Cursus Intégré
2004-2005

Rappels de statistique mathématique
Corrigé des travaux dirigés n°1 à 8

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
✉ Guillaume.Lacote@ensae.fr
☞ http://ensae.no-ip.com/SE222/

Version du 20050421-15h38, révisée le 21 avril 2005

Table des matières

1 Travaux Dirigés n°1
Exercice 1
Exercices 2 et 3
Exercice 4

2 Travaux Dirigés n°2
Exercice 1
Exercice 2
Exercice 3
Exercice 4

3 Travaux Dirigés n°3
Exercice 1
Exercice 2
Exercice 3

4 Travaux Dirigés n°4
Exercice 1
Exercice 2
Exercice 3

5 Travaux Dirigés n°5
Exercice 1
Exercice 2
Exercice 3

6 Travaux Dirigés n°6
Exercice 1
Exercice 2
Exercice 3

7 Travaux Dirigés n°7
Exercice 1
Exercice 2
Exercice 3
Exercice 4

8 Travaux Dirigés n°8
Exercice 1
Exercices 2 et 3
Exercice 4

Exercice 5 108

1 Travaux Dirigés n°1

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Par définition $Y_i^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$,
donc $\frac{Y_i^* - m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$
et par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Y_i^* \geq 0\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y_i^* - m}{\sigma} \geq -\frac{m}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

puisque la distribution de la loi normale est symétrique. Ainsi

$$Y_i \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(1, \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\right)$$

☞ Q2 Le couple (m, σ^2) n'est clairement pas identifiable, car

$$\mathcal{B}\left(1, \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\right) = \mathcal{B}\left(1, \Phi\left(\frac{2m}{2\sigma}\right)\right)$$

En revanche, le rapport $\frac{m}{\sigma}$ l'est (en vertu du théorème de factorisation).

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 – Si $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\forall x > 0,\ \mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda t)dt = e^{-\lambda x}$
– La réciproque s'obtient par dérivation de l'égalité précédente :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)$ existe et vaut $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$,
donc toute variable aléatoire réelle vérifiant l'inégalité précédente admet une densité qui
celle de $\mathcal{E}(\lambda)$.

☞ Q2 – On a successivement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > t) &= \mathbb{P}(X_1 > t \wedge X_2 > t) \quad \text{par définition de } Z \\ &= \mathbb{P}(X_1 > t)\mathbb{P}(X_2 > t) \quad \text{par indépendance} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

Donc Z suit une loi $\mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

– Par définition

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 > X_1) &= \int\int \mathbb{1}_{(v>u)}.\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\lambda_2 e^{-\lambda_2 v} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 t}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}$$

☞ Q3 (a) Il s'agit de n observations i.i.d de loi $\mathcal{E}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Modèle : $\{\mathbb{R}^{+n}, \mathcal{E}(\lambda_1+\lambda_2)^{\otimes n}, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^{+2}\}$
Vraisemblance : $L_n = (\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sum Z_i}$
Bien entendu seule la somme $(\lambda_1+\lambda_2)$ est identifiable.

(b) Cette fois, on dispose de la variable supplémentaire $S_i = \mathbb{1}_{(X_2>X_1)}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z > t \,|\, S_i = 1) &= \mathbb{P}(X_2 > X_1 > t) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(u>v>t)}\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\lambda_2 e^{-\lambda_2 v} du dv \\ &= \int_t^{+\infty}\left(\int_v^{+\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du\right)\lambda_2 e^{-\lambda_2 v} dv \\ &= \int_t^{+\infty}\left(e^{-\lambda_1 v}\right)\lambda_2 e^{-\lambda_2 v} dv \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t)\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}(Z > t \,|\, S_i = 0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t)$
Les densités correspondantes s'en déduisent (au signe près) par dérivation selon t :

$$\begin{aligned}L_n &= \prod_{s_i=1}\{\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z_i}\}\prod_{s_i=0}\{\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z_i}\} \\ &= \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sum_{i=1}^n z_i}\end{aligned}$$

où $n_1 = |\{i \,/\, s_i = 1\}|$ et $n_2 = |\{i \,/\, s_2 = 1\}| = n - n_1$.
Le couple (λ_1, λ_2) est donc identifiable, et on peut donc envisager d'estimer à la fois λ_1 et λ_2.

☞ Q4 (a) La loi $\Gamma(k,\lambda)$ admet pour densité $f(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x>0}$.
En particulier, toute loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est une loi $\Gamma(1,\lambda)$.
On a en outre : *la somme de deux variables indépendantes de lois* $\Gamma(k,\lambda)$ *et* $\Gamma(l,\lambda)$ *suit une loi* $\Gamma(k+l,\lambda)$.

Cette propriété se prouve par récurrence sur k : [1]
soit $U \rightsquigarrow \Gamma(k,\lambda)$ et $V \rightsquigarrow \Gamma(1,\lambda)$; alors $W = U + V$ a pour densité :

$$\begin{aligned}f_W(w) &= \int_{u+v=w}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}u^{k-1}e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda v} du dv \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}u^{k-1}e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda(w-u)} du \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!}e^{-\lambda w}\int_0^{+\infty}u^{k-1}du = \frac{\lambda^{k+1}}{k!}e^{-\lambda w}\end{aligned}$$

de sorte que $W \rightsquigarrow \Gamma(k+1,\lambda)$.
Ainsi la somme de $n \geq 1$ variables indépendantes qui suivent une loi exponentielle
même paramètre λ suit une loi $\Gamma(n,\lambda)$.

(b) On a $Z = \min\left(\sum_{i=0}^{n_1} X_1^i, \sum_{j=0}^{n_2} X_2^j\right)$ où $(\sum_{i=0}^{n_1} X_1^i) \rightsquigarrow \Gamma(n_1+1,\lambda_1)$ et $(\sum_{i=0}^{n_2} X_2^i) \rightsquigarrow \Gamma(n$
$1, \lambda_2)$.
Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geq t) &= \mathbb{P}\left(\left(\sum_{i=0}^{n_1} X_1^i \geq t\right) \text{ et } \left(\sum_{i=0}^{n_2} X_2^i \geq t\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n_1} X_1^i \geq t\right) \times \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n_2} X_2^i \geq t\right) \quad \text{par indépendance} \\ &= \left(\int_t^{+\infty}\frac{\lambda_1}{n_1!}e^{-\lambda_1 x}(\lambda_1 x)^{n_1} dx\right) \times \left(\int_t^{+\infty}\frac{\lambda_2}{n_2!}e^{-\lambda_2 x}(\lambda_2 x)^{n_2} dx\right)\end{aligned}$$

(c) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq t) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \\ &= \frac{\exp(-\lambda(s+t))}{\exp(-\lambda t)} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= \mathbb{P}(X \geq s)\end{aligned}$$

Cette propriété caractérise la loi exponentielle.
En l'occurence, $Z_0 = \min(X_1^0, X_2^0) \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda_1+\lambda_2)$
Supposons que la première panne ait lieu au temps t (donc $Z_0 = t$) ; supposons (sans pe
de généralité) qu'elle touche une machine de type 1. On a alors :

$$(Z_1 | Z_0 = t \wedge S_0 = 1) = (\min(X_1^1, X_2^0) | X_2^0 > t)$$

[1] Elle se montre aussi à l'aide des fonctions caractéristiques.

où X_1^1 désigne le temps de fonctionnement d'une nouvelle machine de type 1 (et suit donc une $\mathcal{E}(\lambda_1)$), et X_2^0 désigne le temps jusqu'à la première panne de l'"ancienne" machine de type 2.

Or $(X_2^0 | X_2^0 > t)$ suit une loi $\mathcal{E}(\lambda_2)$ (la loi exponentielle est "sans mémoire"), et on a a nouveau

$$(Z_1 | Z_0 = t \wedge S_0 = 1) \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Un raisonnement similaire dans le cas d'une panne de type 2 montre que la loi de Z_1 est indépendante de Z_0 et S_0 :

$$Z_i \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)(i.i.d)$$

(d) *Remarque* : Attention à la convention de l'exercice : il y a (n_1+1) machines de type 1 : n_1 sont en stock, et une est déjà présente dans le système. Il y a donc panne générale quand le stock est épuisé pour un type de machine, **et qu'en plus la dernière machine du même type tombe en panne**.

On a $\min(n_1, n_2) \leq N \leq n_1 + n_2 - 1$. En outre N ne peut prendre la valeur $k \in [\![\min(n_1, n_2, n_1 + n_2 - 1]\!]$ que dans deux cas :

– les n_1 machines de types 1 sont sorties du stock, $(k - n_1)$ machines de type 2 sont sorties du stock, et la dernière machine de type 1 tombe en panne (rappelons qu'il y a (n_1+1) machines de type 1).

– cas symétrique en échangeant type 1 et type 2.

Notons $p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ et$p_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$. Une nouvelle panne a une probabilité p_1 de concerner une machine de type 1, p_2 de type 2.

On a alors

$$\forall k \geq n_1, n_2, \quad \mathbb{P}(N = k) = p_1 C_k^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{k-n_1} + p_2 C_k^{n_2} p_2^{n_2} p_1^{k-n_2}$$

Ainsi, si par exemple $n_1 \leq k < n_2$, on a $\mathbb{P}(N = k) = p_1 C_k^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{k-n_1}$.

(e) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z | N = n\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} Z_i\right) \\
&= (n+1)\mathbb{E}\left(Z_1\right) \\
&= \frac{n+1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}\left(Z\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z|N\right)\right)$, donc finalement

$$\mathbb{E}\left(Z\right) = \frac{\mathbb{E}\left(N\right) + 1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 <u>*Rappel :*</u> la statistique T est dite *exhaustive ssi* la loi conditionnelle $\mathbb{P}_\theta\left(X \in \cdot | T\left(X\right)\right)$ est in pendante de θ.

<u>*Théorème de factorisation :*</u> T est exhaustive *ssi*

$$\exists g_\theta, h : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ p_\theta(x) = g_\theta\left(T\left(x\right)\right) h(x)$$

où g_θ dépend de θ mais pas h.

On retrouve les statistiques exhaustives en écrivant la vraisemblance du modèle et en appliqu le théorème de factorisation.

Dans le cas présent le paramètre du modèle est $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$. On a pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$L_n(x) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

D'où une statistique exhaustive : $S(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$.

☞ Q2 Le paramètre du modèle étant $(\alpha, \theta) \in \Theta = \mathbb{R}^2$, on a

$$L_n(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\theta}\right)^n \frac{\theta^{n\alpha}}{\exp(\alpha \sum_{i=1}^n \log(x_i))} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty]}(\min x_i)$$

D'où **une** statistique exhaustive :

$$S(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i), \min x_i\right)$$

☞ Q3 Cette fois le paramètre du modèle est $(\alpha, \theta) \in \Theta = \mathbb{R}^{+*2}$. On a

$$L_n(x) = \alpha^n \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha - 1} \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\min_i x_i)$$

Dans ce cas, on ne peut exhiber de statistique exhaustive autre que $T(X_1, \ldots, X_n)$ $(X_1, \ldots, X_n)$. En revanche, si on estimait uniquement θ (α constante connue), alors $T(x)$ $\sum_{i=1}^n x_i^\alpha$ serait une statistique exhaustive.

☞ Q4 La densité[2] de la loi $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$ est

$$f_{\mathcal{U}_{[0,\theta]}}(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{x \geq 0} \mathbb{1}_{x \leq \theta}$$

[2] En toute rigueur le modèle $\left(\mathcal{U}_{[0,\theta]}\right)_{\theta \in \mathbb{R}^{+*}}$ n'est pas dominé (il n'y a pas une unique mesure μ qui domine toutes probabilités $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$).

Mais pour tout $M > 0$, le sous-modèle $\left(\mathcal{U}_{[0,\theta]}\right)_{\theta \in]0,M]}$ est dominé (par la mesure particulière qu'est la probabilit $\mathcal{U}_{[0,M]}$). On exhibe donc ici une statistique $T(X)$ qui est exhaustive pour tout sous-modèle : elle est donc telle que

$$\forall M, \forall \theta \in]0, M], \text{ la loi de } X | T(X) \text{ ne dépend pas de } \theta$$

et donc

$$\forall \theta > 0, \text{ la loi de } X | T(X) \text{ ne dépend pas de } \theta$$

et donc $T(X)$ est bien exhaustive dans le modèle originel.

et on a donc

$$
\begin{aligned}
L_n(x_1,\dots,x_n) &= \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n\geq 0}\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n\leq\theta}\\
&= \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{\min x_i\geq 0}\mathbb{1}_{\max x_i\leq\theta}
\end{aligned}
$$

et une statistique exhaustive est donc $T(x) = \max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 On applique $n-1$ fois la *formule du conditionnement* $\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})\mathbb{P}(\mathcal{B})$:
Ici :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_n = y_n,\dots,Y_1=y_1)\\
=\ &\mathbb{P}(Y_n = y_n|Y_{n-1}=y_{n-1},\dots,Y_1=y_1)\times\mathbb{P}(Y_{n-1}=y_{n-1},\dots,Y_1=y_1)\\
&\vdots\quad\text{(par récurrence)}\\
=\ &\left\{\begin{array}{ll} & \mathbb{P}(Y_n=y_n|Y_{n-1}=y_{n-1},\dots,Y_1=y_1)\\ \times & \mathbb{P}(Y_{n-1}=y_{n-1}|Y_{n-2}=y_{n-2},\dots,Y_1=y_1)\\ \vdots & \\ \times & \mathbb{P}(Y_1=y_1)\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

☞ Q2 Soit p le nombre de poissons distincts qui ont été tirés au cours des n premiers tirages. Supposons que $R_n = r_n$: il y a eu r_n retirages d'un poisson déjà tiré au moins une fois, donc $p + r_n = n$. Ainsi après $n-1$ tirages le nombre de poissons distincts tirés est $n-1-r_{n-1}$, et la proportion de poissons qui ont été tirés (et sont donc marqués) est

$$\boxed{\frac{n-1-r_{n-1}}{\theta}}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(Y_n=y_n|R_{n-1}=r_{n-1}) = \left(\frac{n-1-r_{n-1}}{\theta}\right)^{y_n}\left(1-\frac{n-1-r_{n-1}}{\theta}\right)^{1-y_n}$$

Donc d'après le résultat précédent la vraisemblance s'écrit

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_1=y_1,\dots,Y_n=y_n;\theta)\\
=\ &\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i=y_i|Y_{i-1}=y_{i-1},\dots,Y_1=y_1)\\
=\ &\prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(Y_i=y_i|R_{i-1}=r_{i-1},Y_{i-1}=(r_{i-1}-y_{i-1}-\cdots-y_1),Y_{i-2}=y_{i-2},\dots,Y_1=y_1\right)\\
=\ &\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i=y_i|R_{i-1}=r_{i-1})\quad\text{car la loi de } Y_i|R_{i-1},Y_{i-1},\dots,Y_1 \text{ ne dépend pas de } Y_1,\dots\\
=\ &\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i=y_i|Y_{i-1}=y_{i-1},\dots,Y_1=y_1)\\
=\ &\prod_{i=1}^n\left(\left(\frac{i-1-r_{i-1}}{\theta}\right)^{y_i}\left(\frac{\theta-i+1+r_{i-1}}{\theta}\right)^{1-y_i}\right)\\
=\ &\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{\theta}(i-1-r_{i-1})^{y_i}(\theta-i+1+r_{i-1})^{1-y_i}\right)
\end{aligned}
$$

qui est proportionnel à

$$\boxed{\prod_{i=1}^n\frac{1}{\theta}(\theta-i+1+r_{i-1})^{1-y_i}}$$

par le facteur $\prod_{i=1}^n(i-1-r_{i-1})^{y_i}$ qui ne dépend pas de θ et n'a donc pas d'incidence sur détermination d'une statistique exhaustive (d'après le théorème de factorisation).[3]

☞ Q3 On a successivement

$$\prod_{i=1}^n\frac{(\theta-i+1+r_{i-1})^{1-y_i}}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n(\theta-(i-1-r_{i-1}))^{1-y_i}$$

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(y_i=1)$:$(\theta-(i-1-r_{i-1}))^{1-y_i}=1$, donc

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\theta^n}\times\prod_{\left\{\begin{array}{l}1\leq i\leq n\\ y_i=1\end{array}\right.} 1\ \times\prod_{\left\{\begin{array}{l}1\leq i\leq n\\ y_i=0\end{array}\right.}(\theta-(i-1-r_{i-1}))\\
&= \frac{1}{\theta^n}\prod_{\left\{\begin{array}{l}1\leq i\leq n\\ j_i=i-1-r_{i-1}\\ y_i=0\end{array}\right.}(\theta-j_i)
\end{aligned}
$$

[3]Ce facteur aurait bien entendu une influence pour le calcul de l'information de Fisher ou du maximum de vrais-
blance.

Or $\phi : i \mapsto i-1-r_{i-1}$ associe au nombre de tirages le nombre de poissons distincts tirés. Donc restreinte à $\mathcal{I}_0 = \{i \leq n \,/\, y_i = 0\}$ (l'ensemble des i tels que le i-ième poisson tiré est un nouveau poisson pas encore marqué), c'est une bijetion de $\mathcal{I}_0$ sur $[\![\phi(1), \phi(i_0)]\!]$ où $i_0 = \max \mathcal{I}_0$. Donc

$$\prod_{\left\{\begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ j_i = i-1-r_{i-1} \\ y_i = 0 \end{array}\right.} (\theta - j_i) = \prod_{1 \leq j \leq \phi(i_0)} (\theta - j)$$

Remarquons enfin que par définition de i_0, $\forall j > i_0, j \notin \mathcal{I}_0$ et donc $y_j = 1$ de sorte que

$$\phi(i_0) = i_0 - 1 - r_{i_0} = (i_0 + (j - i_0)) - 1 - (r_{i_0} + (j - i_0)) = j - 1 - r_{i_0+(j-i_0)} = j - 1 - r_j$$

de sorte que $\phi(i_0) = n - 1 - r_n$ et en définitive la vraisemblance est proportionnelle à

$$\frac{1}{\theta^n} \prod_{1 \leq j \leq n-1-r_n} (\theta - j) \quad = \quad \boxed{\frac{1}{\theta^n} \frac{(\theta-1)!}{(\theta-n-1+r_n)!}}$$

☞ Q4 On a alors

$$l(y, \theta) = g_\theta(R_n(y)) \times h(y)$$

où

$$h(y) = \prod_{i=1}^{n} (i - 1 - R_{i-1}(y))^{y_i}$$

qui est indépendant de θ, et

$$g_\theta(R_n(y)) = \frac{1}{\theta^n} \frac{(\theta-1)!}{(\theta - n - 1 + R_n(y))!}$$

qui ne dépend de y qu'au travers de $R_n(y)$.
Donc d'après le théorème de factorisation R_n est une statistique exhaustive. Ainsi pour estimer le nombre de poissons dans le lac, la connaissance de tous les tirages est superflue et le seul nombre total de poissons tirés plus d'une fois suffit.

⋆
⋆ ⋆

2 Travaux Dirigés n°2

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Loi de $(Y_1, \ldots, Y_r)$: il existe au moins deux méthodes.

