution et une seule).

(a) Montrer que T^* est équivariant.

(b) Montrer que, pour toute fonction φ telle que $\mathbb{E}(\|\varphi(X_1, \ldots, X_n)\|) < +\infty$, on a :

$$\begin{array}{l} E_\theta[\varphi(X_1, ..., X_n) | X_2 - X_1, ..., X_n - X_1] = \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(X_1 + \theta - u, ..., X_n + \theta - u) \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i - u)}{\int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^n f(X_i - v) dv} du \end{array}$$

(c) Montrer finalement que T^* est optimal pour w.

☞ Q4 Donner l'expression de T^* lorsque $w(x - y) = \|x - y\|^2$.

☞ Q5 Dans ce cas, que vaut T^* lorsque $X_i \leadsto \mathcal{N}(\theta, 1)$?

Et lorsque $X_i \leadsto \mathcal{U}_{[-\frac{1}{2}+\theta, \frac{1}{2}+\theta]}$?

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Il suffit de poser $c = -x_1$ dans la définition de l'équivariance.

☞ Q2 Le risque associé vérifie :

$$\begin{aligned}
R_w(T,\theta) &= E_\theta[w(T-\theta)] \\
&= \int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(x_1,\ldots,x_n)-\theta)\prod_{\iota=1}^n f(x_i-\theta)dx_i \\
&= \int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(x_1-\theta,\ldots,x_n-\theta))\prod_{\iota=1}^n f(x_i-\theta)dx_i \\
&= \int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(u_1,\ldots,u_n))\prod_{\iota=1}^n f(u_i)du_i \\
&= R_w(T,0)
\end{aligned}$$

en effectuant un changement de variable $u_i = x_i - \theta$.

☞ Q3 (a) Soit $c \in \mathbb{R}^k$; on a

$$\begin{aligned}
\psi(x+c) &= \int w(x+c-u)\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du \\
&= \int w(x-v)\prod_{i=1}^n f(X_i-c-v)dv
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $v = u - c$.
En particulier $\psi(x+X_1) = \int w(x-v)f(-v)\prod_{i=2}^n f\left((X_i-X_1)-v\right)dv$
Donc $\psi(x+X_1)$ ne dépend que de x et des variables aléatoires $X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1$: soit donc T_1 tel que $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^k}\psi(x+X_1) = T_1(X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1)$.
Or $\forall\phi, \forall c\in\mathbb{R}^k,\quad \arg\inf\left(x\mapsto\phi(x+c)\right) = \left(\arg\inf\left(x\mapsto\phi(x)\right)\right) - c$.
Donc en définitive

$$T_1(X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1) = (\arg\inf\psi) - X_1 = T^* - X_1$$

Autrement dit T^* est équivariant d'après la question précédente.

(b)

$$\begin{aligned}
&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n] \\
&= \int \varphi(x_1,x_1+y_2,\ldots,x_1+y_n)d\mathbb{P}(X_1=x_1|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n) \\
&= \int \varphi(x_1,x_1+y_2,\ldots,x_1+y_n)\frac{f(x_1-\theta)\prod_{i=2}^n f(x_1+y_i-\theta)}{\left[\int f(x_1-\theta)\prod_{i=2}^n f(x_1+y_i-\theta)dx_1\right]}dx_1
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables $u = \theta - x_1 + c$ (c constante quelconque) dans deux intégrales :

$$\begin{aligned}
&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n] \\
&= \int \varphi(c+\theta-u,c+y_2+\theta-u,\ldots)\frac{f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+y_i-u)}{\left[\int f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+y_i-u)du\right]}du
\end{aligned}$$

La relation suivante est alors vraie pour tout $c \in \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned}
&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1] \\
&= \int \varphi(c+\theta-u,c+X_2-X_1+\theta-u,\ldots)\frac{f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+X_i-X_1-u)}{\left[\int f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+X_i-X_1-u)du\right]}
\end{aligned}$$

elle est donc vraie aussi pour $c = X_1$:

$$\begin{aligned}
&E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1] \\
&= \int \varphi(X_1+\theta-u,X_2+\theta-u,\ldots)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i-u)}{\left[\int f(X_1-u)\prod_{i=2}^n f(X_i-u)du\right]}du
\end{aligned}$$

(c) Soit T un estimateur équivariant quelconque. On va montrer que T^* domine T. Pour c il suffit de prouver que $R_w(T,0) \geq R_w(T^*,0)$, selon le résultat de la question (2).

$$\begin{aligned}
R_w(T,0) &= \mathbb{E}_0[w(T)] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0[w(T)|X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1]] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\int_{\mathbb{R}} w(T-u)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i-u)}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}du\right]
\end{aligned}$$

Or par définition de T^*, pour tous $x\in\mathbb{R}^n$ et $t\in\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} w(T^*(x)-u)\prod_{i=1}^n f(x_i-u)du \leq \int_{\mathbb{R}} w(t-u)\prod_{i=1}^n f(x_i-u)du$$

donc

$$\begin{aligned}
R_w(T,0) &\geq \mathbb{E}_0\left[\int_{\mathbb{R}} w(T^*(X)-u)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i-u)}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}du\right] \\
&= R_w(T^*,0)
\end{aligned}$$

Donc T^* domine T.

☞ Q4 Si $w(x-y) = \|x-y\|^2$, ψ vaut :

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^k}\|x-u\|^2\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du$$

et le gradient $\psi'(x)$ vaut : $\psi'(x) = \int_{\mathbb{R}^k} 2(x-u) \ \prod_{i=1}^n f(X_i - u)du$. T^* est défini par l'équation $\psi'(T^*) = 0$, qui se réduit ici à :

$$T^* = \frac{\int_{\mathbb{R}^k} u \prod_{i=1}^n f(X_i - u)du}{\int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^n f(X_i - u)du}$$

☞ Q5 Lorsque $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a

$$T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

Si $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$, il vient

$$T^* = \frac{\min(X_i) + \max(X_i)}{2}$$

⋆
⋆ ⋆

Enoncé de l'exercice 4

On considère une loi multinomiale à K modalités ($K \geq 3$) de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_K$. On dispose de n observations indépendantes issues de cette loi. On notera N_k le nombre d'observations de la modalité $k \in [\![1, K]\!]$.

On veut tester l'hypothèse : $\underline{H_0}$: "$p_1 + p_2 = \frac{1}{2}$"

☞ Q1 Donner les estimateurs du maximum de vraisemblance contraints $(\widehat{p_k^0})_k$ et non contraints $(\widehat{p_k})_k$ de $p_1, \ldots, p_K$.

☞ Q2 Calculer la statistique ξ^W du test de Wald de l'hypothèse H_0.

☞ Q3 (a) En constatant que $\widehat{p_3^0}$ est asymptotiquement efficace sous H_0, montrer que

$$\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0}, \widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right) = 0$$

et en déduire que

$$\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right) = \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right) - \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)$$

(b) Calculer la loi limite de $\left(\widehat{p_3^0} - p_3\right)$, et en déduire $\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)$.

(c) Donner un estimateur $\widehat{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)}$ convergent sous H_0 de $\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)$. En déduire l'expression de la statistique du test d'Hausman de H_0

$$\xi^H = n\frac{\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)^2}{\widehat{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)}}$$

(d) Vérifier que le test d'Hausman est convergent.

(e) Montrer que les statistiques ξ^W et ξ^H sont asymptotiquement équivalentes sous H_0.

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 Les observations étant les effectifs N_k de chaque classe $k \in [\![1, K]\!]$, la vraisemblance s'écrit

$$L_{N_1,\ldots,N_K}(n_1, \ldots, n_K; p_1, \ldots, p_K) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_K!}\prod_{k=1}^K {p_k}^{n_k} \quad \text{en notant } n = n_1 + \cdots + n_K$$

La maximisation sans hypothèse conduit aux conditions nécessaires du premier ordre, en n'om
tant la contrainte $p_1 + \cdots + p_K = 1$

$$\begin{array}{l} \max_{p_1,\ldots,p_K}\left(\sum_{k=1}^K n_k \ln p_k\right) \\ \text{s.c. } \{p_1 + \cdots + p_K = 1 \end{array}$$

Le lagrangien associé s'écrit

$$\mathcal{L}(p_1, \ldots, p_K, \lambda) = \sum_{k=1}^K n_k \ln p_k + \lambda(1 - \sum_{k=1}^K p_k)$$

et il vient

$$\forall k \in [\![1, K]\!], \ \frac{n_k}{\widehat{p_k}} - \lambda = 0$$

Or en sommant de 1 à K il vient

$$n = \sum_{k=1}^K n_k = \lambda\sum_{k=1}^K p_k = \lambda$$

de sorte que finalement

$$\boxed{\forall k \in [\![1, K-1]\!], \ \widehat{p_k} = \frac{n_k}{n}}$$

(et on vérifie que cette condition est également suffisante).