Méthode rapide mais pas naturelle :

L'idée ici est de considérer tous les réordonnancements de r variables parmi n telles q
les r premières soient croissantes et plus petites que les $n-r$ suivantes.
Plus précisément, soit $\mathcal{A}_n^r$ l'ensemble des parties à $r \leq n$ éléments d'un ensemble à $n \geq$
éléments.
Alors pour $y_1 < \ldots < y_r$ et $dy_1, \ldots, dy_r$, avec $0 < dy_i < \frac{y_{i+1}-y_i}{2}$

$$\mathbb{P}\left(Y_1 \in [y_1, y_1 + dy_1[, \ldots, Y_r \in [y_r, y_r + dy_r[\right)$$

$$= \sum_{\pi \in \mathcal{A}_n^r} \mathbb{P}\left(\begin{array}{l} X_{\pi_1} \in [y_1, y_1 + dy_1[\wedge \ldots \wedge X_{\pi_r} \in [y_r + y_r + dy_r[\\ \wedge X_{\pi_1} < \cdots < X_{\pi_r} \wedge \forall i \notin \pi, X_i > y_r + dy_r \end{array}\right)$$

où π_k est le k-ième élément de la partie π à r éléments parmi $[\![1, n]\!]$

$$= |\mathcal{A}_n^r| \times \left\{\begin{array}{ll} & \mathbb{P}\left(Z_1 \in [y_1, y_1 + dy_1[\right) \cdots \mathbb{P}\left(Z_r \in [y_r + y_r + dy_r[\right) \\ \times & \mathbb{1}_{y_1 < \cdots < y_r} \\ \times & \mathbb{P}\left(Z_{r+1} > y_r + dy_r\right) \cdots \mathbb{P}\left(Z_n > y_r + dy_r\right) \end{array}\right.$$

car les $[y_i, y_i + dy_i[$ sont disjoints, et les Z_i sont indépendantes car les X_i le son

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \times \left\{\begin{array}{ll} & (F(y_1 + dy_1) - F(y_1)) \cdots (F(y_r + dy_r) - F(y_r)) \\ \times & \mathbb{1}_{y_1 < \cdots < y_r} \\ \times & (1 - F(y_r + dy_r)) \cdots (1 - F(y_r + dy_r)) \end{array}\right.$$

En divisant et en faisant successivement tendre $dy_r \to 0^+, \ldots, dy_1 \to 0^+$ il vient [4]

[4]Précisément :

$$\frac{1}{dy_1} \mathbb{P}\left(Y_1 \in [y_1, y_1 + dy_1[, \ldots, Y_r \in [y_r, y_r + dy_r[\right) \xrightarrow[dy_1 \to 0^+]{} \frac{n!}{(n-r)!} \times \left\{\begin{array}{ll} & f(y_1)\ (F(y_2 + dy_2) - F(y_2)) \cdots (F(y_r + \\ \times & (1 - F(y_r + dy_r))^{n-r} \end{array}\right.$$

puis

$$\frac{1}{dy_1 \cdots dy_{r-1}} \mathbb{P}\left(Y_1 \in [y_1, y_1 + dy_1[, \ldots, Y_r \in [y_r, y_r + dy_r[\right) \xrightarrow[dy_1 \to 0^+ ; \ldots ; dy_{r-1} \to 0^+]{} \frac{n!}{(n-r)!} \left\{\begin{array}{l} f(y_1) \cdots f(y_{r-1})\ (F(y_r + dy \\ \times (1 - F(y_r + \end{array}\right.$$

et finalement

$$\frac{1}{dy_1 \cdots dy_r} \mathbb{P}\left(Y_1 \in [y_1, y_1 + dy_1[, \ldots, Y_r \in [y_r, y_r + dy_r[\right) \xrightarrow[dy_1 \to 0^+ ; \ldots ; dy_r \to 0^+]{} \frac{n!}{(n-r)!} f(y_1) \cdots f(y_r)\ (1 - F(y_r + dy$$

$$\boxed{\forall (y_1,\dots,y_r) \in \mathbb{R}^r,\, l(y_1,\dots,y_r) = \tfrac{n!}{(n-r)!}\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_r} f(y_1)\dots f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}}$$

Méthode simple mais longue :

L'idée est ici de calculer d'abord la loi de $(Y_1,\dots,Y_n)$, puis d'en tirer celle de $(Y_1,\dots,Y_r)$ au moyen de la relation $f_X(x) = \int_{\mathcal{Y}} f_{X,Y}(x,y)dy$.
Donnons-nous donc $\mathcal{A}$ mesurable quelconque.
Alors

$$((Y_1,\dots,Y_n)\in\mathcal{A}) \Leftrightarrow \left(\exists\sigma\,/\,(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}\in\mathcal{A} \text{ et } X_{\sigma(1)}\le\dots\le X_{\sigma(n)}\right)$$

et donc presque sûrement

$$((Y_1,\dots,Y_n)\in\mathcal{A}) \Leftrightarrow \left(\exists\sigma\,/\,(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}\in\mathcal{A} \text{ et } X_{\sigma(1)}<\dots< X_{\sigma(n)}\right)$$

de sorte que

$$\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_n)\in\mathcal{A}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathbb{P}\left((X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\in\mathcal{A}\ \wedge\ X_{\sigma(1)}<\dots<X_{\sigma(n)}\right)$$

où $\sigma\in\mathcal{S}_n$ désigne une permutation des n indices telle que le n-uplet soit ordonné en plus d'être dans $\mathcal{A}$. Or pour toute $\sigma\in\mathcal{S}_n$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\in\mathcal{A}\ \wedge\ X_{\sigma(1)}<\dots<X_{\sigma(n)}\right)\\
=\ &\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{A}}\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_n}\, f_{X_{\sigma(1)}}(y_1)\cdots f_{X_{\sigma(n)}}(y_n)\,dy_1\cdots dy_n\\
=\ &\int_{\mathcal{A}}\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_n}\, f(y_1)\cdots f(y_n)\,dy_1\cdots dy_n \quad \text{car les } (X_i)_i \text{ sont i.i.d}
\end{aligned}$$

et donc comme $|\mathcal{S}_n| = n!$

$$\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_n)\in\mathcal{A}) = n!\int_{\mathcal{A}}\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_n}\, f(y_1)\dots f(y_n)\,dy_1\dots dy_n$$

On en conclut que

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = n!\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_n} f(y_1)\dots f(y_n)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
f_{Y_1,\dots,Y_{n-1}}(y_1,\dots,y_{n-1}) &= n!\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_{n-1}} f(y_1)\dots f(y_{n-1})\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{y_{n-1}<y_n} f(y_n)dy_n\\
&= n!\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_{n-1}} f(y_1)\dots f(y_{n-1})\int_{y_{n-1}}^{+\infty} f(y_n)dy_n\\
&= n!\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_{n-1}} f(y_1)\dots f(y_{n-1})\,(1-F(y_{n-1}))
\end{aligned}$$

De façon similaire

$$\begin{aligned}
f_{Y_1,\dots,Y_{n-2}}(y_1,\dots,y_{n-2}) &= n!\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_{n-2}} f(y_1)\dots f(y_{n-2})\int_{y_{n-2}}^{+\infty} f(y_{n-1})\,(1-F(y_{n-1}))\,dy_{n-1}\\
&= n!\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_{n-2}} f(y_1)\dots f(y_{n-2})\,\left[-\frac{1}{2}(1-F(u))^2\right]_{y_{n-2}}^{+\infty}\\
&= \frac{n!}{2!}\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_{n-2}} f(y_1)\dots f(y_{n-2})\,(1-F(y_{n-2}))^2
\end{aligned}$$

On en conclut donc par récurrence que

$$\boxed{\forall (y_1,\dots,y_r) \in \mathbb{R}^r,\, l(y_1,\dots,y_r) = \tfrac{n!}{(n-r)!}\mathbb{1}_{y_1<\dots<y_r} f(y_1)\dots f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}}$$

Loi de Y_r seul :

On a :

$$\begin{aligned}
&f_{Y_2,\dots,Y_r}(y_2,\dots,y_r)\\
=\ &\frac{n!}{(n-r)!} f(y_2)\dots f(y_r)\dots f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}\,\mathbb{1}_{y_2<\dots<y_r}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{y_1<y_2} f(y_1)dy_1\\
=\ &\frac{n!}{(n-r)!} f(y_2)\dots f(y_r)\dots f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}\,\mathbb{1}_{y_2<\dots<y_r}\int_{-\infty}^{y_2} f(y_1)dy_1\\
=\ &\frac{n!}{(n-r)!} f(y_2)\dots f(y_r)\dots f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}\,\mathbb{1}_{y_2<\dots<y_r} F(y_2)
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&f_{Y_3,\dots,Y_r}(y_3,\dots,y_r)\\
=\ &\frac{n!}{(n-r)!} f(y_3)\dots f(y_r)\dots f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}\,\mathbb{1}_{y_3<\dots<y_r}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{y_2<y_3} F(y_2)f(y_2)dy_2\\
=\ &\frac{n!}{2!(n-r)!} f(y_3)\dots f(y_r)\dots f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}\,\mathbb{1}_{y_3<\dots<y_r} F(y_3)^2
\end{aligned}$$

Et par une récurrence immédiate il vient

$$\boxed{\forall y_r\in\mathbb{R},\, l(y_r) = \tfrac{n!}{(n-r)!(r-1)!} F(y_r)^{r-1} f(y_r)\,(1-F(y_r))^{n-r}}$$

On notera la densité du plus petit des x_i, à savoir

$$l(y_1) = n\,(1-F(y_1))^{n-1} f(y_1)$$

et symétriquement celle du plus grand

$$l(y_n) = nF(y_n)^{n-1} f(y_n)$$

☞ Q2 On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \left(1 - e^{-\frac{x-\alpha}{\theta}}\right) \mathbb{1}_{\alpha<x}$$

et donc d'après le résultat précédent

$$\begin{aligned} f_{Y_1,\ldots,Y_r}(y_1,\ldots,y_r) &= \frac{n!}{(n-r)!} \mathbb{1}_{y_1<y_2<\ldots<y_r} \left(\Pi_{i=1}^r \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y_i-\alpha}{\theta}} \mathbb{1}_{\alpha<y_i}\right) \left(e^{-\frac{y_r-\alpha}{\theta}} \mathbb{1}_{\alpha<y_r}\right)^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta^r} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^r (y_i-\alpha)-(n-r)\frac{y_r-\alpha}{\theta}} \cdot \mathbb{1}_{\alpha<y_1<y_2<\ldots<y_r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta^r} e^{-r\frac{\overline{y}-\alpha}{\theta}-(n-r)\frac{y_r-\alpha}{\theta}} \cdot \mathbb{1}_{\alpha<y_1<y_2<\ldots<y_r} \end{aligned}$$

où $\overline{y} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r y_i$.

☞ Q3 On a

$$f_{Y_1,\ldots,Y_r}(y_1,\ldots,y_r) = \frac{n!}{(n-r)!} \underbrace{\frac{1}{\theta^r} e^{-\frac{1}{\theta}(r\overline{y}+(n-r)y_r)} e^{-n\alpha}}_{\substack{\text{dépend de } \theta,\alpha \text{ et} \\ \text{que de } r\overline{y}+(n-r)y_r}} \quad \underbrace{\mathbb{1}_{\alpha<y_1}}_{\substack{\text{dépend de } \alpha \\ \text{et que de } y_1}} \quad \underbrace{\mathbb{1}_{y_1<y_2<\ldots<y_r}}_{\substack{\text{ne dépend} \\ \text{que de } y}}$$

Soit donc $S_\theta(y_1,\ldots,y_r) = r\overline{y} + (n-r)y_r$ et $S_\alpha(y_1,\ldots,y_r) = y_1$. Alors en vertu du théorème de factorisation (S_θ, S_α) est une statistique exhaustive pour le modèle paramétré par θ, α.
En outre lorsque α est connu S_θ est une statistique exhaustive pour le modèle paramétré par θ, de même que S_α lorsque θ est connu dans le modèle paramétré par α.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 L'information de Fisher pour n observations i.i.d. est égale à n fois l'information de Fisher pour une observation. On se contente donc de calculer l'information de Fisher dans le cas $n = 1$.

$$\begin{aligned} L_1(k;\lambda) &= \exp^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ \ln L_1(k;\lambda) &= -\lambda + k\ln\lambda - \ln(k!) \\ \frac{\partial \ln L_1}{\partial\lambda}(k,\lambda) &= -1 + \frac{k}{\lambda} \\ \frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\lambda^2}(k,\lambda) &= -\frac{k}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(k) = \lambda$, et donc $I_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ (et $I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$)

☞ Q2

$$L = \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha \mathbb{1}_{[\theta,+\infty[}(x)$$

La vraisemblance n'est pas dérivable en θ : l'information de Fisher n'est pas définie pour ce m dèle. Si θ est une constante connue et non un paramètre à estimer, on peut calculer l'informat de Fisher pour le modèle 'réduit' (paramétré par α) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial\alpha} &= 1/(\alpha-1) + \ln\theta - \ln x, \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\alpha^2} &= -\frac{1}{(\alpha-1)^2} \end{aligned}$$

D'où $I_1(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

☞ Q3 On a

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln\alpha + \ln\theta + (\alpha-1)\ln x - \theta x^\alpha \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} &= -\frac{1}{\theta^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\alpha} &= -x^\alpha \ln x, \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\alpha^2} &= -\frac{1}{\alpha^2} - \theta x^\alpha (\ln x)^2. \end{aligned}$$

d'où

$$I_1(\alpha,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} + \theta\mathbb{E}\left(X^\alpha (\ln X)^2\right) & \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln X\right) \\ \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln X\right) & \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix}$$

Il reste alors à exprimer $\mathbb{E}\left(X^\alpha (\ln X)^i\right)$ pour $i \in \{1,2\}$; ce calcul peut être fait au moyen intégrales eulériennes.
Remarquons pour ce faire que pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln(X)^p\right) &= \int_0^{+\infty} \theta\, x^\alpha \, \ln^p(x)\, \alpha\, x^{\alpha-1}\, e^{-\theta x^\alpha}\, dx \\ &= \frac{1}{\alpha^p\,\theta} \int_0^{+\infty} \ln^p\left(\frac{u}{\theta}\right) u\, e^{-u} du \quad \text{en posant } u = \theta x^\alpha \end{aligned}$$

En particulier pour $p \in \{1,2\}$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln(X)\right) &= \frac{1}{\alpha\,\theta} \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{u}{\theta}\right) u\, e^{-u} du \\ \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln(X)^2\right) &= \frac{1}{\alpha^2\,\theta} \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{u}{\theta}\right)^2 u\, e^{-u} du \end{aligned}$$

Or la fonction Γ d'Euler, définie par $\Gamma : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t} dt \end{pmatrix}$, est de classe C^∞ et vérifie $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^\infty \ln^p(t)\, t^{x-1}\, e^{-t} dt$. En conséquence

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln(X)\right) &= \frac{1}{\alpha\,\theta}\left(\Gamma^{'}(2) - \ln(\theta)\Gamma(2)\right) \\ \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln(X)^2\right) &= \frac{1}{\alpha^2\,\theta}\left(\Gamma^{''}(2) - 2\ln(\theta)\Gamma^{'}(2) + \ln(\theta)^2\Gamma(2)\right) \end{aligned}$$

Enfin, on peut montrer que $\frac{\Gamma^{'}(u)}{\Gamma(u)} = -\gamma - \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+u}\right)$ (où γ est la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N$) ce dont on tire par dérivation que $\frac{\Gamma^{''}(u)\Gamma(u) - \Gamma^{'}(u)^2}{\Gamma(u)^2} = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+u)^2}$, ceci pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*}$; les séries figurant dans ces expressions sont alors calculables lorsque u est entier.
En particulier lorsque $x = 2$ il vient :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1! \\ &= 1 \\ \Gamma^{'}(2) &= -\gamma - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \gamma \\ \Gamma^{''}(2) &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+2)^2} + \Gamma^{'}(2)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4}\right) + (1-\gamma)^2 \\ &= \frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 \end{aligned}$$

En définitive on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln(X)\right) &= \frac{1 - \gamma - \ln\theta}{\theta\,\alpha} \\ \mathbb{E}\left(X^\alpha (\ln X)^2\right) &= \frac{1}{\alpha^2\,\theta}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 - 2\,(1-\gamma)\,\ln(\theta) + \ln(\theta)^2\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\boxed{I_1(\alpha,\theta) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\theta}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 - 2\,(1-\gamma)\,\ln(\theta) + \ln(\theta)^2\right) & \frac{1-\gamma-\ln\theta}{\theta\,\alpha} \\ \hline \frac{1-\gamma-\ln\theta}{\theta\,\alpha} & \frac{1}{\theta^2} \end{array}\right)}$$

Remarquons que dans le sous-modèle dans lequel α est connu et θ est inconnu on a simplement

$$\boxed{I_1(\theta) = \frac{1}{\theta^2}}$$

☞ Q4 La vraisemblance du modèle est

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}\mathbb{1}_{\max x_i \leq \theta}$$

donc la log-vraisemblance s'écrit, pour $x \in [0,\theta]^n$

$$L_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta) = -n\ln\theta$$

L'information de Fisher n'est pas définie, car le modèle n'est pas homogène (à x fixé, la l vraisemblance $\theta \mapsto L_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ n'est pas définie (donc pas dérivable) au point θ $\max_i x_i$). Sur $]0, \max_i x_i[$ on peut néanmoins calculer par analogie[5]

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial L_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x;\theta)\right)^2\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{n}{\theta}\right)^2 \frac{dx_1}{\theta}\cdots\frac{dx_n}{\theta} \\ &= \frac{n^2}{\theta^2} \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 L_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta^2}(x;\theta)\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{n}{\theta^2}\right) \\ &= \frac{n}{\theta^2} \\ &\neq \frac{n^2}{\theta^2} \end{aligned}$$

En effet, l'hypothèse de "dérivabilité deux fois sous le signe $\int_{\mathcal{X}}$" qui stipule que

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathcal{X}} \ln f_{X_1,\ldots,X_n}(x)dx = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x)dx$$

et que

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{\mathcal{X}} \ln f_{X_1,\ldots,X_n}(x)dx = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^2 \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta^2}(x)dx$$

n'est pas vérifiée ici. $I_n(\theta)$ est toujours par définition la variance du score, mais n'est plus ég à la courbure espérée de la log-vraisemblance.

[5] L'objet $I_n(\theta)$ existe pour $\theta \in]0, \max_i x_i[$, mais n'a plus les propriétés habituelles de l'information de Fisher commencer par un problème de définition), et c'est pourquoi on s'abstient habituellement de la définir dans ces cas.

Rappel : Lorsque cette hypothèse est vérifiée on a d'une part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x;\theta)\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{\frac{\partial f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x;\theta)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x;\theta)}\right)\\
&= \int_{\mathbb{X}} \frac{\partial f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x;\theta)dx\\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta\mapsto\int_{\mathbb{X}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x;\theta)dx\right)_{(\theta)}\\
&\quad \text{d'après la première partie de l'hypothèse}\\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}(\theta\mapsto 1)_{(\theta)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que le score est centré, et d'autre part en dérivant de nouveau

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta^2}(x,\theta)\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\frac{\partial f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x;\theta)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x,\theta)}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\frac{\partial^2 f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta^2}(x;\theta)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x,\theta)} - \frac{\left(\frac{\partial f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x;\theta)\right)^2}{\left(f_{X_1,\ldots,X_n}(x;\theta)\right)^2}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\frac{\partial^2 f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta^2}(x;\theta)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x,\theta)} - \left(\frac{\partial \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta}(x;\theta)\right)^2\right)\\
&= \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^2 f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\theta^2}(x,\theta)dx - I_n(\theta)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\theta\mapsto\int_{\mathcal{X}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x,\theta)dx\right)_{(\theta)} - I_n(\theta)\\
&\quad \text{d'après la deuxième partie de l'hypothèse}\\
&= -I_n(\theta)
\end{aligned}$$

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 $\bar{F}(t)$ désigne la probabilité qu'un composant donné survive jusqu'à la date t et mesure ainsi sa fiabilité. On a

$$\begin{aligned}
F(t) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq t)\\
&= \int_0^t \frac{1}{\theta} e^{-\frac{u}{\theta}} du\\
&= 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}
\end{aligned}$$

en conséquence de quoi $\boxed{\bar{F}(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}}$.

☞ Q2 La log-vraisemblance du modèle s'écrit pour $min_i y_i \geq 0$

$$\ln L(y_1,\ldots,y_n;\theta) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n y_i$$

Or si $\widehat{\theta}_{(y)}$ maximise la vraisemblance il vérifie $\frac{\partial(\ln L)}{\partial\theta}(\widehat{\theta}_{(y)}) = 0$, soit $-\frac{n}{\widehat{\theta}_{(y)}} + \frac{1}{(\widehat{\theta}_{(y)})^2}\sum_{i=1}^n y_i = 0$
donc

$$\widehat{\theta} : (y_1,\ldots,y_n) \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$$

(la réciproque étant immédiate).
Définissons donc $\widehat{F}(t) : y \mapsto e^{-t/\widehat{\theta}_{(y)}}$.
Comme $\widehat{\theta}(Y) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta$ et que $\phi_t : \left(u \mapsto e^{-\frac{t}{u}}\right)$ est absolument continue en u, on a

$$\boxed{\forall t,\ \widehat{F}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \overline{F}(t)}$$

En revanche à distance finie, même si $\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}(Y)\right) = \theta$ pour comparer $\mathbb{E}\left(\widehat{F}(t)_{(Y)}\right)$ à $F(t)$ il n'
pas possible d'utiliser de l'inégalité de Jensen selon laquelle

> Si $\phi : (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ est strictement convexe, et si X est non-dégénérée (i.e. $\mathbb{V}(X) \neq 0$), alors $\mathbb{E}(\phi(X)) > \phi(\mathbb{E}(X))$.

car $\phi_t : \left(u \mapsto e^{-\frac{t}{u}}\right)$ n'est **pas** convexe, puisque $\frac{\partial^2\phi_t}{\partial u^2}(u) = \frac{t}{u^3}\left(\frac{t}{u} - 2\right)e^{-\frac{t}{u}}$ qui n'est pas toujo
positif.
Calculons donc le biais de $\widehat{F}(t)$: on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{F}(t)\right) &= \mathbb{E}\left(e^{-\frac{nt}{\sum_{i=0}^n Y_i}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{nt}{\sum_{i=0}^n Y_i}\right)^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(-nt)^k\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=0}^n Y_i\right)^k}\right) \quad \text{par Fubini}
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \geq 1$ fixé, $\phi_k : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^k}\end{pmatrix}$ est convexe (car $\mathcal{C}^\infty$ et de déri
$\phi_k' : \left(x \mapsto -\frac{k}{x^{k+1}}\right)$, donc $\phi_k''(x) = \frac{k(k+1)}{x^{k+2}} > 0$) et donc d'après l'inégalité stricte de Jen

$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{n} Y_i\right)^k}\right) > \frac{1}{\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} Y_i\right)\right)^k}$ de sorte que finalement

$$\mathbb{E}\left(\widehat{F}(t)\right) > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (-nt)^k \frac{1}{\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} Y_i\right)\right)^k}$$

Or $(Y_i)_i \underset{iid}{\leadsto} \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ et donc (voir TD 1, exercice 2) $\left(\sum_{i=0}^{n} Y_i\right) \underset{iid}{\leadsto} \Gamma\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$ de sorte qu'en particulier $\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} Y_i\right) = n\theta$

Par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{F}(t)\right) &> \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (-nt)^k \frac{1}{(n\theta)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-t)^k}{\theta^k} \\
&= e^{-\frac{t}{\theta}} \\
&= \overline{F}(t)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{F}(t)$ est un estimateur biaisé de $\bar{F}(t)$.