La maximisation sous l'hypothèse H_0 correspond au programme de maximisation s
contrainte

$$\begin{array}{l} \max_{p_1,\ldots,p_K}\left(\sum_{k=1}^K n_k \ln p_k\right) \\ \text{s.c. } \left\{\begin{array}{l} p_1 + \cdots + p_K = 1 \\ p_1 + p_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}$$

Le lagrangien associé s'écrit

$$\mathcal{L}(p_1,\dots,p_K,\lambda,\mu)=\sum_{k=1}^{K}n_k\ln p_k+\lambda(1-\sum_{k=1}^{K}p_k)+\mu(\frac{1}{2}-p_1-p_2)$$

et il vient

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_1}=\frac{n_1}{p_1}-\lambda-\mu\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_2}=\frac{n_2}{p_2}-\lambda-\mu\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_k}=\frac{n_k}{p_k}-\lambda, \quad \forall k\in[\![3,K]\!]\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=1-\sum_{k=1}^{K}p_k\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu}=\frac{1}{2}-p_1-p_2\end{cases}$$

d'où finalement

$$\boxed{\begin{cases}\widehat{p_1^0}=\frac{n_1}{2(n_1+n_2)}\\ \widehat{p_2^0}=\frac{n_2}{2(n_1+n_2)}\\ \widehat{p_k^0}=\frac{n_k}{2(n_3+\dots+n_K)}, \quad \forall k\in[\![3,K]\!]\end{cases}}$$

☞ Q2 Pour déterminer la statistique de Wald, appliquons le Théorème Central Limite à $\begin{pmatrix}\widehat{p_1}\\ \vdots\\ \widehat{p_K}\end{pmatrix}$; pour ce faire, calculons tout d'abord sa variance.
On a en effet pour $k\in[\![1,K]\!]$, $\widehat{p_k}=\frac{n_k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{X_i\in C_k}$ où C_k désigne la k-ième classe ; or

$$\mathbb{V}\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k}\right)=p_k\cdot 1-(p_k)^2=p_k(1-p_k)$$

et

$$\mathbb{C}ov\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k},\mathbb{1}_{X_j\in C_l}\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k}\cdot\mathbb{1}_{X_j\in C_l}\right)-\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k}\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_j\in C_l}\right)=-p_kp_l\mathbb{1}_{i=j}$$

de sorte que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{p_1}-p_1\\ \vdots\\ \widehat{p_K}-p_K\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\begin{pmatrix}p_1(1-p_1) & -p1p_2 & \cdots & -p_1p_K\\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_K\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -p_Kp_1 & -p_Kp_2 & \cdots & p_K(1-p_K)\end{pmatrix}\right)$$

Posons finalement $g:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^K & \to & \mathbb{R}\\ x_1,\dots,x_K & \mapsto & x_1+x_2\end{pmatrix}$; alors d'après le théorème de Slutsky, si H_0 est vraie on a

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\left(\frac{\partial g}{\partial p_1,\dots,p_K}\right)'\mathbb{V}\left(\begin{pmatrix}\widehat{p_1}\\ \vdots\\ \widehat{p_K}\end{pmatrix}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_1,\dots,p_K}\right)\right)\\ &= \mathcal{N}\left(0,(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)\right)\end{aligned}$$

d'où en centrant et en réduisant, puis en élevant au carré

$$\boxed{\xi_n^W=n\frac{\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\widehat{p_1}+\widehat{p_2})(1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2})}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\chi_1^2}$$

☞ Q3 (a) On sait que $\widehat{p_3^0}\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}p_3$ et que $\widehat{p_3}\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}p_3$.
Soit donc pour $\lambda\in\mathbb{R}$ $p_3(\lambda)=\lambda\widehat{p_3^0}+(1-\lambda)\widehat{p_3}\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}p_3$.
Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{as}\left(p_3(\lambda)\right) &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}+\lambda\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\right)\\ &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)+2\lambda\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)+\lambda^2\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\\ &\geq \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)\end{aligned}$$

car $\widehat{p_3^0}$ est asymptotiquement efficace, car sa variance est égale à la borne FDCR $I(p_3)$
Par conséquent le polynôme du second degré $P(\mathbb{X})=\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\mathbb{X}^2+2\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3}-\right.$
est de signe constant. En particulier,

$$\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)=0$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right) &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\right)\\ &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)+\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)=\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right)-\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)}$$

(b) La loi asymptotique de $\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)$ se déduit de celle de $\begin{pmatrix}\widehat{p_1}\\ \vdots\\ \widehat{p_K}\end{pmatrix}$ déterminée précédemme

Soit en effet $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^K & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_K) & \mapsto & \frac{x_3}{2(1-x_1-x_2)} \end{pmatrix}$; ainsi $g(\widehat{p_3}) = \widehat{p_3^0}$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_1}(p_1,\dots,p_K) &= \frac{p_3}{2\left(1-p_1-p_2\right)^2} \\
&= 2p_3 \\
\frac{\partial g}{\partial x_2}(p_1,\dots,p_K) &= \frac{p_3}{2\left(1-p_1-p_2\right)^2} \\
&= 2p_3 \\
\frac{\partial g}{\partial x_3}(p_1,\dots,p_K) &= 1 \\
\frac{\partial g}{\partial x_k}(p_1,\dots,p_K) &= 0, \quad \forall k \in [\![3,K]\!]
\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Slutsky