Notons que bien entendu $\mathbb{E}\left(\widehat{F}(t)_{(Y)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t} = \bar{F}(t)$, ce qui découle de ce que $\forall t,\ \widehat{F}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} F(t)$.

☞ Q3 On a $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, I_1(\theta)^{-1}\right)$, avec

$$\begin{aligned}
I_1(\theta) &= \frac{1}{n} I_n(\theta) \\
&= -\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta^2}\right) \\
&= \frac{1}{\theta^2}
\end{aligned}$$

En posant $g : \left(\theta \mapsto e^{-\frac{t}{\theta}}\right)$ de dérivée $g'(\theta) = \frac{t}{\theta^2}e^{-\frac{t}{\theta}}$ on a par la delta-méthode

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(g\left(\widehat{\theta}\right) - g(\theta)\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, g'(\theta)\cdot I_1(\theta)^{-1}\cdot g'(\theta)\right) \\
&= \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{t}{\theta^2}e^{-\frac{t}{\theta}}\right)\theta^2\left(\frac{t}{\theta^2}e^{-\frac{t}{\theta}}\right)\right) \\
&= \mathcal{N}\left(0, \frac{t^2}{\theta^2}e^{-\frac{2t}{\theta}}\right)
\end{aligned}$$

☞ Q4 (a) Cherchons dans un premier temps la densité $f_{S_n(Y)}(s)$ de la loi dela variable $S_n(Y) = Y_1 + \ldots + Y_n$.

- On a tout d'abord $f_{S_1(Y)}(s) = f_{Y_1}(s) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}\mathbb{1}_{y\geq 0}$.
- Y_1 et Y_2 étant indépendante, on a alors

$$\begin{aligned}
f_{S_2(Y)}(s) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)\mathbb{1}_{y_1+y_2=s}\ dy_1dy_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y_1\geq 0}\mathbb{1}_{s-y_1\geq 0} f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(s-y_1)dy_1 \\
&= \mathbb{1}_{s\geq 0}\int_0^s \left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y_1}{\theta}}\right)\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{s-y_1}{\theta}}\right)dy_1 \\
&= \mathbb{1}_{s\geq 0}\, s\,\frac{e^{-\frac{s}{\theta}}}{\theta^2}
\end{aligned}$$

- puis de même

$$\begin{aligned}
f_{S_3(Y)}(s) &= \int_{\mathbb{R}^3} f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)f_{Y_3}(y_3)\mathbb{1}_{y_1+y_2+y_3=s}\ dy_1dy_2dy_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)\mathbb{1}_{y_1+y_2=s_1}\ dy_1dy_2\right) f_{Y_3}(y_3)\mathbb{1}_{s_1+y_3=s}\ ds_1dy_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y_3\geq 0}\mathbb{1}_{s-y_3\geq 0} f_{S_2(Y)}(s-y_3)f_{Y_3}(y_3)dy_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{S_2(Y)}(s-y_3)f_{Y_3}(y_3)\,dy_3 \\
&= \mathbb{1}_{s\geq 0}\int_0^s \left(\frac{s-y_3}{\theta^2}e^{-\frac{s-y_3}{\theta}}\right)\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y_3}{\theta}}\right)dy_3 \\
&= \mathbb{1}_{s\geq 0}\,\frac{s^2}{2}\,\frac{e^{-\frac{s}{\theta}}}{\theta^3}
\end{aligned}$$

- (récurrence ...)
- et finalement

$$f_{S_n(Y)}(s) = \mathbb{1}_{s\geq 0}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\frac{e^{-\frac{s}{\theta}}}{\theta^n}$$

<u>*Remarque :*</u> Ce résultat peut bien-sûr être obtenu directement en constatant que $S(Y) \rightsquigarrow \Gamma(n$
(voir TD 1, exercice 2).

On en tire alors la loi conditionnelle $f(y,s)$ de la variable $(Y, S(Y))$: pour $y_1 \in [0,s]$ o

$$\begin{aligned}
f(y_1,s) &= \frac{f_{Y_1,\,Y_1+\cdots+Y_n}(y_1,s)}{f_{Y_1+\cdots+Y_n}(s)} \\
&= \frac{f_{Y_1,\,Y_2+\cdots+Y_n}(y_1,s-y_1)}{f_{Y_1+\cdots+Y_n}(s)} \\
&= \frac{f_{Y_1}(y_1)\ f_{Y_2+\cdots+Y_n}(s-y_1)}{f_{Y_1+\cdots+Y_n}(s)}
\end{aligned}$$

car les Y_i sont indépendantes et donc Y_1 est indépendante de $Y_2 + \cdots +$

$$= \frac{\left(\frac{(s-y_1)^{n-2}}{(n-2)!}\frac{e^{-\frac{s-y_1}{\theta}}}{\theta^{n-1}}\right)\left(\frac{e^{-\frac{y_1}{\theta}}}{\theta}\right)}{\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\frac{e^{-\frac{s}{\theta}}}{\theta^n}}$$

et donc en définitive

$$\boxed{f(y_1,s) = (n-1)\frac{(s-y_1)^{n-2}}{s^{n-1}}\mathbb{1}_{0\leq y_1\leq s}}$$

(b) Calculons tout d'abord que $T^*(Y)$.

On a sucessivement, pour $t \in R^+$ et $s \geq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(T|S(Y)=s\right) &= \mathbb{P}\left(Y_1 > t \mid S(Y)=s\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left((n-1)\frac{(s-y)^{n-2}}{s^{n-1}}\mathbb{1}_{0\leq y\leq s}\right)\mathbb{1}_{t\leq y}dy \\
&= \int_t^s (n-1)\frac{(s-y)^{n-2}}{s^{n-1}}dy \\
&= \frac{1}{s^{n-1}}\left[-(s-y)^{n-1}\right]_t^s \\
&= \left(1-\frac{t}{s}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\boxed{T^*(Y) = \left(1-\tfrac{t}{S(Y)}\right)^{n-1}}$$

T^* est l'amélioré de Rao-Blackwell de T pour la statistique exhaustive S.

(c) On a successivement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(T|S(Y)\right)\right) &= \mathbb{E}\left(T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{Y_1>t}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_1 > t\right) \\
&= \bar{F}(t)
\end{aligned}$$

(on retrouve ainsi que l'amélioré T^* de T, qui estime sans biais $\bar{F}(t)$, est lui-même un estimateur sans biais de $\bar{F}(t)$).

Enfin, $T^*(Y) = \mathbb{E}\left(T|S(Y)\right)$ est fonction d'une statistique exhaustive complète (car T est une statistique canonique dans un modèle exponentiel), et est sans biais, donc d'après le théorème de Lehman-Scheffé T^* est optimal parmi les estimateurs sans biais de $\bar{F}(t)$. On vérifie d'ailleurs que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(T\right) &= \mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(T|S(Y)\right)\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(T|S(Y)\right)\right) \\
&> \mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(T|S(Y)\right)\right) \\
&= \mathbb{V}\left(T^*(Y)\right)
\end{aligned}$$

(d) Discuter de l'efficacité de T^*, c'est comparer sa variance à la borne de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao $\frac{\partial\phi_t}{\partial\theta}(\theta)' I_1(\theta)^{-1}\frac{\partial\phi_t}{\partial\theta}(\theta)$.
Cependant le calcul de $\left[\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(T|S(Y)\right)\right)^2 - \mathbb{E}\left(\left(T|S(Y)\right)^2\right)\right]$ est ardu : il est nécessaire d'expliciter l'intégrale et d'y soustraire la borne FDCR pour conclure (un tel calcul est laissé à la sagacité du lecteur).
Constatant néanmoins que le modèle est exponentiel et régulier, et comme T^* n'est **pas** une fonction affine de la statistique exhaustive S comme il devrait l'être s'il était efficace (cf cours de P. Doukhan, Théorème 4.3), on peut en conclure que T^* n'est **pas** efficace.

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 On a

$$\boxed{S(x;\theta) = \tfrac{\partial \ln L}{\partial\theta}(x,\theta)}$$

En outre, si on peut intervertir $\int_{\mathcal{X}}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$ alors le score est centré : $\mathbb{E}\left(S(x;\theta)\right) = 0$ (voir ex
cice 2)
L'information de Fisher pour une observation est définie par

$$\boxed{I_1(\theta) = \mathbb{E}\left(\tfrac{\partial \ln L}{\partial\theta}(x,\theta)\tfrac{\partial \ln L}{\partial\theta'}(x,\theta)\right)}$$

En outre, si on peut intervertir $\int_{\mathcal{X}}$ avec $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ alors

$$I_1(\theta) = \mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}(x,\theta)\right)$$

(voir exercice 2)

☞ Q2 La variable aléatoire Y ne prend que deux valeurs, et suit donc une loi de Bernoulli ; en ou
on a $(Y=1) \Leftrightarrow (X \geq s)$ et donc $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X\geq s)$.
Notons donc $p_s(\theta) = \mathbb{P}(X \geq s)$: la densité de Y est

$$f_Y(y;\theta) = p_s(\theta)^y(1-p_s(\theta))^{1-y}\mathbb{1}_{y\in\{0,1\}}$$

de sorte que pour $y \in \{0,1\}$

$$\ln L_Y(y;\theta) = y\ln p_s(\theta) + (1-y)\ln(1-p_s(\theta))$$

Le score est alors

$$\begin{aligned}
S_Y(y;\theta) &= y\frac{\partial \ln p_s}{\partial\theta}(\theta) + (1-y)\frac{\partial \ln(1-p_s)}{\partial\theta}(\theta) \\
&= y\frac{\partial}{\partial\theta}\left(t\mapsto \ln\left(\int_s^{+\infty} f_X(x,t)dx\right)\right)_{(\theta)} + (1-y)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(t\mapsto \ln\left(\int_{-\infty}^s f_X(x,t)dx\right)\right) \\
&= y\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(t\mapsto\int_s^{+\infty} f_X(x,t)dx\right)_{(\theta)}}{\int_s^{+\infty} f_X(x,\theta)dx} + (1-y)\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(t\mapsto\int_{-\infty}^{s} f_X(x,t)dx\right)_{(\theta)}}{\int_{-\infty}^{s} f_X(x,\theta)dx} \\
&= y\frac{\int_s^{+\infty}\frac{\partial f_X}{\partial\theta}(x;\theta)dx}{\int_s^{+\infty} f_X(x;\theta)dx} + (1-y)\frac{\int_{-\infty}^{s}\frac{\partial f_X}{\partial\theta}(x;\theta)dx}{\int_{-\infty}^{s} f_X(x;\theta)dx}
\end{aligned}$$

où l'un seulement des deux termes est non-nul puisque $y \in \{0,1\}$.
Calculons alors le score pour le modèle en X : on a pour $y \in \{0,1\}$

$$\mathbb{E}\left(S_X(X,\theta)|Y=y\right) = \int_{\mathbb{R}} S_X(x,\theta) f_{X|Y=y}(x)dx$$

Or

$$S_X(x;\theta) = \frac{1}{f_X(x;\theta)}\frac{\partial f_X}{\partial\theta}(x;\theta)$$

et en outre

$$\begin{aligned} f_X(x;\theta|Y=1) &= \frac{\mathbb{P}(X=x \wedge Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} \\ &= \frac{f_X(x;\theta)\cdot \mathbb{1}_{X\geq s}}{\int_s^{+\infty} f_X(x;\theta)dx} \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} f_X(x;\theta|Y=0) &= \frac{\mathbb{P}(X=x \wedge Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} \\ &= \frac{f_X(x;\theta)\cdot \mathbb{1}_{x<s}}{\int_{-\infty}^{s} f_X(x;\theta)dx} \end{aligned}$$

donc en définitive

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(S_X(X,\theta)|Y=y\right) &= \int_{\mathbb{R}} S_X(x,\theta) f_{X|Y=y}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_X(x,\theta)\left(y f_{X|Y=1}(x) + (1-y) f_{X|Y=0}(x)\right)dx \\ &= y\int_{\mathbb{R}} S_X(x,\theta) f_{X|Y=1}(x)dx \;+\; (1-y)\int_{\mathbb{R}} S_X(x,\theta) f_{X|Y=0}(x)dx \\ &= y\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{f_X(x;\theta)}\frac{\partial f_X}{\partial\theta}(x;\theta)\right)\times\frac{f_X(x;\theta)\cdot\mathbb{1}_{x\geq s}}{\int_s^{+\infty} f_X(x;\theta)dx}dx \\ &+ \;(1-y)\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{f_X(x;\theta)}\frac{\partial f_X}{\partial\theta}(x;\theta)\right)\times\frac{f_X(x;\theta)\cdot\mathbb{1}_{x<s}}{\int_{-\infty}^{s} f_X(x;\theta)dx}dx \\ &= y\frac{\int_s^{+\infty}\frac{\partial f_X}{\partial\theta}(x;\theta)dx}{\int_s^{+\infty} f_X(x;\theta)dx} + (1-y)\frac{\int_{-\infty}^{s}\frac{\partial f_X}{\partial\theta}(x;\theta)dx}{\int_{-\infty}^{s} f_X(x;\theta)dx} \\ &= \boxed{S_Y(y;\theta)} \end{aligned}$$

☞ Q3 L'information de Fisher d'un modèle étant la variance du score correspondant, on a

$$\begin{aligned} I_Y(\theta) &= \mathbb{V}\left(S(Y;\theta)\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(S(X;\theta)|Y\right)\right) \end{aligned}$$

Or pour toutes variables aléatoires A et B, à supposer que ces termes existent on a

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_B(A|B)\right) \\ &\mathbb{V}(A) = \underbrace{\mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{V}_B(A|B)}_{\substack{\text{variance de } A \text{ sachant } B \\ \text{ce qui dépend de } B}}\right)}_{\text{variance espérée de } A} + \underbrace{\mathbb{V}\left(\underbrace{\mathbb{E}_B(A|B)}_{\substack{\text{espérance de } A \text{ sachant } B \\ \text{ce qui dépend de } B}}\right)}_{\text{variance due à } B} \end{aligned}}$$

En l'occurence il vient

$$\begin{aligned} I_X(\theta) &= \mathbb{V}\left(S(X;\theta)\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\,\mathbb{E}\left(S(X;\theta)|Y\right)\,\right) + \mathbb{E}\left(\,\mathbb{V}\left(S(X;\theta)|Y\right)\,\right) \\ &= I_Y(\theta) + \mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(S(X;\theta)|Y\right)\right) \\ &\gg I_Y(\theta) \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'information véhiculée par X est strictement plus importante que c
véhiculée par Y, ce qui est conforme à l'intuition.

⋆
⋆ ⋆

3 Travaux Dirigés n°3

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On se donne Y variable aléatoire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ et X sur $\mathcal{M}_{N,K}(\mathbb{R})$.
La vraisemblance (conditionnelle) du modèle normal s'écrit

$$f(Y|X,b,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{|S(\theta)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y-Xb)' \cdot S(\theta)^{-1} \cdot (Y-Xb)\right)$$

Note : il s'agit bien d'un nombre réel car $(Y-Xb) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.
La log-vraisemblance conditionnelle s'écrit donc

$$\ln L(Y|X,b,\theta) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|S(\theta)| - \frac{1}{2}(Y-Xb)' \cdot S(\theta)^{-1} \cdot (Y-Xb)$$

☞ Q2 Le vecteur score $\mathcal{S}(b,\theta) \in \mathcal{M}_{K+1,1}(\mathbb{R})$ se décompose entre les composantes suivant b, soit $\mathcal{S}_b(b) \in \mathcal{M}_{K,1}(\mathbb{R})$, et celle suivant θ, soit $\mathcal{S}_\theta(\theta) \in \mathbb{R}$, que nous calculons alternativement.

– Composantes suivant b :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_b(b) &= \frac{\partial \ln L(Y|X,\cdot,\theta)}{\partial b}(b) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial b}\left(b \mapsto (Y-Xb)' \cdot S(\theta)^{-1} \cdot (Y-Xb)\right)\right)(b) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial b}\left(b \mapsto Y'S(\theta)^{-1}Y - b'X'S(\theta)^{-1}Y - Y'S(\theta)^{-1}Xb + b'X'S(\theta)^{-1}Xb\right)\right)(b)
\end{aligned}$$

Rappelons que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on a $\frac{\partial}{\partial b}(b \mapsto b'A) = A$ et $\frac{\partial}{\partial b}(b \mapsto A'b) = A'$, donc pour Σ symétrique

$$\frac{\partial}{\partial b}(b \mapsto b'\Sigma b)(b) = 2\Sigma b$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_b(b) &= -\frac{1}{2}\left(0 - X'S(\theta)^{-1}Y - X'S(\theta)^{-1}Y + 2(X'S(\theta)^{-1}X)b\right) \\
&= X' \cdot S(\theta)^{-1} \cdot (Y-Xb)
\end{aligned}$$

– Composante suivant θ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\theta(\theta) &= \frac{\partial \ln L(Y|X,b,\cdot)}{\partial \theta}(\theta) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \mapsto \ln|S(\theta)| + (Y-Xb)' \cdot S(\theta)^{-1} \cdot (Y-Xb)\right)\right)(\theta)
\end{aligned}$$

Or

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\theta \mapsto \ln|S(\theta)|)\right)(\theta) = Tr\left(S(\theta)^{-1}\frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)\right)$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \mapsto S(\theta)^{-1}\right)\right)(\theta) = -S(\theta)^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta) \cdot S(\theta)^{-1}$$

La première assertion découle en effet directement du théorème 2 du chapitre 3 de *"M trix Differential Calculus"*, Jan R. Magnus et Heinz Neudecker, qui stipule que si F $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_k^+(\mathbb{R})\right)$ est k fois différentiable, alors $\ln|F|$ l'est et admet pour différenti $d\ln|F| = Tr(F^{-1})dF$ (il suffit de poser $n = p = 1$ et $F = S$). Elle peut même être re montrée directement, en notant λ_i^A la i-ième valeur propre d'une matrice A (sans ordre multiplicité) :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\theta \mapsto \ln|S(\theta)|)\right)(\theta) &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \mapsto \ln\left(\Pi_{i=1}^n \lambda_i^{S(\theta)}\right)\right)\right)(\theta) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \mapsto \left(\ln \lambda_i^{S(\theta)}\right)\right)\right)(\theta) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \lambda_i^{S(\theta)}}{\partial \theta}(\theta)\right)\left(\lambda_i^{S(\theta)}\right)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^{\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta}(\theta)}\right)\left(\lambda_i^{S(\theta)^{-1}}\right) \\
&= Tr\left(\left(\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta}(\theta)\right) \times \left(S(\theta)^{-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Une preuve de la seconde assertion est également proposée dans le théorème 3 de ce mê ouvrage, ou peut aussi être obtenue en développant l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(S(\theta) \times S(\theta)^{-1}\right) = \frac{\partial I_N}{\partial \theta} = (0)$$

Il en ressort que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\theta(\theta) &= -\frac{1}{2}Tr\left(S(\theta)^{-1}\frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)\right) + \frac{1}{2}\underbrace{(Y-Xb)'\left(S(\theta)^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta) \cdot S(\theta)^{-1}\right)(Y-Xb)}_{\in \mathbb{R}} \\
&= -\frac{1}{2}Tr\left(\left(S(\theta)^{-1}\frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)S(\theta)^{-1}\right)\left(S(\theta) - (Y-Xb)'(Y-Xb)\right)\right)
\end{aligned}$$

Reste à montrer que le score est centré :

– On a d'un part $\mathbb{E}(Y|X,b) = Xb$,
en conséquence de quoi $\mathbb{E}(Y-Xb|X,b) = (0)$
de sorte que $\mathbb{E}(\mathcal{S}_b(b)|X,b) = (0)$: les composantes selon b sont centrées.
– Et d'autre part $\mathbb{E}_\theta((Y-Xb)(Y-Xb)') = S(\theta)$,
de sorte que $\mathbb{E}(\mathcal{S}_\theta(\theta)|X,b) = 0$.

En conséquence, $\mathbb{E}_{b,\theta}(\mathcal{S}(b,\theta)|X,b,\theta) = (0)$: le vecteur score est centré.

☞ Q3 Le calcul de la matrice d'information de Fisher est encore plus convivial, car c'est un préte au calcul des dérivées secondes de la log-vraisemblance (le calcul alternatif de la variance score calculé est laissé en exercice).