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\widehat{p_3^0} - p_3\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \quad & \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} 2p_3 \\ 2p_3 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \cdots & -p_1p_K \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_Kp_1 & -p_Kp_2 & \cdots & p_K(1-p_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2p_3 \\ 2p_3 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
= \quad & \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} 2p_3 \\ 2p_3 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} 2p_3p_1(1-p_1) - 2p_1p_2p_3 - p_1p_3 \\ -2p_1p_2p_3 + 2p_3p_2(1-p_2) - p_2p_3 \\ -2{p_3}^2p_1 - 2{p_3}^2p_2 + p_3(1-p_3) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
= \quad & \mathcal{N}\left(0, \left\{ \begin{array}{l} 4{p_3}^2p_1(1-p_1) - 4p_1p_2{p_3}^2 - 2p_1{p_3}^2 \\ -4p_1p_2{p_3}^2 + 4{p_3}^2p_2(1-p_2) - 2p_2{p_3}^2 \\ -2{p_3}^2p_1 - 2{p_3}^2p_2 + p_3(1-p_3) \end{array}\right.\right) \\
= \quad & \mathcal{N}\left(0, \left\{ \begin{array}{l} [4p_1(1-p_1) - 4p_1p_2 - 2p_1 - 4p_1p_2 + \\ \quad 4p_2(1-p_2) - 2p_2 - 2p_1 - 2p_2]\,{p_3}^2 \\ -{p_3}^2 + p_3 \end{array}\right.\right) \\
= \quad & \mathcal{N}\left(0, \left\{-4(p_1+p_2)^2{p_3}^2 - {p_3}^2 + p_3\right)\right. \\
= \quad & \boxed{\mathcal{N}\left(0, p_3(1-2p_3)\right)} \quad \text{sous } H_0 : \text{“ } p_1 + p_2 = \frac{1}{2} \text{ ”}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right) = p_3(1-2p_3)}$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right) &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right) - \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right) \\
&= p_3(1-p_3) - p_3(1-2p_3) \\
&= \boxed{{p_3}^2}
\end{aligned}$$

Posons donc $\widehat{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)} = \widehat{p_3}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)$. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}
\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0} &= \frac{n_3}{n} - \frac{n_3}{2(n - n_1 - n2)} \\
&= \frac{n_3}{n}\left(1 - \frac{1}{2(1 - \frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n})}\right) \\
&= \widehat{p_3}\left(1 - \frac{1}{2(1 - \widehat{p_1} - \widehat{p_2})}\right) \\
&= \widehat{p_3}\frac{1 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}{2 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\xi_n^H &= n\frac{\widehat{p_3}^2\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2}{\widehat{p_3}^2} \\
&= \boxed{n\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2
\end{aligned}$$

(d) Si H_0 est fausse, alors $p_1 + p_2 \neq \frac{1}{2}$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\xi_n^H &= \left(\frac{1 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}{2 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}\right)^2 \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \left(\frac{p_1 + p_2 - \frac{1}{2}}{1 - p_1 - p_2}\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\xi_n^H \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} (+\infty)$$

Ainsi, si H_0 est fausse alors $\mathbb{P}\left(\xi_n^H < q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left((+\infty) < q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}\right) = 0$: le test d'Hausman est donc convergent.

(e) On a enfin

$$\begin{aligned}\frac{\xi_n^H}{\xi_n^W} &= \frac{n\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2}{n\frac{\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\widehat{p_1}+\widehat{p_2})(1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2})}} \\ &= \frac{\widehat{p_1}+\widehat{p_2}}{1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} (1)\end{aligned}$$

Ainsi, les deux statistiques de test ξ_n^H et ξ_n^W sont asymptotiquement équivalentes.

⋆

⋆ ⋆

Enoncé de l'exercice 5

La mise en œuvre de nombreuses techniques d'analyse, et notamment la quasi-totalité des techniques d'estimation et de test de modèles statistiques, nécessitent d'*engendrer* des réalisations x d'une variable aléatoire réelle X de loi $\mathcal{L}$ donnée.

L'objet de cet exercice est de présenter quelques techniques permettant à un ordinateur, machine essentiellement déterministe, d'engendrer de telles variables. Il s'agit donc de construire pour toute loi $\mathcal{L}$ une fonction récursive $f^{\mathcal{L}} : \mathbb{N} \to I$ qui énumère des réalisations d'un variable $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$, *i.e.* telle que la distribution empirique des $\left(f^{\mathcal{L}}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la vraie distribution $F^{\mathcal{L}}$.