– Dérivée seconde selon (b,b) :

$$\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial b \partial b'}(\theta,b) = -X' \cdot S(\theta)^{-1} \cdot X$$

Donc, comme $S(0) = I_N$,

$$\mathbb{E}_{b,\theta=0}\left(\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial b \partial b'}(\theta,b)\right) = -X'X$$

– Dérivée seconde selon (b,θ) :

$$\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial b \partial \theta}(\theta,b) = -X' \cdot S(\theta)^{-1}\frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta) S(\theta)^{-1} \cdot (Y - Xb)$$

Donc, comme $\mathbb{E}_{b,\theta}(Y - Xb) = 0$,

$$\mathbb{E}_{b,\theta=0}\left(\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial b \partial \theta}(\theta,b)\right) = (0)$$

– Dérivée seconde selon (θ,b) :

Loins de nous lancer dans la dérivation selon b de $\frac{\partial \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial \theta}$, constatons astucieusement que $(b,\theta) \mapsto \mathcal{S}(b,\theta)$ est de classe C^2 sur un voisinage de 0 : elle est en effet la composée d'une fonction de classe C^∞, à savoir $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (x,A) & \mapsto & -\frac{N}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(Y - Xb)' \cdot A \cdot (Y - Xb) \end{pmatrix}$, et des deux fonctions $(M \mapsto \ln|M|)$ et $(M \mapsto M^{-1})$ qui sont de classe C^∞ sur une partie dense d'un voisinage de 0. Cauchy nous assure alors de l'égalité des dérivées croisées pour θ voisin de 0 : $\forall (b,\theta)$, $\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial b \partial \theta}(\theta,b) = \frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial \theta \partial b}(\theta,b)$, ce qui permet de conclure que

$$\mathbb{E}_{b,\theta=0}\left(\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial \theta \partial b}(\theta,b)\right) = (0)$$

– Dérivée seconde selon (θ,θ) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{b,\theta}\left(\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial \theta^2}(\theta,b)\right) \\
=\ & \mathbb{E}_{b,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \mapsto -\frac{1}{2}Tr\left(\underbrace{\left(S(\theta)^{-1}\frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)S(\theta)^{-1}\right)}_{\psi(\theta)}\underbrace{\left(S(\theta) - (Y - Xb)'(Y - Xb)\right)}_{h(\theta)}\right)\right)\right) \\
=\ & -\frac{1}{2}\mathbb{E}_{b,\theta}\left(Tr\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta)h(\theta) + \psi(\theta)\frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta)\right)\right) \\
=\ & -\frac{1}{2}Tr\left(\mathbb{E}_{b,\theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta)h(\theta)\right)\right) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{b,\theta}\left(Tr\left(\psi(\theta)\frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta)\right)\right) \\
=\ & -\frac{1}{2}Tr\left(\mathbb{E}_{b,\theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta)\underbrace{\mathbb{E}_b\left(h(\theta)|\theta\right)}_{=0}\right)\right) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{b,\theta}\left(Tr\left(\psi(\theta)\frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)\right)\right) \\
=\ & -\frac{1}{2}Tr\left(\psi(\theta)\frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}_{b,\theta}\left(-\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial \theta^2}(\theta,b)\right) = \frac{1}{2}Tr\left(S(\theta)^{-1}\ \frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)\ S(\theta)^{-1}\ \frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta)\right)$$

et par suite, sachant que $S(0) = I_N$ et en notant $A = \frac{\partial S}{\partial \theta}(0)$

$$\mathbb{E}_{b,\theta=0}\left(-\frac{\partial^2 \ln L(Y|X,\cdot,\cdot)}{\partial \theta^2}(\theta,b)\right) = \frac{1}{2}Tr\left(A^2\right)$$

On a donc finalement :

$$\boxed{I(b,0) = \left(\begin{array}{c|c} X'X & \begin{matrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0\ldots 0 & \frac{1}{2}Tr\left(A^2\right) \end{array}\right)}$$

☞ Q4 On a $S(\theta) = \left(\theta^{|i-j|}\right)_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2}$.

Or $\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \mapsto \theta^k\right)(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ \theta^{k-1} & \text{sinon} \end{cases}$ En particulier $A = \frac{\partial S}{\partial \theta}(0) = \left(\mathbb{1}_{|i-j|=1}\right)_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2}$.

En conséquence

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \ldots & \star & \star \\ \star & 2 & \star & \ldots & \star & \star \\ \star & \star & 2 & \ldots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \ldots & 2 & \star \\ \star & \star & \star & \ldots & \star & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $Tr\left(A^2\right) = 2(N-1)$.
Ainsi,

$$\boxed{I_{b,\theta}(b,0) = \begin{pmatrix} X'X & 0 \\ 0 & N-1 \end{pmatrix}}$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 On a

$$f_X(x,p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\mathbb{1}_{x\in\{0,1\}}$$

d'où on tire que

$$\frac{\partial \ln f_X}{\partial p}(x,p) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p}$$

en conséquence de quoi un estimateur $\widehat{p}$ de p vérifie

$$(1-\widehat{p})\sum_{i=1}^n x_i = \widehat{p}(n - \sum_{i=1}^n x_i)$$

soit $\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{X}$ (la réciproque étant immédiate).
On a par ailleurs

$$\frac{\partial^2 \ln f_X}{\partial p^2}(x,\theta) = -\frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}$$

d'où $I_n(\theta) = \frac{n}{p(1-p)}$ et donc d'après le Théorème Central Limite il vient

$$\sqrt{n}(\widehat{p} - p) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

☞ Q2 Le paramètre à estimer est ici (m,σ^2) (et pas (m,σ) : on s'abstiendra d'écrire σ^4 mais plutôt $(\sigma^2)^2$). On a

$$f_X(x,m,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}$$

et donc

$$\frac{\partial \ln f_X}{\partial m}(x,m,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial \ln f_X}{\partial (\sigma^2)}(x,m,\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\begin{pmatrix} \widehat{m} \\ \widehat{\sigma^2} \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$ vérifie alors pour tout x

$$\frac{\partial \ln f_X}{\partial \begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} \widehat{m}(x) \\ \widehat{\sigma^2}(x) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce dont on tire

$$\begin{cases} \widehat{m}(x) = x \\ \frac{1}{\widehat{\sigma^2}(x)}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \widehat{m}(x)\right) = 0 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} \widehat{m} \\ \widehat{\sigma^2} \end{pmatrix} : x \mapsto \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 \end{pmatrix}$$

On a enfin

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln f_X}{\partial m^2}(x,m,\sigma^2) &= -\frac{n}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln f_X}{\partial m \partial(\sigma^2)}(x,m,\sigma^2) &= \left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2}\right)\sum_{i=1}^n (x_i - m) \\ \frac{\partial^2 \ln f_X}{\partial(\sigma^2)^2}(x,m,\sigma^2) &= \frac{n}{2\left(\sigma^2\right)^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^3}\right) \end{aligned}$$

De $\mathbb{E}(X_i - m) = 0$ et $\mathbb{E}\left((X_i-m)^2\right) = \sigma^2$ on tire finalement que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f_X}{\partial(\sigma^2)^2}(X;m,\sigma^2)\right) &= \frac{n}{2\left(\sigma^2\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\left(\sigma^2\right)^3}\left(\sigma^2\right) \\ &= -\frac{n}{2\left(\sigma^2\right)^2} \end{aligned}$$

de sorte que

$$I_n(m,\sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2(\sigma^2)^2} \end{pmatrix}$$

et donc en définitive

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{m} - m \\ \widehat{\sigma^2} - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2(\sigma^2)^2 \end{pmatrix}\right)$$

Les variables aléatoires (asymptotiquement normales) $\widehat{m}$ et $\widehat{\sigma^2}$ sont de covariance asymptotic
nulle, donc[6] sont asymptotiquement indépendantes.

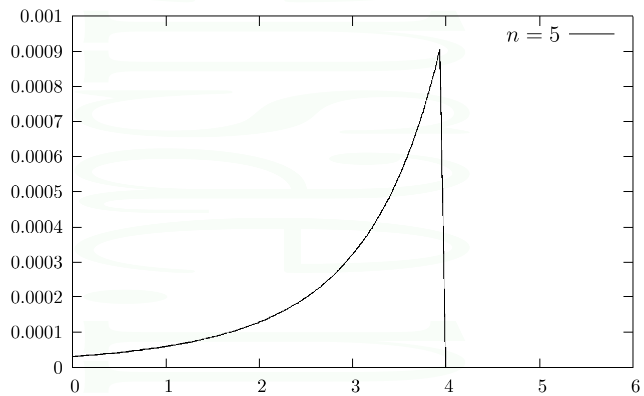
☞ Q3 La vraisemblance s'écrit :

$$L_X(x;a,b) = \frac{1}{(b-a)^n}\mathbb{1}_{\min x_i \geq a}\mathbb{1}_{\max x_i \leq b}$$

et n'est pas dérivable en a et b (disconstinuités en $a = \min x_i$ et $b = \max x_i$). Les conditions
régularité habituelles ne sont pas vérifiées, et le point $(\widehat{a}(x), \widehat{b}(x))$ qui maximise la vraisembla
ne vérifie pas les conditions du premier ordre.

Il peut néanmoins être déterminé directement : en effet pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ fix
$\begin{pmatrix}]-\infty, b[& \to & \mathbb{R}^+ \\ a & \mapsto & \frac{1}{(b-a)^n}\mathbb{1}_{\min x_i \geq a}\mathbb{1}_{\max x_i \leq b} \end{pmatrix}$ est identiquement nulle si $\max_i x_i > b$, et sin
admet pour graphe

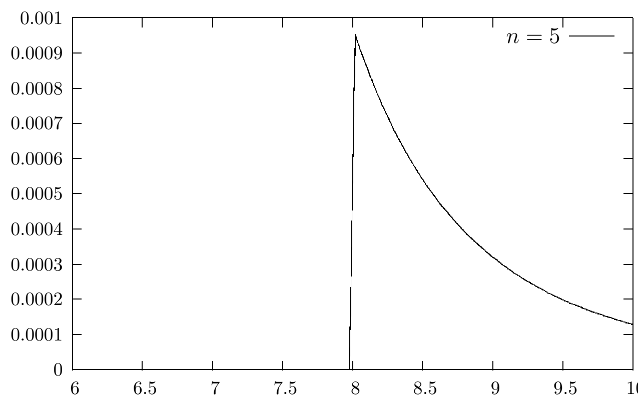
[6] Attention, propriété propre à la loi normale



Graphe de $a \mapsto L_X(x; a, b)$ *lorsque* $b = 8 > \max_i x_i$ *et* $\min_i x_i = 4$

Elle est donc dans tous les cas maximale en $\widehat{a}(x) = \min_i x_i$ (qui ne dépend pas de b).

De même pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ fixés, $\begin{pmatrix}]a, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ b & \mapsto & \frac{1}{(b-a)^n} \mathbb{1}_{\min x_i \geq a} \mathbb{1}_{\max x_i \leq b} \end{pmatrix}$ est identiquement nulle si $\min_i x_i < a$, et sinon admet pour graphe



Graphe de $b \mapsto L_X(x; a, b)$ *lorsque* $a = 4 \leq \min_i x_i$ *et* $\max_i x_i = 8$

Elle est donc dans tous les cas maximale en $\widehat{b}(x) = \max_i x_i$ (qui ne dépend pas de a).
Par conséquent l'estimateur du maximum de vraisemblance de (a, b) est $x \mapsto (\min_i x_i, \max_i x_i)$. Cependant cette statistique ne vérifie pas les propriétés habituelles de l'e.m.v., à commencer par la normalité asymptotique. La loi limite du couple $(\widehat{a}, \widehat{b})$ doit donc être retrouvée 'à la main'.

Cherchons tout d'abord pour $\alpha > 0$ la loi de $n^\alpha(\widehat{a} - a)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n^\alpha(\widehat{a}(X) - a) > t) &= \mathbb{P}(\min X_i > a + \frac{t}{n^\alpha}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > a + \frac{t}{n^\alpha})^n \\ &= \left(1 - \frac{t}{n^\alpha}(b-a)\right)^n \\ &= e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n^\alpha}(b-a)\right)} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ e^{-t/(b-a)} & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{P}(n(\widehat{a}(X) - a) > t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t/(b-a)}$ et donc la fonction de survie de $n(\widehat{a} - a)$ tend quand $n \to +\infty$ vers la fonction de survie d'une loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{b-a}\right)$. Rappelons q la convergence de la fonction de répartition en tout point t de continuité (et donc de la de survie) entraîne la convergence en loi. On montre de la même façon (attention au sens l'inégalité) que

$$n(b - \widehat{b}(X)) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1/(b-a))$$

Calculons enfin la loi jointe de $n \begin{pmatrix} \widehat{a} - a \\ b - \widehat{b} \end{pmatrix}$: pour ce faire calculons de même

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(n(\widehat{a}(X) - a) > t \wedge n(b - \widehat{b}(X)) > u\right) &= \mathbb{P}\left((\min_i X_i) > \frac{t}{n} + a \ \wedge \ (\max_i X_i) < b - \frac{u}{n}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{(\min_i X_i, \max_i X_i)}(y, z) \ \mathbb{1}_{y > \frac{t}{b} + a \ \wedge \ z < b - \frac{u}{n}} \, dy \end{aligned}$$

La loi du couple $(\min_i X_i, \max_i X_i)$ s'obtient alors à partir de celle du n-uplet ordon $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$, à savoir

$$l(y_1, \ldots, y_n) = n! \mathbb{1}_{y_1 < \ldots < y_n} f(y_1) \ldots f(y_n)$$

(Voir TD 2, exercice 1) en intégrant successivement (d'après le théorème de projecti suivant y_{n-1}, puis $y_{n-2}, \ldots$, et ainsi de suite jusqu'à intégrer selon y_2. Il vient en tout état cause

$$f_{(\min_i X_i, \max_i X_i)}(y, z) = \frac{n!}{(n-2)!} f(y) \left(F_X(z) - F_X(y)\right)^{n-2} f(z) \mathbb{1}_{y < z}$$

En conséquence,

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(n(\widehat{a}(X)-a)>t \ \wedge\ n(b-\widehat{b}(X))>u\right) \\
= & \int_{a+\frac{t}{n}}^{b-\frac{u}{n}} \left(\int_{y}^{b-\frac{u}{n}} \frac{n!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(y)\right) \left(\frac{z-a}{b-a}-\frac{y-a}{b-a}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(z)\right) dz \right) dy \\
& \vdots \\
= & \left(1-\frac{1}{n}\frac{y+z}{b-a}\right)^n \\
\xrightarrow[n\to+\infty]{} & e^{-\frac{y+z}{b-a}} \\
= & e^{-\frac{y}{b-a}} \times e^{-\frac{z}{b-a}}
\end{aligned}
$$

qui est la loi jointe de deux exponentielles **indépendantes**.

Autre méthode (beaucoup plus simple) :

On peut directement déterminer la loi jointe de $n\begin{pmatrix} \widehat{a}(X)-a \\ b-\widehat{b}(X) \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(n(\widehat{a}(X)-a)>t \wedge n(b-\widehat{b}(X))<u\right) & = \mathbb{P}\left((\min_i X_i) > \frac{t}{n}+a \ \wedge\ (\max_i X_i) < b-\frac{u}{n}\right) \\
& = \mathbb{P}\left(\forall i\in [\![1,n]\!],\ X_i \in \left]\frac{t}{n}+a\,,\, b-\frac{u}{n}\right[\right) \\
& = \mathbb{P}\left(X_1 \in \left]\frac{t}{n}+a\,,\, b-\frac{u}{n}\right[\right)^n \\
& = \left(\int_{\frac{t}{n}+a}^{b-\frac{u}{n}} \frac{1}{b-a}dx\right)^n \\
& = \left(\int_{\frac{t}{n}+a}^{b-\frac{u}{n}} \frac{1}{b-a}dx\right)^n \\
& = \left(1-\frac{1}{n}\frac{t+u}{b-a}\right)^n \\
& \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t+u}{b-a}} \\
& = e^{-\frac{t}{b-a}} \times e^{-\frac{u}{b-a}}
\end{aligned}
$$

se dont on déduit tout d'abord que les $\widehat{a}(X)-a$ et $b-\widehat{b}(X)$ sont indépendantes, et en outre qu'elles suivent une même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b-a}$, ce qui s'écrit simplement

$$
\boxed{n\begin{pmatrix} \widehat{a}(X)-a \\ b-\widehat{b}(X) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\otimes 2}}
$$

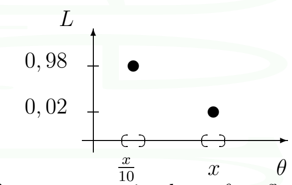
⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 La vraisemblance s'écrit

$$L(x;\theta) = 0.98 \cdot \mathbb{1}_{10\theta}(x) \ +\ 0.02 \cdot \mathbb{1}_{\theta}(x)$$

Le graphe de $\theta \mapsto L(x;\theta)$ est alors, à x fixé



La vraisemblance est donc manifestement maximale en $\theta = \frac{x}{10}$.

Donc $\widehat{\theta} = \frac{x}{10}$ et $\mathbb{P}(\widehat{\theta}(X)=\theta) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{10}=\theta\right) = \mathbb{P}(X=10\theta) = \boxed{0.98}$

☞ Q2 La vraisemblance s'écrit cette fois

$$L(x;\theta) = 0.02 \cdot \mathbb{1}_{\theta}(x) + \sum_{i=1}^{980} 0.001 \cdot \mathbb{1}_{a_i\theta}(x)$$

et est maximale en $\theta = x$.

En conséquence, $\mathbb{P}(\widetilde{\theta}=\theta) = \mathbb{P}(X=\theta) = 0.02$ On a même $\mathbb{P}(\widetilde{\theta} \geq 10\theta) = \mathbb{P}(X \geq 10\theta)$
$1-\mathbb{P}(X=\theta) = 0.98$: on est presque certain de se tromper d'un facteur 10 !

Ce résultat est paradoxal, puisqu'il incite à penser qu'une même méthode d'estimation
l'occurence, la maximisation de la vraisemblance) peut conduire, face à deux problèmes qua
identiques, à un estimation satisfaisante dans un cas mais très décevante dans l'autre.

Plus inquiétant encore (sauf bien-sûr pour l'étudiant de l'ENSAE, qui est vif d'esprit et aver
supposons que les a_i soient inconnus et tirés indépendamment selon une même loi aléatoire
d'espérance 10.5 et (pour simplifier) à support borné. Alors l'e.m.v. reprendrait à nouveau u
valeur beaucoup plus satisfaisante ($\widehat{\theta} = \frac{x}{10.5}$) : en d'autres termes, l'information supplémenta
"connaissance des a_i" se traduit par une estimation beaucoup moins bonne que si on ne dispos
pas de cette information !

L'explication de ce paradoxe tient à la discontinuité de la vraisemblance, et à ce que l'estimat
par maximum de vraisemblance n'est justifié qu'asymptotiquement (lorsque $n \to +\infty$) ;
exemple donne en fait un cas extrême d'écart entre la loi à distance finie et la loi asymptotic
(ici $n=1$, mais il faut noter qu'on peut aisément construire d'autres paradoxes de ce type po
un nombre quelconque d'observations n).

Cet exemple illustre le danger des méthodes dont la justification repose uniquement sur
comportement asymptotique, alors que le nombre de données dont on dispose est toujours
en pratique.

⋆
⋆ ⋆

4 Travaux Dirigés n°4

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On obtient : $\widehat{\alpha} = \min x_i$, $\widehat{\theta} = \overline{x} - \min x_i$.

☞ Q2 On a :

$$\mathbb{P}(n(\widehat{\alpha} - \alpha) \geq t) = \mathbb{P}(\min x_i \geq \alpha + t/n) = \left(\exp^{-t/n\theta}\right)^n = \exp(-t/\theta)$$

et donc $n(\widehat{\alpha} - \alpha) \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

☞ Q3 On ne peut pas appliquer le théorème de la normalité asymptotique à $\widehat{\theta}$, car $\widehat{\theta}$ n'est que l'une des des deux composantes de l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\widehat{\alpha}, \widehat{\theta})$ dont les composantes ne sont pas indépendantes, et qui dans ce cas particulier ne vérifie pas les conditions de régularité habituelles (notamment dérivabilité de la log-vraisemblance).

Il faut retrouver la loi limite d'une autre façon. Ici :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) = \sqrt{n}\left(\overline{x} - (\theta + \alpha)\right) + \sqrt{n}(\alpha - \widehat{\alpha})$$

Comme $\mathbb{E}\left(X\right) = \theta + \alpha$, $\mathbb{V}\left(X\right) = \theta^2$, il vient d'après le théorème central limite :

$$\sqrt{n}\left(\overline{x} - (\theta + \alpha)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

De plus,

$$\sqrt{n}(\alpha - \widehat{\alpha}) = \frac{-1}{\sqrt{n}} n(\widehat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{P} 0$$

puisque $n(\widehat{\alpha} - \alpha) \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$. Rappelons que :

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X, Y_n \xrightarrow{P} a : X_n + Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X + a$$

si a est une constante. Donc :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

☞ Q4 La densité de l'échantillon ordonné $Y = (X_{(1)}, ..., X_{(n)})$ s'écrit

$$f_Y(y_1, ..., y_n) = n! f(y_1) ... f(y_n) \mathbb{1}_{y_1 < ... < y_n}$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)},...,X_{(n)}(y_1,...,y_n)} &= n! \mathbb{1}_{y_1 < ... < y_n} \frac{1}{\theta^n} \left(\Pi_{i=1}^n e^{-\frac{y_i - \alpha}{\theta}}\right) \mathbb{1}_{min_i y_i \geq \alpha} \\ &= \frac{n!}{\theta^n} \mathbb{1}_{\alpha \leq y_1 < ... < y_n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \alpha}{\theta}} \end{aligned}$$

Soit alors

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & (ny_1, (n-1)(y_2 - y_1), \ldots, (y_n - y_{n-1})) \end{pmatrix}$$

Alors ϕ est de clasee C^∞ et en outre

$$f_{\phi(Y)}(z_1, \ldots, z_n) = \left|Jac\phi^{-1}\right| f_Y(\phi^{-1}(z_1, \ldots, z_n))$$

(ceci se montre en effectuant le changement de variable $z = \phi(y)$ dans l'intégrale $\int_A f_Y(y)$, p
toute partie mesurable A de $\mathbb{R}^n$).

Or $\phi(Y)_1 = nY_1$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\cdot)_1}{\partial Y_1} &= n \\ \frac{\partial \phi(\cdot)_1}{\partial Y_i} &= 0, \quad \forall i \geq 2 \end{aligned}$$

puis $\phi(Y)_2 = (n-1)(Y_2 - Y_1)$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\cdot)_2}{\partial Y_1} &= -(n-1) \\ \frac{\partial \phi(\cdot)_2}{\partial Y_2} &= (n-1), \quad \forall i \geq 2 \\ \frac{\partial \phi(\cdot)_2}{\partial Y_i} &= 0, \quad \forall i \geq 3 \end{aligned}$$

de sorte qu'en définitive

$$Jac(\phi) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -(n-1) & (n-1) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-2) & (n-2) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En conséquence, $|Jac(\phi^{-1})| = |Jac(\phi)^{-1}| = |Jac(\phi)|^{-1} = \frac{1}{n!}$

D'autre part, $\mathbb{1}_{y_1 \geq \alpha} = \mathbb{1}_{\phi(y)_1 \geq n\alpha}$, puis pour $i \geq 2$, $\mathbb{1}_{y_i < y_{i+1}} = \mathbb{1}_{\phi(y)_i > 0}$.

Enfin, une récurrence immédiate montre que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\phi^{-1}(z)_i = \sum_{j=1}^i \frac{z_j}{n-j+1}$, de sorte qu
définitive

$$\boxed{f_Z(z_1, ..., z_n) = \theta^{-n} \exp^{-(\sum z_i - n\alpha)/\theta} \mathbb{1}_{z_1 \geq n\alpha} \mathbb{1}_{z_2 > 0} ... \mathbb{1}_{z_n > 0}}$$

Autrement dit, les Z_i sont indépendants, avec $Z_1 \rightsquigarrow n\alpha + \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$, et $Z_i \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ pour $i \geq$
Finalement, constatant que $\widehat{\alpha} = \frac{1}{n} Z_1$ et $\widehat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n Z_i$, on conclut que $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\theta}$ sont indép
dants.

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 On a par définition de la probabilité conditionnelle

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(A|H_i) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_i)}{\mathbb{P}(H_i)}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}(A \cap (\cup_{i=1}^n H_i)) \quad \text{car } (H_1, \dots, H_n) \text{ est complet} \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap H_i) \quad \text{car } (H_1, \dots, H_n) \text{ est disjoint} \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|H_i)\,\mathbb{P}(H_i) \quad \text{car chaque } H_i \text{ est non-vide}
\end{aligned}$$

(cette formule est dite *des probabilités totales*).
Par ailleurs on a

$$\mathbb{P}(A|H_i)\,\mathbb{P}(H_i) = \mathbb{P}(A \cap H_i) = \mathbb{P}(H_i|A)\,\mathbb{P}(A)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_i|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_i)\,\mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \boxed{\frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}}
\end{aligned}$$

Cette relation exprime la probabilité d'un événement H_i, une fois connue la réalisation de A, en fonction de sa probabilité a priori.

☞ Q2 Dans le cas où $\Theta = \{\theta_i \,/\, i \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable il suffit d'appliquer le résultat précédent à $A = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $H_i = \{\theta_i\}$.
Dans le cas général le calcul est similaire : la formule des probabilités totales s'écrit pour toute $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ mesurable

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{A}) = \int_\Theta \mathbb{P}(X \in \mathcal{A}|\theta = \theta_0)\,\mathbb{P}(\theta = \theta_0)\,d\theta_0$$

et par suite pour toute $\mathcal{B} \subset \Theta$ mesurable, à supposer que $\mathbb{P}(X \in \mathcal{A}) \neq 0$

$$\mathbb{P}(\theta \in \mathcal{B}|X \in \mathcal{A}) = \frac{\mathbb{P}(\theta \in \mathcal{B})\,\mathbb{P}(X \in \mathcal{A}|\theta \in \mathcal{B})}{\mathbb{P}(X \in \mathcal{A})}$$

et donc

$$\boxed{\pi_{\cdot|x}(\theta|X = x) = \frac{f_{\mathcal{L}_\theta^{\otimes n}}(x_1,\dots,x_n)\,\pi_0(\theta)}{\int_\Theta f_{\mathcal{L}_\theta^{\otimes n}}(x_1,\dots,x_n)\,\pi_0(\theta)d\theta}}$$

☞ Q3 Attention aux notations : $\mathbb{E}_\theta\left(\dots\widehat{\theta}(X)\dots\theta\dots\right)$ désigne l'espérance sur la variable X, espéra
qui dépend de θ, et non pas une espérance sur la variable θ. En outre l'énoncé suppose ici
Θ est de dimension 1 (sans quoi il faudrait noter $\mathbb{E}_\theta\left\|\widehat{\theta}(x) - \theta\right\|^2$).
Soit $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$.
<u>*Première méthode :*</u>
On cherche l'élément $T : \mathcal{X} \to \Theta$ (qui est une *fonction*) qui minimise

$$\begin{aligned}
R_{\pi_0}(T) &= \int_\Theta \int_\mathcal{X} (T(x) - \theta)^2 f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\pi_0(\theta)dxd\theta \\
&= \int_\mathcal{X} \left(\int_\Theta (T(x) - \theta)^2 f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\pi_0(\theta)d\theta \right) dx \quad \text{d'après Fubini}
\end{aligned}$$

Or la fonction

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{X}^2 & \to & \Theta \\ (x,t) & \mapsto & \int_\Theta (t-\theta)^2 f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\pi_0(\theta)d\theta \end{pmatrix}$$

est positive, donc il suffit de minimiser point-par-point :

$$\widehat{\theta} = argmin_{T:\mathcal{X}\to\Theta} \int_\mathcal{X} \phi(T(x))\,dx = \begin{pmatrix} \mathcal{X} & \to & \Theta \\ x & \mapsto & argmin_{t\in\Theta}\,\phi(x,t) \end{pmatrix}$$

Soit donc $x \in \mathcal{X}$ **fixé**, et calculons le nombre $\widehat{\theta}(x) = argmin_{t\in\Theta}\,\phi(x,t)$. On a

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \int_\Theta (t-\theta)^2 f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)d\theta \\
&= \underbrace{\left(\int_\Theta f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)d\theta\right)}_{a>0} t^2 + \underbrace{\left(-2\int_\Theta \theta f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)d\theta\right)}_{b} t + \underbrace{\left(\int_\Theta \theta^2 f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)d\theta\right)}_{c}
\end{aligned}$$

Donc $\phi(x,t) = at^2 + bt + c$ est une parabole en t (à x fixé), et est donc extrêmale en $-$
comme $a > 0$ elle est *minimale* en $-\frac{b}{2a}$ et donc

$$\begin{aligned}
argmin_{t\in\Theta}\,\phi(x,t) &= -\frac{b}{2a} \\
&= \frac{\int_\Theta \theta f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)d\theta}{\int_\Theta f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)d\theta} \\
&= \int_\Theta \theta \frac{f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)}{\int_\Theta f_{\mathcal{L}_\theta}(x)\phi_0(\theta)d\theta} d\theta
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{X},\ \widehat{\theta}(x) = \int_\Theta \theta \pi_{\cdot|x}(\theta)d\theta}$$

☞ Q4 Dans le cas d'une loi a priori uniforme on a simplement

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}(x) &= \int_{[a,b]} \theta \pi_{\cdot|x}(\theta) d\theta \\ &= \int_{[a,b]} \theta \frac{f_{\mathcal{L}_\theta}(x_1,\ldots,x_n)\frac{1}{b-a}}{\int_\Theta f_{\mathcal{L}_\theta}(x_1,\ldots,x_n)\frac{1}{b-a}d\theta} d\theta \\ &= \frac{\int_{[a,b]} \theta f_{\mathcal{L}_\theta}(x) d\theta}{\int_{[a,b]} f_{\mathcal{L}_\theta}(x) d\theta}\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mathcal{L}_\theta = \mathcal{E}(\theta)$ la densité de l'échantillon indépendant $(X_1,\ldots,X_n)$ est

$$\begin{aligned}f_{\mathcal{E}(\theta)^{\otimes n}}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) &= \Pi_{i=1}^n \left(\theta e^{-\theta x_i} \mathbb{1}_{x_i \geq 0}\right) \\ &= \theta^n e^{-\theta(x_1+\cdots+x_n)} \mathbb{1}_{\min_i x_i \geq 0}\end{aligned}$$

et donc pour $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ il vient

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}(x) &= \frac{\int_{[a,b]} \theta^{n+1} e^{-\theta(x_1+\cdots+x_n)} d\theta}{\int_{[a,b]} \theta^n e^{-\theta(x_1+\cdots+x_n)} d\theta} \\ &= \frac{\left[\theta^{n+1} \frac{e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}}{-\sum_{i=1}^n x_i}\right]_a^b - \int_{[a,b]} (n+1)\theta^n \frac{e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}}{-\sum_{i=1}^n x_i} d\theta}{\int_{[a,b]} \theta^n e^{-\theta(x_1+\cdots+x_n)} d\theta} \quad \text{par parties} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \left(n + 1 - \frac{b^{n+1} e^{-b\sum_{i=1}^n x_i} - a^{n+1} e^{-a\sum_{i=1}^n x_i}}{\int_{[a,b]} \theta^n e^{-\theta(x_1+\cdots+x_n)} d\theta}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\widehat{\theta}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}\left(n+1-\frac{\overline{\theta}^{n+1} e^{-\overline{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}}{\int_{[0,\overline{\theta}]} \theta^n e^{-\theta(x_1+\cdots+x_n)} d\theta}\right)}$ lorsque $\Theta = [0,\overline{\theta}]$ par exemple.

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ, par comparaison, est $\widehat{\theta}^{emv}(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Laplace considère en fait de ne pas détenir d'information sur p autre que celle apportée par les observations : en d'autres termes, il n'a pas d' "a priori" sur p, ce qu'il modélise par une loi a priori uniforme. Cela revient intuitivement à donner une "probabilité égale" à toutes les valeurs possibles de p. Mais cette intuition est en fait trompeuse : si on change la paramétrisation du modèle (en remplaçant p par $q = p^2$ par exemple), on se rend compte alors que la loi a

priori sur q n'est plus uniforme ! Cette reparamétrisation ne nous a pourtant apporté aucu information supplémentaire. Ce paradoxe illustre la difficulté de bien choisir une loi a pri surtout dans un cadre non-informatif (c'est à dire lorsqu'aucune information n'est disponibl priori). Cependant, nous verrons en 4) qu'il est assez simple de se restreindre au moins à choix limité de lois a priori raisonnables.

☞ Q2 La densité de la loi a posteriori $\pi(\theta|x_1,...,x_n)$ du paramètre θ s'écrit sous la forme (v exercice 2) :

$$\pi(\theta|x_1,...,x_n) = \frac{\pi(\theta)\mathbb{P}(x_1,...,x_n|\theta)}{\int_\Theta \pi(\theta)\mathbb{P}(x_1,...,x_n|\theta)d\theta}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\pi(p|N_g = n_g) &= \frac{\pi(p)\mathbb{P}(N_g = n_g|p)}{\int_0^1 \pi(p)\mathbb{P}(N_g = n_g|p)dp} \\ &= \frac{p^{n_g}(1-p)^{n-n_g}}{\int_0^1 p^{n_g}(1-p)^{n-n_g}dp}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(p > \frac{1}{2}|N_g = n_g) &= \int_{[0,1]} \frac{\pi(p)\mathbb{P}(N_g = n_g|p)}{\int_0^1 \pi(p)\mathbb{P}(N_g = n_g|p)dp} \mathbb{1}_{p>\frac{1}{2}} dp \\ &= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 p^{n_g}(1-p)^{n-n_g}dp}{\int_0^1 p^{n_g}(1-p)^{n-n_g}dp}\end{aligned}$$

☞ Q3 Notons π_p la densité de la loi a posteriori : π_p est la densité de la loi $\mathcal{B}(n_g+1, n-n_g+1)$. S espérance et sa variance sont donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\pi_p}[p] &= \frac{n_g+1}{n+2} \\ \mathbb{V}_{\pi_p}[p] &= \frac{(n_g+1)(n-n_g+1)}{(n+2)^2(n+3)}\end{aligned}$$

Or $n_g = \sum_{i=1}^n g_i$ où $g_i = \mathbb{1}_{\text{l'enfant } i \text{ est un garçon}} \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{B}(1, p_0)$.

Donc en vertu de la loi forte des grands nombres $\frac{n_g}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} p_0$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\pi_p}[p] &\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} p_0 \\ \mathbb{V}_{\pi_p}[p] &\underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\rightsquigarrow}} \frac{p_0(1-p_0)}{n}\end{aligned}$$

En d'autres termes, lorsque $n \to +\infty$ la loi a posteriori se "rétrécie" (sa variance tend vers 0) se concentre autour de la vraie valeur p_0. Ce résultat est intuitif : plus on dispose d'observatio plus faible est l'incertidude sur la valeur du paramètre p.

☞ Q4 Si on change la loi a priori uniforme (qui correspond d'ailleurs à une loi $\mathcal{B}(1,1)$) pour une loi a priori plus générale $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$, on obtient une loi a posteriori :

$$\begin{aligned}\pi(p|N_g &= n_g) \propto p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}p^{n_g}(1-p)^{n-n_g}1_{[0,1]}(p)\\ &\propto p^{\alpha+n_g-1}(1-p)^{\beta+n-n_g-1}1_{[0,1]}(p)\end{aligned}$$

(où $\propto$ signifie "proportionnel à")

La loi a posteriori est donc une loi $\mathcal{B}(n_g+\alpha, n-n_g+\beta)$. On vérifie alors facilement que $\mathbb{E}_{\pi_p}[p]$ et $\mathbb{V}_{\pi_p}[p]$ conservent le même comportement asymptotique que dans le cas précédent. En effet, plus grand est le nombre d'observations, plus le poids de l'a priori est faible, et ce poids devient nul asymptotiquement.

Cependant, la Statistique Bayésienne ne repose pas sur des justifications asymptotiques. A distance finie (c'est à dire pour un nombre fini d'observations), une loi a priori mal choisie peut sérieusement déformer la loi a posteriori, et mener à une inférence complètement érronée. Ainsi, au vu du probème posé (situer p dans l'un des deux intervalles $[0,\frac{1}{2}]$ ou $[\frac{1}{2},1]$), on n'a aucune raison de favoriser *a priori* l'une de ces deux régions, seules les observations pouvant nous permettre de les départager. Il est donc naturel de se restreindre au moins aux lois a priori symétriques ($\alpha=\beta$). Parmi celles-ci, on peut aussi écarter les lois de très faible variance (ie telles que α prend de fortes valeurs, ex : $\mathcal{B}(10,10)$), qui privilégient inutilement un voisinage trop restreint du point $\frac{1}{2}$.

Finalement, la loi a priori uniforme proposée par Laplace semble donc un choix raisonnable parmi d'autres, au moins pour le problème posé. Il est en fait possible de proposer une loi plus satisfaisante (dite loi a priori de Jeffreys, ici $\mathcal{B}(1/2,1/2)$) qui permette de s'affranchir du paradoxe de la reparamétrisation présenté en 1).

⋆
⋆ ⋆

5 Travaux Dirigés n°5

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Par définition on a pour $y \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}f(y;a,b) &= \frac{\partial F}{\partial \cdot}(y,a,b)\\ &= aby^{b-1}e^{-ay^b}\end{aligned}$$

Il en découle que

$$h(y;a,b) = aby^{b-1}\mathbb{1}_{y\geq 0}$$

☞ Q2 La fonction de hasard $h(y)$ s'écrit comme le rapport $\frac{f(y)}{S(y)}$. Or

$$\begin{aligned}f(y) &= \frac{\partial F(\cdot;a,b)}{\partial y}(y)\\ &= \lim_{dy\to 0^+}\frac{\mathbb{P}\left(Y\in[y,y+dy[\right)}{dy}\end{aligned}$$

et par ailleurs $S(y) = 1-F(y) = \mathbb{P}(Y \geq y)$.

Autrement dit

$$\begin{aligned}h(y) &= \lim_{dy\to 0^+}\frac{1}{dy}\frac{\mathbb{P}\left(Y\in[y,y+dy[\right)}{\mathbb{P}(Y\geq y)}\\ &= \lim_{dy\to 0^+}\frac{1}{dy}\frac{\mathbb{P}\left(Y\in[y,y+dy[\wedge Y\geq y\right)}{\mathbb{P}(Y\geq y)}\\ &= \lim_{dy\to 0^+}\frac{1}{dy}\mathbb{P}\left(NON(Y\geq y+dy)\mid Y\geq y\right)\end{aligned}$$

En d'autres termes $h(y)dy$ mesure la probabilité, pour un individu encore au chômage à la d y, de **sortir du chômage** peu après y (au sens "après $y+dy$", ceci pour dy "voisin" de 0).

Supposer que h est constante revient à supposer que la probabilité de sortir d'une période chômage de durée dy ne dépend pas de sa date y, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'*effet mémo*

Sachant que

$$\begin{aligned}h(y) &= \frac{aby^{b-1}e^{-aby^b}}{e^{-ay^b}}\\ &= aby^{b-1}\end{aligned}$$

cette condition est vérifiée **si, et seulement si** $b=1$.

Lorsque cette condition est vérifiée, on constate que la loi de durée du chômage s'écrit simp ment pour $y \geq 0$

$$f(y;a,1) = ae^{-ay}$$

dont on remarque qu'il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre a.

☞ Q3 Etudions les variations de $h(y;\cdot,\cdot)$ en fonctionde a et b à $y \geq 0$ donné.
Il vient
– Selon a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial a}(y,a,b) &= by^{b-1} \\ &> 0 \quad \text{car } b > 0\end{aligned}$$

Ainsi la situation du chômage s'améliore (au sens où la probabilité de sortie s'accroît) lorsque a s'accroît.
– Selon b :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial b}(y,a,b) &= ay^{b-1} + ab\ln(y)y^{b-1} \\ &= ay^{b-1}\left(1 + b\ln(y)\right)\end{aligned}$$

En conséquence
– Si $y \in]0, e^{-\frac{1}{b}}[$, soit si $b > -\frac{1}{\ln(y)}$, la situation du chômage *se détériore* lorsque b croît.
– Si $y \in]e^{-\frac{1}{b}}, +\infty[$, soit si $b < -\frac{1}{\ln(y)}$, la situation du chômage *s'améliore* lorsque b croît.

On suppose dans cette partie $b = 1$. Le modèle est alors uniquement paramétré par a.

☞ Q1 La vraisemblance du modèle est donnée pour $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned}L(y;a,1) &= \Pi_{i=1}^n \left(ae^{-ay_i}\mathbb{1}_{y_i \geq 0}\right) \\ &= \left(a^n \mathbb{1}_{\min_i y_i \geq 0}\right) \cdot e^{-a\left(\sum_{i=1}^n \cdot y_i\right)}\end{aligned}$$

On constate donc que le modèle est exponentiel, de statistique exhaustive $T(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i$.