☞ Q1 Cherchons tout d'abord à engendrer une variable aléatoire **entière** uniforme.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\mathcal{L} = \mathcal{U}_{[\![0,N-1]\!]}$.

(a) Définissons pour $\phi : [\![0, N-1]\!] \to [\![0, N-1]\!]$ et $s \in [\![0, N-1]\!]$

$$f_{\phi,s} : \left(\begin{array}{ccc} [\![0,N-1]\!] & \to & [\![0,N-1]\!] \\ t & \mapsto & \phi^t(s) \end{array}\right)$$

Montrer que $f_{\phi,s}$ est périodique à partir d'un certain rang ; on note $T_{\phi,s}$ sa période.
En quel sens peut-on dire que $f_{\phi,s}$ "génère" une variable uniformément distribuée sur $[\![0, N-1]\!]$?

(b) En quel sens peut-on dire que $f_{\phi,s}$ est d'autant meilleure que $T_{\phi,s}$ est grande ?

(c) Soient $a \in [\![2, N-1]\!]$, $c \in [\![0, N-1]\!]$ et $p \in [\![2, N-1]\!]$ et définissons $\psi_{a,c,p}$: $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & [\![0,N-1]\!] \\ n & \mapsto & (an+c) \mod p \end{array}\right)$.
A quelles conditions $f_{\psi_{a,c,p},s}$ est-elle un bon générateur uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$?

☞ Q2 Cherchons à engendrer une variable aléatoire réelle uniforme sur $[0, 1]$.

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, et définissons pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n^x(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

On dit de x qu'elle vérifie le *critère de Weyl* si pour toute f continue

$$S_n^x(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$$

Comment s'interprète ce critère ?

(b) Soit $r \in \mathbb{R}$, et définissons $x = (frac(rk))_{k\in\mathbb{N}}$ où $frac(u) = u - E(u) \in [0,1[$ désigne
partie fractionnaire de $u \in \mathbb{R}$.
Montrer que x vérifie le critère de Weyl *ssi* r est irrationnel.

☞ Q3 On cherche désormais à engendrer des réalisations d'une variable aléatoire de loi quelconque

(a) Soit $\mathcal{L}$ la loi de densité $f_{\mathcal{L}} = \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{5}{12}\delta_3$.
Tracer la fonction de répartition $F_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$.
En déduire son inverse généralisée

$$F^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \inf\{x \in \mathbb{R} \,/\, F_{\mathcal{L}}(x) \geq s\} \end{array}\right)$$

Soit $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ et définissons $X = F_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$; quelle est la loi de X ?

(b) Soit alors $F_{\mathcal{L}}$ la fonction de répartition supposée continue et strictement croissante d'u
loi $\mathcal{L}$ quelconque.
On définit de même $X = F_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ pour $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$; quelle est la loi de X ?

(c) Proposer un algorithme qui génère des réalisations successives d'une variable X de
exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de densité $f_{\mathcal{E}_\lambda}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $\lambda > 0$.

(d) Soit $(X,Y) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\left(\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right), \sigma^2 I_2\right)$.
Soient $R^2 = X^2 + Y^2$ et $\theta = \arctan\frac{Y}{X}$.
Montrer que R^2 et θ sont indépendantes, et donner leurs lois.
En déduire un algorithme de génération d'une variable gaussienne.

(e) Même question si X suit une loi de Weibull $\mathcal{W}(\alpha,\beta)$ de densité $f_{\mathcal{W}(\alpha,\beta)}(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}$

(f) Même question si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de densité $f_{\mathcal{P}(\lambda)}(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
On pourra comparer $x_n = u_1 \times \cdots \times u_n$, où chaque u_n est une réalisation de $U \rightsquigarrow U_{[0,1}$
$e^{-\lambda}$.

Corrigé de l'exercice 5

☞ Q1 (a) Comme $[\![0, N-1]\!] \subsetneq \mathbb{N}$ $f_{\phi,s}$ n'est pas injective, soient $i < j$ les deux premiers entiers tels que $f_{\phi,s}(i) = f_{\phi,s}(j)$, et posons $T = j - i \geq 1$. Alors $f_{\phi,s}(i+T) = f_{\phi,s}(i)$, donc $f_{\phi,s}(i+1+T) = f_{\phi,s}(i+1)$ et par récurrence $\forall k \geq i, f_{\phi,s}(k+T) = f_{\phi,s}(k)$ et donc $f_{\phi,s}$ et périodique au-delà de i.

Remarquons que la suite $(f_{\phi,s}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est *déterministe* et pas aléatoire ; ll s'agit de déterminer si elle peut être la suite des *réalisations* d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[\![0, N-1]\!]$.

Définissons $g(k) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}|\{i \in \mathbb{N}/y(i) = k\}|$ la fréquence empirique de $k \in [\![0, N-1]\!]$; alors $f_{\phi,s}$ "génère" une variable distribuée selon la loi $\mathcal{L}$ sur $[\![0, N-1]\!]$ si la fréquence empirique de tout k est égale à sa probabilité selon $\mathcal{L}$.

En particulier, $f_{\phi,s}$ est uniformément distribuée *ssi* $\forall k \in [\![0, N-1]\!] f_{\phi,s}(k) = \frac{1}{N-1}$.

(b) On a $T \leq N$: en effet pour tout $a \in \mathbb{N}$, $t \mapsto f_{\phi,s}(a+t)$ ne peut pas être injective de $[\![0, N]\!]$ vers $[\![0, N-1]\!]$, donc il existe $i < j \in [\![0, N]\!]$ tel que $f_{\phi,s}(a+j) = f_{\phi,s}(a+i)$, et par suite $T_{\phi,s} \leq N$.

Or si $T_{\phi,s} < N$, alors $f_{\phi,s}([i, +\infty[) = \{f_{\phi,s}(i), f_{\phi,s}(i+1), \ldots, f_{\phi,s}(i+T_{\phi,s}-1)\}$, donc $|f_{\phi,s}([i, +\infty[)| \leq T_{\phi,s} < N$, et donc $f_{\phi,s}([i, +\infty[) \subsetneq [\![0, N-1]\!]$. Ainsi l'un au moins des entiers de $[\![0, N-1]\!]$ n'est plus jamais atteint au-delà de i, et sa fréquence empirique est donc nulle : $f_{\phi,s}$ ne "génère" pas une loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$.

Remarquons réciproquement que si $f_{\phi,s}$ est périodique de période exactement N, alors elle est uniforme.

Ainsi, un "bon générateur" de nombres pseudo-aléatoires sur $[\![0, N-1]\!]$ est périodique de période N.

(c) Par définition de la division euclidienne, $f_{\psi_{a,c,p},s}$ est à valeur dans $[\![0, p-1]\!]$ donc pour qu'elle soit un bon générateur sur $[\![0, N-1]\!]$ il est nécessaire que $p = N$.

Par ailleurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et sa période divise p. Donc si $c = 0$ et si p est premier, $f_{\psi_{a,c,p},s}$ est de période 1 ou p, donc p (car $a \geq 2$), et est donc un bon générateur uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$ (en fait il suffit que p soit premier avec a, et il n'est pas nécessaire que $c = 0$).

Ces générateurs ont été introduits par Lehmer et sont encore souvent utilisés[2]. On sait notamment que $2^{31} - 1 = 2147483647$ est premier (vérifié par Euler en 1750), ainsi que $2^{61} - 1$ (Pervouchine 1883) et $2^{127} - 1$ (Lucas, 1876). [3]

☞ Q2 (a) Il s'agit d'une sorte de critère ergodique : la suite x est suffisamment "équi-répartie" et "équilibrée" pour que sommer aux points chargés par x ou sommer en tout point de $[0, 1]$ soit équivalent.

(b) Supposons que r est rationnel.

[2] cf Knuth, D.E., 1981 ; The Art of Computer Programming, Volume 2 Seminumerical Algorithms, Addison-Wesley, Reading Mass., 688 pages, ISBN 0-201-03822-6

[3] Parmi les nombres sous la forme $2^n - 1$ seuls ceux où $n \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127\}$ sont premiers, et non pas seulement pour $n \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257\}$ comme prétendu incorrectement par Marin Mersenne dans la préface de Cogitata Physica-Mathematica (1644). Parmi les $2^{2^n-1} - 1$ courants en informatique, ceux pour $n \in \{2, 3, 5, 7\}$ sont premiers.

– Supposons tout d'abord que $f_p = x \mapsto e^{2\pi ipx}$, $p \in \mathbb{Z}$. Par définition $rk = frac(rk$ $E(rk)$ et donc

$$\begin{aligned} S_n^x(f_p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi ipx_k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{(2p\pi i)\,rk} \text{ car } e^{(2p\pi i)E(rk)} = 1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(e^{(2p\pi i)\,r}\right)^k \end{aligned}$$

Comme r est irrationnel, si $p \neq 0$, alors $e^{(2p\pi i)r} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned} S_n^x(f_p) &= \frac{1}{n}\frac{e^{(2p\pi i)r} - \left(e^{(2p\pi i)r}\right)^{n+1}}{1 - e^{(2p\pi i)r}} \\ &= \frac{1}{n}e^{(2p\pi i)r\frac{n+1}{2}}\frac{\sin(\pi nr)}{\sin(\pi r)} \end{aligned}$$

et donc

$$|S_n^x(f_p)| \leq \frac{1}{n}\frac{1}{|\sin(\pi r)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

soit

$$S_n^x(f_p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[0,1]} e^{2\pi piu}du$$

Lorsque $p = 0$, on a bien-sûr $S_n^x(f_0) = 1 = \int_{[0,1]} f_0$.