☞ Q2 La log-vraisemblance est alors pour $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$

$$\ln L(y;a,1) = n\ln a - a\sum_{i=1}^n y_i$$

Le score s'écrit donc

$$\begin{aligned}S_a(y;a,1) &= \frac{\partial \ln L}{\partial a}(y;a,1) \\ &= \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n y_i\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(y_i) &= \int_{\mathbb{R}} y_i \cdot ae^{-ay_i}\mathbb{1}_{y_i\geq 0}dy_i \\ &= -\int_0^{+\infty}(-au)e^{-au}du \\ &= +\frac{1}{a}\left[e^{-au}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}\left(S_a(y;a,1)\right) = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(y_i) = 0$$

de sorte que le vecteur score est bien centré (ce qui est une propriété générale, voir TD exercice 2)

☞ Q3 De la condition nécessaire $\frac{\partial \ln L}{\partial a}(\widehat{a_0}) = 0$ on tire $\widehat{a_0} = \frac{1}{\bar{y}}$; réciproquement $\widehat{a_0}$ maximise bien log-vraisemblance car celle-ci est concave.
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\widehat{a_0}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\bar{y}}\right) \\ &> \frac{1}{\mathbb{E}(\bar{y})} \quad \text{(d'après l'inégalité de Jensen)} \\ &= a\end{aligned}$$

Autrement dit, $\widehat{a_0}$ est biaisé et surestime systématiquement la vraie valeur a.
On pourrait même calculer le biais exact, en s'appuyant sur le fait que $(Y_1+\ldots+Y_n) \leadsto \Gamma(n,a)$ en calculant explicitement $\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{s} f_{\Gamma(a)}(s)ds = \frac{n}{n-1}a$; on en déduirait que $\frac{n-1}{n}\widehat{a_0}$ est un estimat sans biais de a.

☞ Q4 On a

$$I_n(a) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = -\frac{n}{a^2}\right)$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{V}_{as}(\widehat{a_0}) = \frac{a^2}{n}}$$

(Attention, c'est bien $I_n(a)^{-1}$ et non pas $I_1(a)^{-1}$ car on étudie la loi asymptotique de $(\widehat{a_0} - \mathbb{E}($ et non pas celle de $\sqrt{n}(\widehat{a_0} - \mathbb{E}(\widehat{a_0})))$

☞ Q1 La vraisemblance du modèle est donnée pour $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned}L(y;a,b) &= \Pi_{i=1}^n\left(aby_i^{b-1}e^{-ay_i^b}\mathbb{1}_{y_i\geq 0}\right) \\ &= \left((ab)^n \mathbb{1}_{\min_i y_i \geq 0}\right) \cdot \left(\Pi_{i=1}^n y_i^{b-1}\right) \cdot e^{-\sum_{i=1}^n\left(a\cdot y_i^b\right)}\end{aligned}$$

On constate donc que le modèle n'est **pas** exponentiel, car on ne peut dissocier les termes y_i du paramètre (a,b) là où ils interviennent (à savoir $\sum_{i=1}^n y_i^b$). Donc en vertu du théore de factorisation $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est exhaustive et minimale, et il n'existe donc pas de statistic exhaustive comportant moins de n composantes.

☞ Q2 La log-vraisemblance s'écrit pour $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$

$$\ln L(y;a,b) = n\ln a + n\ln b + (b-1)\sum_{i=1}^n \ln y_i - a\sum_{i=1}^n y_i^b$$

On a
$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a}(y;a,b) &= \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n {y_i}^b \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b}(y;a,b) &= \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln y_i - a\sum_{i=1}^n \ln y_i \, {y_i}^b \end{cases}$$
et donc l'estimateur $(\widehat{a},\widehat{b})$ de (a,b) vérifie
$$\begin{cases} \widehat{a} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n {y_i}^{\widehat{b}}} \\ \widehat{a}\sum_{i=1}^n \ln y_i \, {y_i}^{\widehat{b}} - \frac{n}{\widehat{b}} &= \sum_{i=1}^n \ln y_i \end{cases}$$

On constate que $\widehat{b}$, et par suite $\widehat{a}$, n'est pas exprimable sous forme analytique. Pour autant l'étude de la fonction $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ b & \mapsto & \frac{1}{b} + \alpha - \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i y_i^b}{\sum_{i=1}^n y_i^b} \end{pmatrix}$ assure de l'existence et de l'unicité de $\widehat{b}$, et donc de $\widehat{a}$.

☞ Q3 On a successivement
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}(y;a,b) &= -\frac{n}{a^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial b}(y;a,b) &= -\sum_{i=1}^n \left(\ln y_i {y_i}^b\right) \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2}(y;a,b) &= -\frac{n}{b^2} - a\sum_{i=1}^n \left((\ln y_i)^2 {y_i}^b\right) \end{aligned}$$

En conséquence
$$\mathbb{V}_{as}\left(\begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{n}{a^2} & n\mathbb{E}\left({y_1}^b \ln y_1\right) \\ n\mathbb{E}\left({y_1}^b \ln y_1\right) & \frac{n}{b^2} + na\mathbb{E}\left((\ln y_i)^2 {y_i}^b\right) \end{pmatrix}^{-1}$$

Il reste alors à exprimer $\mathbb{E}\left(y_1^b \ln(y_1)^i\right)$ pour $i \in \{1,2\}$; ce calcul peut être fait au moyen des intégrales eulériennes.

Remarquons pour ce faire que si Z suit une loi de Weibull de paramètre (α,β), de densité $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha\,\theta\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\theta x^\alpha}\mathbb{1}_{x>0}$, alors pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z^\alpha \ln(Z)^p\right) &= \int_0^{+\infty} \theta\, z^\alpha \, \ln^p(z)\, \alpha\, z^{\alpha-1}\, e^{-\theta z^\alpha}\, dz \\ &= \frac{1}{\alpha^p\,\theta}\int_0^{+\infty} \ln^p\left(\frac{u}{\theta}\right)\, u\, e^{-u} du \quad \text{en posant } u = \theta z^\alpha \end{aligned}$$

En particulier pour $p \in \{1,2\}$ on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z^\alpha \ln(Z)\right) &= \frac{1}{\alpha\,\theta}\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{u}{\theta}\right)\, u\, e^{-u} du \\ \mathbb{E}\left(Z^\alpha (\ln Z)^2\right) &= \frac{1}{\alpha^2\,\theta}\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{u}{\theta}\right)^2\, u\, e^{-u} du \end{aligned}$$

Or (TD 2, exercice 2)
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^\alpha \ln(X)\right) &= \frac{1-\gamma-\ln\theta}{\theta\,\alpha} \\ \mathbb{E}\left(X^\alpha (\ln X)^2\right) &= \frac{1}{\alpha^2\,\theta}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 - 2\,(1-\gamma)\,\ln(\theta) + \ln(\theta)^2\right) \end{aligned}$$

Ceci permet alors de conclure en posant $\theta = a$ et $\alpha = b$ que[7]
$$\boxed{\mathbb{V}_{as}\left(\begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{n}{a^2} & n\frac{1-\gamma-\ln a}{ab} \\ n\frac{1-\gamma-\ln a}{ab} & \frac{n}{b^2}\left(1 + \frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 - 2(1-\gamma)\ln a + (\ln a)^2\right) \end{pmatrix}^{-1}}$$

☞ Q4 Remarquons que pour toute matrice A, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Com(A)'$ où $Com(A)$ désigne la comatrice A ; par suite
$$I_n(a,1)^{-1} = \frac{1}{|I_n(a,1)|}\begin{pmatrix} n + na\mathbb{E}\left((\ln y_1)^2 y_1\right) & -n\mathbb{E}\left(y_1 \ln y_1\right) \\ -n\mathbb{E}\left(y_1 \ln y_1\right) & \frac{n}{a^2} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs,
$$|I_n(a,1)| = \frac{n}{a^2}\left(n + na\mathbb{E}\left((\ln y_1)^2 y_1\right)\right) - \left(n\mathbb{E}\left(y_1 \ln y_1\right)\right)^2$$

En conséquence,
$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{a}\right) &= \frac{n + na\mathbb{E}\left((\ln y_1)^2 y_1\right)}{|I_n(a,1)|} \\ &= \frac{n + na\mathbb{E}\left((\ln y_1)^2 y_1\right)}{\frac{n}{a^2}\left(n + na\mathbb{E}\left((\ln y_1)^2 y_1\right)\right) - \left(n\mathbb{E}\left(y_1 \ln y_1\right)\right)^2} \\ &= \frac{a^2}{n}\left(1 + \frac{\frac{a^2}{n}\left(n\mathbb{E}\left(y_1 \ln y_1\right)\right)^2}{\left(n + na\mathbb{E}\left((\ln y_1)^2 y_1\right)\right) - \frac{a^2}{n}\left(n\mathbb{E}\left(y_1 \ln y_1\right)\right)^2}\right) \\ &\geq \frac{a^2}{n} \\ &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{a_0}\right) \end{aligned}$$

Ainsi estimer sous contrainte permet d'obtenir un estimateur *plus efficace* qu'estimer sa contrainte.

☞ Q5 Lorsque l'échantillon est de petit taille, une simulation permettrait d'étudier la distribution $\begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix}$, de la façon suivante :

– Observant $(y_1,\ldots,y_n)$, on en tire $\begin{pmatrix} \widehat{a^0} \\ \widehat{b^0} \end{pmatrix}$ estimateur du maximum de vraisemblance $\begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \end{pmatrix}$.

[7] Bien que la tentation soit forte, nous résisterons ici au plaisir d'inverser cette matrice.

– Soit alors $\mathcal{W}^0$ la loi d Weibull de paramètre $\widehat{a^0}, \widehat{b^0}$; on tire alors un échantillon indépendant de taille N selon $\mathcal{W}^0$, soit $({y^0}_1, \ldots, {y^0}_N)$.
– de cet échantillon on tire alors $\begin{pmatrix} \widehat{a^1} \\ \widehat{b^1} \end{pmatrix}$, et ainsi de suite.

Bien-entendu, à la limite lorsque $N \to +\infty$ on a $\begin{pmatrix} \widehat{a^1} \\ \widehat{b^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{a^0} \\ \widehat{b^0} \end{pmatrix}$; il en va de même lorsque le nombre d'itération devient arbitrairement grand.
L'idée serait donc plutôt de se limiter à une ou deux itérations, mais de **répéter le tirage** pour obtenir la distribution empirique de $\begin{pmatrix} \widehat{a^1} \\ \widehat{b^1} \end{pmatrix}$.
On considère maintenant le cas de T observations $Y_1, \ldots, Y_T$ indépendantes, de lois respectives :

$$F(y; e^{\alpha t}, 1)\ ,\ t \in [\![1, T]\!]\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

☞ Q1 La vraisemblance du modèle est donnée pour $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} L\,(y; \alpha) &= \Pi_{t=1}^{T} e^{\alpha t} e^{-e^{\alpha t} y_t} \left(\mathbb{1}_{y_t \geq 0}\right) \\ &= \mathbb{1}_{\inf_{t \in [\![1,T]\!]} y_t \geq 0} e^{\alpha \sum_{t=1}^{T} t} e^{-\sum_{t=1}^{T} e^{\alpha t} y_t} \end{aligned}$$

Une condition nécéssaire sur l'estimateur $\widehat{\alpha}$ de α est donc

$$\sum_{t=1}^{T} \left(t y_t e^{t\widehat{\alpha}}\right) = \frac{T(T+1)}{2}$$

condition dont on vérifie qu'elle est suffisante puisque la log-vraisemblance est strictement concave car de dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2}(y; \alpha) = -\sum_{t=1}^{T} t^2 y_t e^{\alpha t} < 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

☞ Q2 On a

$$\begin{aligned} u_t &= y_t - e^{-\widehat{\alpha} t} \\ &= y_t - \mathbb{E}_{|\alpha = \widehat{\alpha}}(y_t) \end{aligned}$$

Ainsi u_t représente l'*erreur de la prévision empirique* de y_t, différence entre la réalisation réelle de y_t et la meilleure prévision compte-tenu du modèle estimé.

☞ Q3 On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}(y, \alpha) &= \frac{T(T+1)}{2} - \sum_{t=1}^{T} t y_t e^{\alpha t} \\ &= \sum_{t=1}^{T} \left(t - t y_t e^{\alpha t}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{T} t \left(1 - y_t e^{\alpha t}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{T} t e^{\alpha t} \left(e^{-\alpha t} - y_t\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}(y, \widehat{\alpha}) = \sum_{t=1}^{T} e^{\widehat{\alpha} t} t u_t$$

Posons donc

$$< \cdot | \cdot >_\rho : \begin{pmatrix} (\mathbb{R}^T)^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ ((x_t)_t, (y_t)_t) & \mapsto & \sum_{t=1}^{T} \rho^t x_t y_t \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, $< \cdot | \cdot >_\rho$ est un produit scalaire, et en outre

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}(y, \widehat{\alpha}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad < (1, \ldots, T) | u) >_{e^{\widehat{\alpha}}} = 0$$

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 On suppose pour simplier que jusqu'à la question **4**, $T = +\infty$. Sinon, il faudrait alourdir expressions des densités qui suivent en adjoignant l'indicatrice $\mathbb{1}_{t_i \leq T}$ adéquate.

On a pour $t \in [\![1, T-1]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) &= \mathbb{P}(\text{L'individu } i \text{ reçoit au moins une offre intéressante entre } t \text{ et } t+1) \\
&= \mathbb{P}(N_t^i \geq 1 \ \wedge \ \text{Une des } N_t^i \text{ offres propose un salaire} \geq \xi_i) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t^i = k \ \wedge \ \text{Une des } k \text{ offres propose un salaire} \geq \xi_i) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t^i = k) \cdot \mathbb{P}(\text{Une des } k \text{ offres propose un salaire} \geq \xi_i) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t^i = k) \cdot (1 - \mathbb{P}(\text{Toutes les } k \text{ offres proposent un salaire} < \xi_i)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right) \cdot \left(1 - F(\xi_i)^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ - \ e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda F(\xi_i))^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right) \ - \ e^{-\lambda}\left(e^{\lambda F(\xi_i)} - 1\right) \\
&= 1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}
\end{aligned}$$

☞ Q2 On a pour $t \in [\![1, T-1]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_i^* = t+1) &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \ \wedge \ T_i > t) \quad \text{car } T_i^* - 1 < T_i \leq T_i^* \\
&= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) \cdot \mathbb{P}(T_i > t) \\
&= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) \cdot (1 - \mathbb{P}(T_i \leq t)) \\
&= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{t} \mathbb{P}(T_i^* = k)\right)
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore, en notant $u_t = \mathbb{P}(T_i^* = t)$ et $\rho = 1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}$

$$u_{t+1} = \rho\left(1 - \sum_{k=1}^{t} u_k\right)$$

avec $u_1 = \mathbb{P}(T_i^* = 1) = \mathbb{P}(T_i^* = 1 \,|\, T_i > 0) = \rho$.
Alors, $u_2 = \rho(1-\rho)$, puis $u_3 = \rho(1 - \rho - \rho(1-\rho)) = \rho(1-\rho)^2$.

Soit donc $t \geq 3$ tel que $\forall t' \leq t, u_{t'} = \rho(1-\rho)^{t'-1}$; alors

$$\begin{aligned}
u_{t+1} &= \rho\left(1 - \sum_{t'=1}^{t} u_{t'}\right) \\
&= \rho\left(1 - \sum_{t'=1}^{t} \rho(1-\rho)^{t'-1}\right) \\
&= \rho\left(1 - \rho\sum_{t'=0}^{t-1} (1-\rho)^{t'}\right) \\
&= \rho\left(1 - \rho\frac{1-(1-\rho)^t}{1-(1-\rho)}\right) \\
&= \rho\,(1-\rho)^t
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall t \in [\![1, T-1]\!]$, $u_{t+1} = \rho(1-\rho)^t$, ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\forall t \in [\![1, T-1]\!],\ \mathbb{P}(T_i^* = t+1) = \left(1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}\right) e^{\lambda t (F(\xi_i)-1)}}$$

Autre méthode : On a directement pour $t \in [\![1, T-1]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_i^* = t+1) &= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \ \wedge \ T_i > t) \quad \text{car } T_i^* - 1 < T_i \leq T_i^* \\
&= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) \cdot \mathbb{P}(T_i > t) \\
&= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} \mathbb{P}(T_i > j+1 \,|\, T_i > j)\right) \\
&= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} (1 - \mathbb{P}(T_i \leq j+1 \,|\, T_i > j))\right) \\
&= \mathbb{P}(T_i^* = t+1 \,|\, T_i > t) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} (1 - \mathbb{P}(T_i^* = j+1 \,|\, T_i > j))\right) \\
&= \left(1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}\right) \cdot \left(\prod_{j=0}^{t-1} \left(e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}\right)\right) \\
&= \left(1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}\right) e^{\lambda t (F(\xi_i)-1)}
\end{aligned}$$

Les comportements des individus étant censément indépentants, les variables $(T_i^*)_{i \in [\![1,n]\!]}$ s statistiquement indépendantes et par conséquent

$$L_{T_1^*,\ldots,T_n^*}(t_1, \ldots, t_n \ ; \ F, \lambda) = \Pi_{i=1}^n \left(1 - e^{\lambda(F(\xi_i)-1)}\right) e^{\lambda(F(\xi_i)-1)\cdot(t_i-1)} \mathbb{1}_{\min_i t_i \geq 1}$$

☞ Q3 Soit $(t_1, \ldots, t_n) \in [\![1, T]\!]^n$, et soit $\phi : \begin{pmatrix} [0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ \eta & \mapsto & (1-\eta)^n \eta^{\sum_{i=1}^n (t_i - 1)} \end{pmatrix}$.

Alors $\ln \phi$ est C^∞, et de dérivée $\frac{\partial \ln \phi}{\partial \eta}(\eta) = -\frac{n}{1-\eta} + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^n (t_i - 1)$; donc elle est maximale $\widehat{\eta} = 1 - \frac{1}{\bar{t}}$ où $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i$.

Or $L_{T_1^*,\ldots,T_n^*}(t_1,\ldots,t_n\ ;\ F,\lambda) = \phi\left(e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)$, donc par conséquent $\widehat{\lambda}$ vérifie $e^{\widehat{\lambda}(F(\xi)-1)} = \widehat{\eta} = 1 - \frac{1}{\bar{t}}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\widehat{\lambda} = \tfrac{1}{1-F(\xi)} \ln(1 + \tfrac{1}{\bar{t}-1})}$$

On a d'après la loi de grands nombres

$$\begin{aligned}
\lim_{p.s.,n\infty} \bar{T} &= \mathbb{E}\left(T_i^*\right) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(T_i^* = t\right) \cdot t \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} (1-a) t a^{t-1}, \quad \text{en notant } a = e^{\lambda(F(\xi)-1)} \\
&= (1-a) \cdot \left(\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{t=1}^{+\infty} t x^{t-1} \end{array} \right)(a) \\
&= (1-a) \cdot \frac{\partial \left(x \mapsto \sum_{t=0}^{+\infty} x^t\right)}{\partial x}(a), \quad \text{car la série converge absolument sur le disque ouvert} \\
&= (1-a) \cdot \frac{\partial \left(x \mapsto \frac{1}{1-x}\right)}{\partial x}(a) \\
&= (1-a) \cdot \frac{1}{(1-a)^2} \\
&= \frac{1}{1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}}
\end{aligned}$$

Remarque : Pour calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} P(k) t^k$, il suffit de décomposer le polynôme $P(\mathbb{X})$ dans la base $1, \mathbb{X}-1, (\mathbb{X}-1)(\mathbb{X}-2), \ldots$ ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} P(k) t^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{d} \alpha_i \underbrace{(k-1)\cdots(k-i)}_{i \text{ termes}} \right) t^k \\
&= \sum_{i=0}^{d} \sum_{k=i}^{+\infty} \alpha_i \frac{\partial^i \left(x \mapsto x^k\right)}{\partial x^i}_{(t)} \\
&= \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \frac{\partial^i \left(x \mapsto \frac{1}{1-x}\right)}{\partial x^i}_{(t)} \\
&= \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \frac{(-1)^i i!}{(1-t)^{i+1}}
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} & \frac{1}{1-F(\xi)} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{1-e^{\lambda(F(\xi)-1)}} - 1}\right) \\
= & \frac{1}{1-F(\xi)} \ln\left(1 + \frac{1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}}\right) \\
= & \frac{1}{1-F(\xi)} \ln\left(\frac{1}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}}\right) \\
= & \lambda
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\widehat{\lambda}$ est un estimateur convergent de λ.