– Le résultat reste donc vrai par linéarité de l'intégrale pour tout polynôme trigonor trique.

– Soit enfin f continue sur $[0, 1]$; d'après le théorème de Dirichlet f est limite *unifor* d'une suite $(P_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques. Donc

$$\begin{aligned} S_n^x(f) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lim_{l\to\infty} P_l(x_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} S_{nb}^x(P_k) \quad \text{car la somme } \sum_{k=1}^{n} \text{ est finie} \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} P_l \quad \text{d'après le résultat précédent} \\ &= \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} P_l \quad \text{cqr la convergence de } (P_l)_{l\in\mathbb{N}} \text{ est uniforme} \\ &= \int_{[0,1]} f \end{aligned}$$

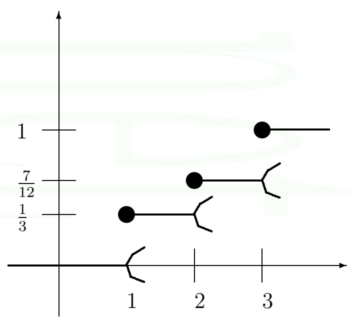
ce qui achève la preuve.

Dans le cas en revanche où $r = \frac{a}{b}$ est rationnel, alors $(rk)_{k\in\mathbb{N}} = \{0, \frac{1}{b}, \dots, \frac{b-1}{b}\}$: la suite x ne prend que b valeurs distinctes et le résultat est faux, par exemple lorsque f est la fonction affine par morceaux telle que

$$\begin{cases} f\left(\frac{k}{b}\right) & = 1 \\ f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{b}\right) & = 2 \end{cases}$$

car alors $S_n^x(f) = 1 < \frac{3}{2} = \int_{[0,1]} f$.

☞ Q3 (a) Le graphe de $F_{\mathcal{L}}$ est le suivant :



On a donc

$$F_{\mathcal{L}}^{-1}(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } 0 = t \\ 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{3} \\ 2 & \text{si } \frac{1}{3} \leq t < \frac{7}{12} \\ 3 & \text{si } \frac{7}{12} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Par conséquent lorsque $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, $X = F_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ ne charge positivement que $\{1,2,3\}$ et on a

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{P}(X=1) & = & \mathbb{P}\left(0 \leq U < \frac{1}{3}\right) & = & \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X=2) & = & \mathbb{P}\left(\frac{1}{3} \leq U < \frac{7}{12}\right) & = & \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(X=3) & = & \mathbb{P}\left(\frac{7}{12} \leq U < 1\right) & = & \frac{5}{12} \end{array}$$

de sorte que $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$.

(b) On a pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(X \leq t) & = & \mathbb{P}\left(F_{\mathcal{L}}^{-1}(U) \leq t\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(U \leq F_{\mathcal{L}}(t)\right) & \text{car } F_{\mathcal{L}} \text{ est croissante} \\ & = & F_{\mathcal{L}}(t) & \text{car } U \rightsquigarrow U_{[0,1]} \end{array}$$

Par conséquent $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$.

Remarquons que $F_{\mathcal{L}}$ étant strictement croissante, c'est sa continuité qui nous assure qu'elle est bijective.

(c)

$$F_{\mathcal{E}(\lambda)}(u) = \int_0^u \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(1 - e^{-\lambda u}\right)$$

Soit donc $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$; alors $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$; or par ailleurs $(1-U) \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, donc $-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

On génère donc u_n réalisation de $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ et on renvoit $x_n = -\frac{1}{\lambda}\ln(u_n)$.

(d) Soit $G : \mathbb{R}^2 \to R^n$ absolument continue ; alors

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left(G(R^2,\theta)\right) & = & \int_{\mathbb{R}^2} G\left(x^2+y^2, \arctan\frac{y}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dyxy \\ & = & \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} G\left(\rho^2,\theta\right) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho d\theta \end{array}$$

par le changement de variables en coordonnées pôlaires [4]. En particulier si G est un prod $G(a,b) = G_1(a)G_2(b)$ alors

$$\mathbb{E}\left(G_1(R^2)G_2(\theta)\right) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{G_1(\rho^2)e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho}_{\text{ne dépend que de } \rho} d\rho\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi} \underbrace{G_2(\theta)}_{\text{que de } \theta} d\theta\right)$$

Par conséquent, les variables R^2 et θ sont indépendantes.

En outre on a pour toute G_1 absolument continue

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left(G_1(R^2)\right) & = & \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sigma^2} G_1(\rho^2) e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho \\ & = & \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2\sigma^2} G_1(u) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u} du \end{array}$$

et donc $R^2 \rightsquigarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2\sigma^2})$.

[4] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to E$ mesurable absolument continue, et soit à calculer $\int_{\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$.
Posons

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{si } x<0 \end{cases} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ϕ est différentiable et de jacobienne

$$Jac(\phi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} & \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{pmatrix}$$

donc de jacobien

$$\left|Jac(\phi)_{(x,y)}\right| = 2x\frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - 2y\left(-\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = 2$$

de sorte que

$$\int_{\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\phi(\mathcal{A})} f\left(\phi^{-1}(\rho^2,\theta)\right) 2\left(\frac{1}{2}\rho d\rho\right) d\theta$$

Par ailleurs pour toute G_2 absolument continue

$$\mathbb{E}\left(G_2(\theta)\right) = \int_{[0,2\pi[} G_2(\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

et donc $\theta \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$

Pour générer une réalisation d'une variable qui suivrait la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, on génère donc $\frac{\theta_n}{2\pi}$ uniformément sur $[0,1]$ et r_n^2 selon la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{\sigma^2})$ et on renvoit le nombre

$$\boxed{x_n = m + \sqrt{r_n^2}\cos\left(2\pi\left(\frac{\theta_n}{2\pi}\right)\right)}$$

(e)

$$F_{\mathcal{W}(\alpha,\beta)}(y) = \int_0^y f_{\mathcal{W}(\alpha,\beta)}(x)dx = 1 - e^{\alpha y^\beta}$$

et donc on génère u_n réalisation de $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ et on renvoit

$$\boxed{x_n = \left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left(u_n\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

(f) La densité $f_{\mathcal{P}(\lambda)}$ s'écrit sur $\mathbb{R}$ comme une somme infinie de masses de Diracq $f_{\mathcal{P}(\lambda)}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\delta_k(s)$ donc un algorithme consiste à générer u uniformément sur $[0,1]$ et à le placer dans l'un des intervalles $[S_n, S_{n+1}[$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Le calcul des $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut néanmoins être dissuasif en pratique ; il est possible en fait de s'en passer.

Soient en effet $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{E}(\mu)$; alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_1 + \cdots + Y_n \rightsquigarrow \Gamma(n,\mu)$ (voir TD 1, exercice 2), et donc

$$\mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_n > 1\right) = \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}dt$$

Définissons alors $\nu(Y) = \min\{n \,/\, Y_1 + \cdots + Y_n > 1\} - 1$; alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\nu(Y) = n\right) &= \mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_{n+1} > 1\right) - \mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_n > 1\right)\\ &= \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt - \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}dt\\ &= \frac{1}{\mu^n n!}e^{-\frac{1}{\mu}}\end{aligned}$$

et donc $\nu(Y) \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

Ainsi, engendrer une loi de Poisson de paramètre λ revient à engendrer une succession de lois exponentielles d'espérance $\frac{1}{\lambda}$. Or $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mathcal{W}\left(\frac{1}{\lambda},1\right)$ donc d'après la question précédente

si $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $-\frac{1}{\lambda}\ln U \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Par conséquent posons $U_i = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}Y_i}$; U_i uniforme, et en outre

$$\begin{aligned}Y_1 + \cdots + Y_n > 1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\ln U_k > 1\\ &\Leftrightarrow U_1\cdots U_n > e^{-\lambda}\\ &\Leftrightarrow X_n > e^{-\lambda}\end{aligned}$$

où $X_n = U_1\cdots U_n$

Définissons donc finalement $N(X) = \min\{n/X_n < e^{-\lambda}\} - 1$; alors $N(X) = \nu(X)$, d $N(X) \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Pour générer une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, il suffit donc de générer une suite $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ uniformes $[0,1]$, et de renvoyer le premier entier $n-1$ tel que $u_1\cdots u_n > e^{-\lambda}$.

Un tel algorithme s'écrit : [5]

```
1 n ← 0 et x ← 1
2 Tant que x > e^{-λ}
3    Générer u_n uniformément sur [0,1]
4    x ← x × u_n et n ← n+1
5 Renvoyer n
```

⋆

⋆ ⋆

[5] Pour un exposé plus complet, voir D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 2, p 132.