Cherchons enfin la loi limite de $(\widehat{\lambda}-\lambda)$; pous ce faire cherchons tout d'abord celle de $(\bar{T}-\mathbb{E}(\bar{T}$
On a, en notant $a = e^{\lambda(F(\xi)-1)}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(T_i^*\right) &= \mathbb{E}\left(T_i^{*2}\right) - \mathbb{E}\left(T_i^*\right)^2 \\
&= (1-a) \sum_{t=1}^{+\infty} t^2 a^{t-1} - \frac{1}{(1-a)^2} \\
&= (1-a) \left(a \sum_{t=2}^{+\infty} t(t-1) a^{t-2} + \sum_{t=1}^{+\infty} t a^{t-1} \right) - \frac{1}{(1-a)^2} \\
&= (1-a) \left(a \frac{2}{(1-a)^3} + \frac{1}{(1-a)^2} \right) - \frac{1}{(1-a)^2}, \quad \text{car les séries convergent absolum} \\
&= \frac{1+a}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1-a)^2} \\
&= \frac{a}{(1-a)^2}
\end{aligned}$$

D'après le Théorème Central Limite on a donc

$$\sqrt{n}\left(\bar{T} - \frac{1}{1-a}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{a}{(1-a)^2}\right)$$

donc d'après le théorème de Slutsky

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{a}{(1-a)^2} \cdot g'\left(\frac{1}{1-a}\right)^2\right)$$

où $g : \left(\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-F(\xi)} \ln(1 + \frac{1}{x-1}) \end{array} \right)$.
On a $\forall x, g'(x) = \frac{1}{1-F(\xi)} \frac{1}{x(x-1)}$ et donc $g'\left(\frac{1}{1-a}\right) = \frac{1}{1-F(\xi)} \frac{(1-a)^2}{a}$ de sorte que finalement

$$\boxed{\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(1-F(\xi))^2} \frac{\left(1-e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^2}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}}\right)}$$

☞ Q4 On a pour $t \in [\![1, T-1]\!]$

$$
\begin{aligned}
\text{“}T_i^{**} = t+1\text{”} &= \begin{cases} \text{“}T_i^* = t+1\text{”} & \text{si “}T_i^* \leq T\text{”} \\ \text{“}T+1 = t+1\text{”} & \text{si “}T_i^* > T\text{”} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{soit} & \text{“}T_i^* \leq T \text{ et } T_i^* = t+1\text{”} \\ \text{soit} & \text{“}T_i^* > T \text{ et } T+1 = t+1\text{”} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{soit} & \text{“}t+1 \leq T \text{ et } T_i^* = t+1\text{”} \\ \text{soit} & \text{“}T_i^* = T+1 \text{ et } T+1 = t+1\text{”} \\ \text{soit} & \text{“}T_i^* = T+1 \text{ et } T+1 > t+1\text{”} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{soit} & \text{“}t+1 \leq T \text{ et } T_i^* = t+1\text{”} \\ \text{soit} & \text{“}T_i^* = t+1 \text{ et } T+1 = t+1\text{”} \\ \text{soit} & \underbrace{\text{“}T_i^* = T+1 \text{ et } T+1 > t+1\text{”}}_{\text{événement impossible}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\mathbb{P}\left(T_i^{**} = t+1\right) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(T_i^* = t+1\right) & \text{si } t+1 \leq T \\ \mathbb{P}\left(T_i^* > T\right) & \text{si } t+1 = T+1 \\ 0 & \text{si } t+1 > T+1 \end{cases}
$$

Or $\mathbb{P}\left(T_i^* = t+1\right) = \left(1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right) e^{\lambda t(F(\xi)-1)}$; et par ailleurs

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_i^* > T\right) &= \sum_{\tau=T+1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(T_i^* = \tau\right) \\
&= \sum_{\tau=T}^{+\infty} \left(1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right) \left(e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{\tau} \\
&= e^{\lambda(F(\xi)-1)\cdot T}
\end{aligned}
$$

En conséquence on a

$$
\begin{aligned}
& L_{T_1^{**},\dots,T_n^{**}}(t_1+1,\dots,t_n+1\,;\,F,\lambda) \\
=\ & \Pi_{i\in[\![1,n]\!]} \mathbb{P}\left(T_i^{**} = t_i+1\right) \\
=\ & \left(\Pi_{t_i+1\leq T} \mathbb{P}\left(T_i^* = t_i+1\right)\right) \cdot \left(\Pi_{t_i+1>T} \mathbb{P}\left(T_i^* > T\right) \mathbb{1}_{t_i+1=T+1}\right) \\
=\ & \left(\Pi_{t_i+1\leq T} \left(1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right) e^{\lambda t_i(F(\xi)-1)}\right) \left(\Pi_{t_i\geq T} \left(e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^T \cdot \mathbb{1}_{t_i+1=T+1}\right) \\
=\ & \left(\left(1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{|\{i/t_i+1\leq T\}|} \cdot \left(e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{\sum_{t_i+1\leq T} t_i}\right) \left(\left(e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{\sum_{t_i\geq T} t_i}\right) \\
=\ & \left(\left(1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{|\{i/t_i<T\}|}\right) \left(\left(e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{\sum_{\forall t_i} t_i}\right) \\
=\ & \left(\left(1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{|\{i/t_i<T\}|}\right) \left(\left(e^{\lambda(F(\xi)-1)}\right)^{n\bar{t}}\right)
\end{aligned}
$$

On en tire que

$$
\frac{\partial \ln L_{T_1^{**},\dots,T_n^{**}}}{\partial \lambda}(t_1,\dots,t_n\,;\,F,\lambda) = -\frac{|\{i/t_i<T\}|}{1 - e^{\lambda(F(\xi)-1)}} + \frac{n(\bar{t}-1)}{e^{\lambda(F(\xi)-1)}}
$$

de sorte que

$$
e^{\widehat{\lambda(F(\xi)-1)}} = \frac{n(\bar{t}-1)}{|\{i/t_i<T\}| + n(\bar{t}-1)}
$$

et donc

$$
\boxed{\widehat{\lambda^{censure}} = \frac{1}{F(\xi)-1} \ln\left(\frac{n(\bar{t}-1)}{|\{i/t_i<T\}|+n(\bar{t}-1)}\right)}
$$

Comme en l'absence de censure ($T = +\infty$) on a $\widehat{\lambda} = \frac{1}{F(\xi)-1}\ln\left(1 - \frac{1}{t}\right)$ on a

$$
\begin{aligned}
\widehat{\lambda^{censure}} - \widehat{\lambda} &= \frac{1}{F(\xi)-1}\left(\ln\left(\frac{\bar{t}-1}{\frac{|\{i/t_i<T\}|}{n} + \bar{t} - 1}\right) - \ln\left(\frac{\bar{t}-1}{\bar{t}}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{F(\xi)-1} \ln\left(1 + \frac{|\{i/t_i<T\}|}{n}\right)
\end{aligned}
$$

☞ Q5 La vraisemblance s'écrit cette fois

$$
L_{T_1^{**},\dots,T_n^{**}}(t_1,\dots,t_n\,;\,\gamma,\lambda) = \left(1 - e^{-\lambda e^{\gamma(\xi-\xi_0)}}\right)^n \left(e^{-\lambda e^{\gamma(\xi-\xi_0)}}\right)^{n\bar{t}} \mathbb{1}_{\xi\geq\xi_0}
$$

On constate alors que $\phi : ((\lambda,\gamma) \mapsto \lambda r^{\gamma})$ n'est jamais injective (car $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}, \phi(1,1) = r$
$\phi\left(\frac{1}{2}, \sqrt{r}\right)$), de sorte que la vraisemblance $\left((\lambda,\gamma) \mapsto L_{T_1^{**},\dots,T_n^{**}}(t_1,\dots,t_n\,;\,\gamma,\lambda)\right)$ ne l'est pas n
plus, de sorte que le paramètre (λ,γ) n'est **pas** identifiable. D'où l'intérêt des calculs précéde
...

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 L'assertion est triviale lorsque $n = 1$.
Soit donc $n \geq 1$ tel que l'assertion soit vraie.
Soient $Y_1,\dots,Y_{n+1}$ i.i.d. de densité $f_{\mathcal{E}}(\cdot,\lambda)$.
Définissons pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i$.
Constatant que $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$, définissons $\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*2} & \to & \mathbb{R}^{+*}\times]0,1[\\ (x,y) & \mapsto & (x+y, \frac{x}{x+y})) \end{array}\right)$. Alors ϕ
un C^{∞}-difféomorphisme, de jacobien $\left|\left(\begin{array}{cc} \text{y} & \text{x} \\ \text{1-y} & \text{x} \end{array}\right)^{-1}\right| = \frac{1}{x}$.
Or $L_{S_n,Y_{n+1}}(s,y) = \left(\lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{s>0}\right) \cdot \left(\lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y>0}\right)$, par hypothèse de récurrence et puis
S_n et Y_{n+1} sont indépendantes (car les $(Y_i)_i$ sont toutes indépendantes).
En conséquence, puisque $\phi^{-1}(u,v) = (uv, u(1-v))$, $L_{\phi(S_n,Y_{n+1})}(u,v) = \lambda^{n+1} \frac{(uv)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} u \mathbb{1}_{u>0}$

.

En particulier d'après le théorème de projection $L_{(\phi(S_n,Y_{n+1}))_1}(u) = \lambda^{n+1}\frac{u^n}{n!}e^{-\lambda u}\mathbb{1}_{u>0}$, c'est-à-dire

$$L_{Y_1+\cdots+Y_{n+1}}(u) = \lambda^{n+1}\frac{u^n}{n!}e^{-\lambda u}\mathbb{1}_{u>0}$$

de sorte que l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

☞ Q1 Le modèle statistique s'écrit $\left\{\left(\mathbb{R}^{+2}\right)^n \ , \ (\mathcal{E}\cdot\mathcal{E})^{\otimes n}\right\}$.

On a de plus pour $i \in [\![1,n]\!]$ $L_{Z_i,C_i}(z_i, c_i \ ; \ \lambda,\mu) = \lambda\mu e^{-\lambda z_i - \mu c_i}$, et donc

$$L_{Z_1,\ldots,Z_n,C_1,\ldots,C_n}(z_1,\ldots,z_n,c_1,\ldots,c_n \ ; \ \lambda,\mu) = (\lambda\mu)^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n z_i - \mu\sum_{i=1}^n c_i}\mathbb{1}_{\min_i z_i\geq 0}\mathbb{1}_{\min_i c_i\geq 0}$$

En particulier le modèle est exponentiel et une statistique exhaustive est

$$(z_1,\ldots,z_n,c_1,\ldots,c_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n z_i, \sum_{i=1}^n c_i\right)$$

☞ Q2 On a immédiatement $\frac{\partial \ln L_{Z_1,\ldots,Z_n,C_1,\ldots,C_n}}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n z_i$, et par suite un estimateur de λ et $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\bar{z}}$ (la log-vraisemblance étant concave, elle est bien maximale en $\bar{z}$). De même un estimateur de μ et $\widehat{\mu} = \frac{1}{\bar{c}}$.

☞ Q3 On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln L_{Z_1,\ldots,Z_n,C_1,\ldots,C_n}}{\partial\lambda^2} &= \frac{n}{\lambda^2}\\
\frac{\partial^2 \ln L_{Z_1,\ldots,Z_n,C_1,\ldots,C_n}}{\partial\lambda\partial\mu} &= 0\\
\frac{\partial^2 \ln L_{Z_1,\ldots,Z_n,C_1,\ldots,C_n}}{\partial\mu^2} &= \frac{n}{\mu^2}
\end{aligned}$$

de sorte que $I_1(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2}\end{pmatrix}$ d'inverse $I_1(\lambda,\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}$ et donc d'après le Théorème Central Limite

$$\boxed{\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}-\lambda\\ \widehat{\mu}-\mu\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}\right)}$$

☞ Q4 Déterminons la loi de $\widehat{\lambda}$: soit donc $h : (\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ mesurable bornée, et calculons $\mathbb{E}\left(h(\widehat{\lambda})\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(h(\widehat{\lambda})\right) &= \mathbb{E}\left(h\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n z_i}\right)\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{n}{s}\right)\lambda^n\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda s}\mathbb{1}_{s>0}\ ds\\
&= -\int_{0^+}^{+\infty} h(u)\lambda^n\frac{\left(\frac{n}{u}\right)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda\frac{n}{u}}\mathbb{1}_{u>0}\ \left(-\frac{n}{u^2}\right)du
\end{aligned}$$

En conséquence, $L_{\widehat{\lambda}}(u) = \frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{n}{u}\right)^{n+1}e^{-\lambda\frac{n}{u}}\mathbb{1}_{u>0}$.
De façon similaire, $L_{\widehat{\mu}}(v) = \frac{\mu^n}{n!}\left(\frac{n}{v}\right)^{n+1}e^{-\mu\frac{n}{v}}\mathbb{1}_{v>0}$.
Ainsi,

$$L_{\widehat{\lambda},\widehat{\mu}}(l,m) = \frac{(\lambda\mu)^n}{(n!)^2}\left(\frac{n^2}{lm}\right)^{n+1}e^{-n\frac{\lambda}{l}-n\frac{\mu}{m}}$$

Par ailleurs on a pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}\right) &= \int_{\mathbb{R}} l\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{n}{l}\right)^{n+1}e^{-\lambda\frac{n}{l}}\mathbb{1}_{l>0}dl\\
&= \int_{0^+}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{n}{l}\right)^n e^{-\lambda\frac{n}{l}}dl\\
&= \int_{0^+}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}u^{n-2}e^{-\lambda u}ndu\\
&= \frac{n\lambda}{(n-1)}\int_{0^+}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}\lambda^{n-2}u^{n-2}e^{-\lambda u}\ \lambda du\\
&= \frac{n\lambda}{(n-1)}\underbrace{\int_{0^+}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}v^{n-2}e^{-v}dv}_{\int_{0^+}^{+\infty}f_{\Gamma(n-2,\lambda)}(v)dv=1}\\
&= \frac{n}{n-1}\lambda
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}\\ \widehat{\mu}\end{pmatrix}\right) = \frac{n}{n-1}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

Autrement dit, $\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}\\ \widehat{\mu}\end{pmatrix}$ est biaisé à distance finie.

Enfin pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} l^2\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{n}{l}\right)^{n+1}e^{-\lambda\frac{n}{l}}\mathbb{1}_{l>0}dl\\
&= -\int_{0^+}^{+\infty}\left(\frac{n}{u}\right)^2\frac{\lambda^n}{n!}u^{n+1}e^{-\lambda u}\left(-\frac{n}{u^2}\right)du\\
&= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}\int_{0^+}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!}\lambda^{n-3}u^{n-3}e^{-\lambda u}\ \lambda du\\
&= \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}\underbrace{\int_{0^+}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!}v^{n-3}e^{-v}dv}_{\int_{0^+}^{+\infty}f_{\Gamma(n-3,\lambda)}(v)dv=1}\\
&= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\lambda^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda}\right) &= \mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}^2\right) - \mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \\
&= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\lambda^2 - \left(\frac{n}{n-1}\lambda\right)^2 \\
&= \frac{n^2(n-1)-(n-2)n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2 \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2
\end{aligned}$$

(on vérifie que l'e.m.v. est asymptotiquement efficace : $\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}\lambda^2$).

<u>*Autre méthode (plus rapide) :*</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}\right) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{s}\lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{n}{n-1}\lambda \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}\frac{s^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{n}{n-1}\lambda \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\lambda^{n-1}\frac{s^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda s}}_{f_{\Gamma(n-1,\lambda)}(s)} ds \\
&= \frac{n}{n-1}\lambda
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}^2\right) &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\lambda^{n-2}\frac{s^{n-3}}{(n-3)!}e^{-\lambda s}}_{f_{\Gamma(n-2,\lambda)}(s)} ds \\
&= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\lambda^2
\end{aligned}$$

Enfin, remarquant que toutes les $Z_1,\ldots,Z_n,C_1,\ldots,C_n$ sont indépendantes, on a $\mathbb{C}ov\left(\widehat{\lambda},\widehat{\mu}\right)=0$ de sorte que

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}\\ \widehat{\mu}\end{pmatrix}\right) = \frac{n^2}{n-1}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}}$$

☞ Q5 Posons $\widehat{\lambda}^* = \frac{n-1}{n}\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\mu}^* = \frac{n}{n-1}\widehat{\mu}$.

D'après le résultat précédent, $\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}^*\\ \widehat{\mu}^*\end{pmatrix}$ est un estimateur sans biais de $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$. Or $T(Z,C) =$

$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n C_i\right)$ est une statistique exhaustive complète (car canonique dans un mod exponentielle) ; en conséquence, d'après le théorème de Lehman-Scheffé, $\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}^*\\ \widehat{\mu}^*\end{pmatrix}$ est opti parmi les estimateurs sans biais de $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}^*\\ \widehat{\mu}^*\end{pmatrix}\right) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \mathbb{C}ov\left(\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}\\ \widehat{\mu}\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{n-2}\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or la borne FDCR du modèle est $\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}$.

En conséquence, $\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}^*\\ \widehat{\mu}^*\end{pmatrix}$ n'est **pas** un estimateur *efficace* de $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$.

On suppose dans cette seconde partie que les seules observations disponibles portent sur X $\mathrm{Min}\left(Z_i,C_i\right),\ i=1,\ldots,n.$

☞ Q1 On a pour $t\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_i>t\right) &= \mathbb{P}\left(Z_i>t\ \wedge\ C_i>t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z_i>t\right)\cdot\mathbb{P}\left(C_i>t\right) \quad \text{par indépendance} \\
&= \left(\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda u}du\right)\left(\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\mu v}dv\right) \\
&= e^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}$$

de sorte que $X_i \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda+\mu)$.

☞ Q2 Le modèle statistique s'écrit ici $\{\mathbb{R}^{+n}\ ,\ \mathcal{E}^{\otimes n}\}$.
Sa vraisemblance étant $L_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n\ ;\ \lambda,\mu) = (\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)\sum_{i=1}^n x_i}$, la seule fonct identifiable de (λ,μ) est $\lambda+\mu$.

☞ Q3 Cherchons à estimer $\gamma=\lambda+\mu$.

(i) La maximisation de $L_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n\ ;\ \gamma) = (\gamma)^n e^{-(\gamma)\sum_{i=1}^n x_i}$ conduit à l'estimateur $\widehat{\gamma_X}$ $\frac{1}{\bar{x}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \min(z_i,c_i)}$;

(ii) tandis que celle de $L_{Z_1,\ldots,Z_n,C_1,\ldots,C_n}(z_1,\ldots,z_n,c_1,\ldots,c_n\ ;\ \lambda,\mu)$ conduit à estimer λ e individuellement, ce dont on tire une estimation convergente de $\lambda+\mu$, à savoir $\widehat{\gamma_{Z,C}} = \widehat{\lambda}+\widehat{\mu}$ $\frac{n}{\sum_{i=1}^n Z_i}+\frac{n}{\sum_{i=1}^n C_i}$

Bien entendu il n'y a aucune raison pour que ces estimateurs, fondés sur des observati différentes (c'est-à-dire, en définitive, définis dans des modèles statistiques différents), soient mêmes. Comme il est montré ci-après ils ont même des variances asymptotiques différentes.

☞ Q4 On a alternativement

(i) $\frac{\partial \ln L_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\gamma}(x_1,\ldots,x_n\ ;\ \gamma) = \frac{n}{\gamma}-\sum_{i=1}^n x_i$,
puis $\frac{\partial^2 \ln L_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial\gamma^2}(x_1,\ldots,x_n\ ;\ \gamma) = -\frac{n}{\gamma^2}$,

donc

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\gamma_X}-\gamma\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(O,(\lambda+\mu)^2)$$

(ii) Soit $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*2} & \to & \mathbb{R}^{+*2} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,y) \end{pmatrix}$ qui est de classe C^∞, et de jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors d'après le théorème de Slutsky

$$\sqrt{n}\left(g\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}\\ \widehat{\mu}\end{pmatrix}-g\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \frac{\partial g}{\partial(x,y)}(\lambda,\mu)\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial(x,y)'}(\lambda,\mu)\right)$$

En particulier selon la première composante,[8]

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\gamma_{Z,C}}-\gamma\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(O,\lambda^2+\mu^2)$$

On constate que $(\lambda+\mu)^2 \geq \lambda^2+\mu^2$, avec égalité *ssi* $\lambda=0$ ou $\mu=0$ (situations dégénérées et sans intérêt). Autrement dit, asymptotiquement $\widehat{\gamma^{Z,C}}$ est préférable à $\widehat{\gamma^X}$, ce que l'on écrira sous la forme publicitaire

$$\boxed{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu} \gg \widehat{\lambda+\mu}}$$

Ce résultat est bien-sûr naturel dans la mesure où le premier estimateur est fondé sur une information plus fine que le second.

☞ Q1 Pour calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X_1+\cdots+X_n} \mid Z_1+\cdots+Z_n, C_1+\cdots+C_n\right)$, il semble naturel de déterminer tout d'abord

$$\begin{aligned} & L_{X_1+\cdots+X_n \mid Z_1+\cdots+Z_n, C_1+\cdots+C_n} \\ = & \frac{L_{X_1+\cdots+X_n, Z_1+\cdots+Z_n, C_1+\cdots+C_n}}{L_{Z_1+\cdots+Z_n, C_1+\cdots+C_n}} \end{aligned}$$

La difficulté ici est que X_i n'est **pas** indépendante de (Z_i,C_i), puisque $X_i=\min(Z_i,C_i)$, ce qui complique singulièrement le calcul.

En fait, le résultat s'exprime très simplement et peut être démontré de la façon suivante, astucieuse quoique moins naturelle.

Notons en effet $\widehat{\theta}=\mathbb{E}\left(\frac{1}{X_1+\cdots+X_n} \mid Z_1+\cdots+Z_n=z, C_1+\cdots+C_n=c\right)$; alors d'après la partie **II** $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais de $\frac{\lambda+\mu}{n-1}$. La statistique en $\widehat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ étant régulière (car le modèle est exponentiel), d'après le théorème de Lehman-Scheffé $\widehat{\theta}$ est en outre optimal.

Mais d'après la partie **I**, $\frac{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}{n}$ est un autre estimateur sans biais de $\frac{\lambda+\mu}{n-1}$, lui aussi optimal.

En conséquence, $\widehat{\theta}$ et $\widehat{\theta}-\frac{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}{n}$ sont décorréllés, ainsi que $\frac{\widehat{\lambda}}{n}$ et $(\widehat{\theta}-\frac{\widehat{\mu}}{n})-\frac{\widehat{\lambda}}{n}$, et que $\frac{\widehat{\mu}}{n}$ et $(\widehat{\theta}-\frac{\widehat{\lambda}}{n})-\frac{\widehat{\mu}}{n}$, et ce en vertu du lemme suivant :

[8] Il n'est pas nécessaire pour pratiquer la delta méthode que g soit inversible, et il aurait suffit ici de considérer $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*}2 & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{pmatrix}$.

> Si $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont deux estimateurs sans biais optimaux du même paramètre, alors $\mathbb{C}ov\left(\widehat{a},\widehat{a-b}\right)=0$

En effet, définissons pour $t\in\mathbb{R}$ $c_t=(1-t)\widehat{a}+t\widehat{b}=\widehat{a}+t\left(\widehat{a}-\widehat{b}\right)$.
Alors $\forall t\in\mathbb{R},\ \mathbb{V}(c_t)\geq\mathbb{V}\left(\widehat{b}\right)$ puisque $\widehat{b}$ est optimal ;
ceci s'écrit $\forall t\in\mathbb{R},\ \mathbb{V}(\widehat{a})+2t\mathbb{C}ov\left(\widehat{a},\widehat{a}-\widehat{b}\right)+t^2\mathbb{V}\left(\widehat{a}-\widehat{b}\right)$ qui est une inégalité polynôm
de celui-ci est négatif ou nul, ce dont on tire le résultat.

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(\widehat{\theta}\right) &= \mathbb{V}\left(\frac{\widehat{\lambda}}{n}\right)+\mathbb{V}\left(\frac{\widehat{\mu}}{n}\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\frac{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}{n}\right) \quad \text{car } \widehat{\lambda} \text{ et } \widehat{\mu} \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les deux estimateurs $\widehat{\theta}$ et $\frac{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}{n}$ qui ont même espérance, même variance sont exactement corrélés, sont égaux presque sûrement :[9]

$$\widehat{\theta}=\frac{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}{n}\text{p.s.}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \min(Z_i,C_i)} \mid \sum_{i=1}^n Z_i \ \wedge\ \sum_{i=1}^n C_i\right)=\frac{1}{\sum_{i=1}^n Z_i}+\frac{1}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad \text{p.s.}}$$

⋆
⋆ ⋆

[9] Ce résultat est généralement connu comme l'*unicité presque sûre* d'un estimateur optimal fonction d'une statisti
totale.

6 Travaux Dirigés n°6

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 – On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)k\right)\\
&= 0+\lambda\underbrace{\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)}_{\sum_{l\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X_1=l)}\\
&= \boxed{\lambda}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left({X_i}^2\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)k^2\right)\\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}k(k-1)\right)\right)+\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}k\right)\right)\\
&= \left(\underbrace{\sum_{k\geq 2}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{\sum_{l\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X_1=l)}\right)\lambda^2+\left(\underbrace{\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{\sum_{l\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X_1=l)}\right)\lambda\\
&= \lambda^2+\lambda
\end{aligned}$$

ce dont on tire

$$\boxed{\mathbb{V}(X_i)=\lambda}$$

– Soit $\phi:\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+*}\\ t & \mapsto & \mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right)\end{array}\right)$; ϕ est appelée la *fonction génératrice* de la variable aléatoire X_i.

Alors pour $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_i=k)\,e^{tk}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{tk}\\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}\\
&= e^{\lambda(e^t-1)}
\end{aligned}$$

En particulier, ϕ est de classe $C^{+\infty}$.

L'idée ici est que pour $\rho>0$, la série $\left(\begin{array}{ccc}]-\rho,+\rho[& \to & \mathbb{R}^{+*}\\ t & \mapsto & \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}\end{array}\right)$ est normalem convergente ; donc sur tout voisinage de 0 on peut intervertir $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\sum_{\mathbb{N}}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\phi^{(n)}(0) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(t\mapsto e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}\right)\right)_{(0)}\\
&= e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(t\mapsto\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}\right)_{(0)}\right)\\
&= e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\left(t\mapsto k^n\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}\right)_{(0)}\right)\\
&= e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}k^n\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}k^n\mathbb{P}(X_i=k)\\
&= \mathbb{E}\left({X_i}^n\right)
\end{aligned}$$

Ce résultat est en fait vrai plus généralement pour toute densité suffisamment régulière (telle que ϕ soit développable en séries entières et somme de sa série) : en effet on a alors

$$\phi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}t^n$$

Or par ailleurs on a toujours

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(tX_i)^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n\mathbb{E}\left({X_i}^n\right)}{n!} \quad \text{sous réserve que tous les moments existent}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{E}\left({X_i}^n\right)}{n!}t^n\end{aligned}$$

ce dont on déduit que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \phi^{(n)}(0)=\mathbb{E}\left({X_i}^n\right)}$$

– Par ailleurs, on a successivement :

$$\begin{aligned}\phi^{'}(t) &= \phi(t)\lambda e^t\\ \phi^{''}(t) &= \phi(t)\lambda e^t+\phi^{'}(t)\lambda e^t\\ &= (\lambda e^t+\left(\lambda e^t\right)^2)\phi(t)\\ \phi^{'''}(t) &= \left(\lambda e^t+2\left(\lambda e^t\right)^2\right)\phi(t)+\left(\lambda e^t+\left(\lambda e^t\right)^2\right)\lambda e^t\phi^{'}(t)\\ &= \left(\lambda e^t+3\left(\lambda e^t\right)^2+\left(\lambda e^t\right)^3\right)\phi(t)\\ \phi^{''''}(t) &= \left(\lambda e^t+6\left(\lambda e^t\right)^2+3\left(\lambda e^t\right)^3\right)\phi(t)+\left(\lambda e^t+3\left(\lambda e^t\right)^2+\left(\lambda e^t\right)^3\right)\phi^{'}(t)\\ &= \left(\lambda e^t+7\left(\lambda e^t\right)^2+6\left(\lambda e^t\right)^3+\left(\lambda e^t\right)^4\right)\phi(t)\end{aligned}$$

Plus généralement, on montre qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}[\mathbb{X}]^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ \phi^{(n)}(t)=P_n(\lambda e^t)\phi(t)$.
On a en effet $P_0=(1)$, $P_1=\mathbb{X}$ puis pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\phi^{(n+1)}(t) &= \left(P_n^{'}\left(\lambda e^t\right)\lambda e^t\right)\phi(t)+P_n\left(\lambda e^t\right)\phi^{'}(t)\\ &= \left(P_n^{'}\left(\lambda e^t\right)\lambda e^t\right)\phi(t)+P_n\left(\lambda e^t\right)\left(\lambda e^t\phi(t)\right)\\ &= \left(\mathbb{X}P_n^{'}(\mathbb{X})+\mathbb{X}P_n(\mathbb{X})\right)_{(\lambda e^t)}\phi(t)\end{aligned}$$

Par suite

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(\mathbb{X})=\mathbb{X}\left(P_n(\mathbb{X})+P_n^{'}(\mathbb{X})\right)$$

de sorte que, en notant $P_n(\mathbb{X})=\sum_{k=0}^n a_n^k\mathbb{X}^k$

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in[\![0,n]\!],\ a_{n+1}^k=ka_n^k+a_n^{k-1}\quad(\text{avec la convention } a_n^{-1}=0)$$

ce qui permet de calculer les $(a_n^k)_{n,k}$ et d'en déduire $\mathbb{E}\left({X_i}^n\right)=\phi^{(n)}(0)$. Puisque $\phi(0)=1$, on peut donc facilement calculer *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ le moment d'ordre n

$$\boxed{\mathbb{E}\left({T_i}^k\right)=P_n(\lambda)}$$

– Dans le cas présent on vérifie immédiatement que

$$\begin{cases}\mathbb{E}\left(X\right) &= \lambda\\ \mathbb{E}\left(X^2\right) &= \lambda\left(1+\lambda\right)\\ \mathbb{E}\left(X^3\right) &= \lambda\left(1+3\lambda+\lambda^2\right)\\ \mathbb{E}\left(X^4\right) &= \lambda\left(1+7\lambda+6\lambda^2+\lambda^3\right)\end{cases}$$

☞ Q2 (a) On constate que $\widehat{\lambda}_1$ et $\widehat{\lambda}_2$ ont été obtenus par la méthode des moments, qui consiste p
estimer λ à inverser l'expression du moment théorique d'une variable X en fonction de
et de l'appliquer au moment empirique.
En l'occurence $\widehat{\lambda}^1(x)=\bar{x}$ est le premier moment empirique, qui converge p.s. vers le prem
moment théorique $\mathbb{E}\left(X_1\right)=\lambda$. Donc $\widehat{\lambda}^1$ est l'estimateur fondé sur le premier moment de
De même $\widehat{\lambda}^2(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ est le moment centré d'ordre 2 empirique, qui conve
vers le moment centré théorique d'ordre 2 $\mathbb{V}\left(X_1\right)=\lambda$. Donc $\widehat{\lambda}^2$ est l'estimateur fondé
le second moment centré de X.
Les questions suivantes s'assurent que $\widehat{\lambda}_1$ et $\widehat{\lambda}_2$ sont bien des estimateurs de λ et étudi
leurs propriétés à distance (in-)finie.

(b) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}_1(X)\right) &= \mathbb{E}\left(\bar{X}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left(X_i\right)\\ &= \boxed{\lambda}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_2}(X)\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left({X_i}^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left({X_i}^2\right)-2\mathbb{E}\left(\bar{X}^2\right)+\mathbb{E}\left(\bar{X}^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left({X_1}^2\right)-\mathbb{E}\left(\bar{X}^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left({X_1}^2\right)-\left(\mathbb{V}\left(\bar{X}\right)+\mathbb{E}\left(\bar{X}\right)^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left({X_1}^2\right)-\left(\frac{1}{n}\mathbb{V}\left(X_1\right)+\mathbb{E}\left(X_1\right)^2\right)\\
&= \left(\lambda^2+\lambda\right)-\left(\frac{1}{n}\lambda+\lambda^2\right)\\
&= \boxed{\tfrac{n-1}{n}\lambda}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{\lambda_1}$ n'est pas biaisé mais $\widehat{\lambda_2}$ l'est, et on peut proposer $\widehat{\lambda_3}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$

(c) *Première méthode :* Cherchons la loi de $\sum_{i=1}^{n}X_i$.
Une façon naturelle serait de montrer qu'une somme de variables indépendantes qui suivent chacune un loi de Poisson de paramètre λ_i suit elle-même un loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$; ceci se montre par récurrence soit en calculant explicitement

$$\mathbb{P}\left(X_1+\cdots+X_n=k\right)=\sum_{s=0}^{k}\mathbb{P}\left(X_1+\cdots+X_{n-1}=s\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_n=k-s\right)$$

soit par convolution.
Une autre façon est de calculer la fonction génératrice de la variable $\sum_{i=1}^{n}X_i$, et de reconnaître une fonction génératrice connue : la bijectivité du passage entre une densité et une fonction génératrice permet alors de conclure que $\sum_{i=1}^{n}X_i$ suit bien la loi dont on a reconnu la fonction génératrice.
En l'occurence

$$\begin{aligned}
\phi_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}e^{tX_i}\right)\\
&= \Pi_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) \quad \text{par indépendance des } \left(e^{tX_i}\right)_i\\
&= \Pi_{i=1}^{n}\phi_{X_i}(t)\\
&= e^{n\lambda\left(e^t-1\right)}\\
&= \phi_{\mathcal{P}(n\lambda)}(t)
\end{aligned}$$

ce dont on conclut que $\sum_{i=1}^{n}X_i \rightsquigarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.
En définitive la loi de $\widehat{\lambda_1}$ est caractérisée par

$$\forall k\in\mathbb{Q},\ \mathbb{P}\left(\widehat{\lambda_1}=k\right)=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=nk\right)=e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^{nk}}{(nk)!}\mathbb{1}_{nk\in\mathbb{N}}$$

(on notera que la statistique $\widehat{\lambda_1}$ n'est **pas** entière a priori, ce qui justifie l'indicatrice).

Autre Méthode : On peut aussi directement calculer pour $t\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{t}{n}\right) &= \mathbb{P}\left(X_1+\cdots+X_n=t\right)\\
&= \sum_{x_1+\cdots+x_n=t}\mathbb{P}\left(X_1=x_1\wedge\cdots\wedge X_n=x_n\right)\\
&= \sum_{x_1+\cdots+x_n=t}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i=x_i\right) \quad \text{car les } (X_i)_i \text{ sont indépendan}\\
&= \sum_{x_1+\cdots+x_n=t}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\\
&= \sum_{x_1+\cdots+x_n=t}\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{x_1+\cdots+x_n}}{x_1!\cdots x_n!}\\
&= \frac{e^{-n\lambda}\lambda^t}{t!}\sum_{x_1+\cdots+x_n=t}\frac{t!}{x_1!\cdots x_n!}\\
&= \frac{e^{-n\lambda}\lambda^t}{t!}\left(1+\cdots+1\right)^t\\
&= \boxed{\tfrac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t}{t!}}
\end{aligned}$$

(d) Pour déterminer la loi limite jointe de $\begin{pmatrix}\widehat{\lambda_1}\\ \widehat{\lambda_2}\end{pmatrix}$, on serait tenté de poser Z_i
$\begin{pmatrix}X_i\\ \left(X_i-\bar{X}\right)^2\end{pmatrix}$ et d'appliquer le Théorème Central Limite à Z_i ; la difficulté est
les Z_i ne sont plus i.i.d dans ce cas, du fait de $\bar{X}$. C'est pourquoi on pose $Y_i=\Big($ X_i ${X_i}^2$
et on constate que

$$\sqrt{n}\left(Y_i-\mathbb{E}\left(Y_i\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\mathbb{V}\left(Y_i\right)\right)$$

ce qui s'écrit

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\bar{X}\\ \bar{X^2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\left(\begin{matrix}\mathbb{V}\left(X_i\right) & \mathbb{C}ov\left(X_i,{X_i}^2\right)\\ \mathbb{C}ov\left(X_i,{X_i}^2\right) & \mathbb{V}\left({X_i}^2\right)\end{matrix}\right.$$

Par ailleurs on calcule successivement

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}\left(X_i\right) & = & \lambda \\
\mathbb{V}\left({X_i}^2\right) & = & \mathbb{E}\left({X_i}^4\right) - \mathbb{E}\left({X_i}^2\right) \\
& = & \lambda(1+6\lambda+4\lambda^2) \\
\mathbb{C}ov\left(X_i, {X_i}^2\right) & = & \mathbb{E}\left({X_i}^3\right) - \mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left({X_i}^2\right) \\
& = & \lambda(1+2\lambda)
\end{array}$$

Enfin, posons $g : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u \\ v-u^2 \end{pmatrix} \end{array}\right)$, de sorte que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i = g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i\right)$, car $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {X_i}^2 - \left(\bar{X}\right)^2$.
Alors g est de classe C^∞, et de plus $Jac\; g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2u & 1 \end{pmatrix}$, donc d'après le théorème de Slutsky

$$\sqrt{n}\left(g\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {X_i}^2 \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda(1+\lambda) \end{pmatrix}\right)$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\lambda & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda & \lambda(1+2\lambda) \\ \lambda(1+2\lambda) & \lambda(1+\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

soit

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda_1} \\ \widehat{\lambda_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda(1+2\lambda) \end{pmatrix}\right)$$

Enfin, remarquant que

$$\begin{pmatrix} \widehat{\lambda_1} \\ \widehat{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{\lambda_1} \\ \widehat{\lambda_2} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

il vient

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda_1} \\ \widehat{\lambda_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{n}{n-1}\lambda \end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda(1+2\lambda) \end{pmatrix}\right)$$

et comme par ailleurs $\frac{n}{n-1}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \lambda$ on conclut que

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda_1} \\ \widehat{\lambda_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda(1+2\lambda) \end{pmatrix}\right)$$

(e) On a $\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_\infty}(X)\right) = \alpha\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_1}(X)\right) + \beta\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_3}(X)\right) = (\alpha+\beta)\lambda$,
donc $\widehat{\lambda_\infty}$ est sans biais *ssi* $\alpha+\beta=1$.

Par ailleurs, $\widehat{\lambda_\infty}$ est le meilleur estimateur sans biais de λ s'il est de variance minimale ;
pour $n \to +\infty$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_\infty}(X)\right) & = & \alpha^2\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_1}(X)\right) + 2\alpha(1-\alpha)\mathbb{C}ov\left(\widehat{\lambda_1}(X), \widehat{\lambda_3}(X)\right) + (1-\alpha)^2\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_3}(X\right. \\
& = & \left\{\begin{array}{r} \left(\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_1}(X)\right) + \mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_3}(X)\right) - 2\mathbb{C}ov\left(\widehat{\lambda_1}(X), \widehat{\lambda_3}(X)\right)\right)\alpha^2 \\ +2\left(\mathbb{C}ov\left(\widehat{\lambda_1}(X), \widehat{\lambda_3}(X)\right) - \mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_3}\right)(X)\right)\alpha \\ +\left(\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_3}\right)(X)\right) \end{array}\right.
\end{array}$$

Ce polynôme de degré 2 en α a un cœfficient $\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_1}\right)(X) + \mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_3}\right)(X) - 2\mathbb{C}ov\left(\widehat{\lambda_1}(X), \widehat{\lambda_3}\right)$
$\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_1}(X) - \widehat{\lambda_3}(X)\right) \geq 0$ en α^2, donc est maximal aux bornes et minimal au milieu
racines, soit en

$$\begin{array}{rcl}
\alpha^* & = & -\dfrac{2\left(\mathbb{C}ov\left(\widehat{\lambda_1}(X), \widehat{\lambda_3}(X)\right) - \mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_3}(X)\right)\right)}{2\times\left(\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_1}(X)\right) + \mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_3}(X)\right) - 2\mathbb{C}ov\left(\widehat{\lambda_1}(X), \widehat{\lambda_3}(X)\right)\right)} \\
& = & -\dfrac{2n\left(\lambda - \lambda(1+2\lambda)\right)}{2n\left(\lambda + \lambda(1+2\lambda) - 2\lambda\right)} \\
& = & -\dfrac{2\left(\lambda - \lambda - 2\lambda^2\right)}{2\left(\lambda + \lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda\right)} \\
& = & 1
\end{array}$$

Ainsi, $\widehat{\lambda_\infty}^* = \widehat{\lambda_1}$, de sorte que $\widehat{\lambda_1} = (x \mapsto \bar{x}) = \widehat{\lambda_{emv}}$ est le meilleur estimateur asympto
quement sans biais de λ.

☞ Q3 (a) __*Rappel :*__ l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur $\widehat{\theta}$ de θ est définie comme $\mathbb{E}\left(\left(\widehat{\theta} - \right.\right.$

– On a $\widehat{\lambda_1} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, de sorte que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_1} - \lambda\right)^2\right) & = & \mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_1}^2\right) - \lambda^2 \\
& = & \dfrac{1}{4}\left(\mathbb{E}\left({X_1}^2\right) + 2\mathbb{C}ov\left(X_1, X_2\right) + \mathbb{E}\left({X_2}^2\right)\right) - \lambda^2 \\
& = & \dfrac{1}{4}\left(2\lambda(1+\lambda) + 2\lambda^2\right) - \lambda^2 \\
& = & \dfrac{\lambda}{2}
\end{array}$$

– De façon similaire

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda_2} &= \frac{1}{2}\left(\left(X_1 - \frac{X_1+X_2}{2}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{X_1+X_2}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X_1{}^2 - X_1(X_1+X_2) + \frac{(X_1+X_2)^2}{4} + X_2{}^2 - X_2(X_1+X_2) + \frac{(X_1+X_2)^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(X_1{}^2 + X_2{}^2 - 2X_1X_2\right)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_2} - \lambda\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_2}^2\right) - 2\lambda\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_2}\right) + \lambda^2$$

Or $\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_2}\right) = \frac{\lambda}{2}$, et en outre

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_2}^2\right) &= \frac{1}{16}\mathbb{E}\left(\left(X_1{}^2 + X_2{}^2 - 2X_1X_2\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\mathbb{E}\left((X_1{}^2 + X_2{}^2)^2 - X_1X_2(X_1{}^2 + X_2{}^2) + 4X_1{}^2X_2{}^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\mathbb{E}\left(X_1{}^4 + 2X_1{}^2X_2{}^2 + X_2{}^4 + -X_1{}^3X_2 - X_1X_2{}^3 + 4X_1{}^2X_2{}^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\mathbb{E}\left(X_1{}^4\right) + 3\mathbb{E}\left(X_1{}^2\right)\mathbb{E}\left(X_2{}^2\right) - 4\mathbb{E}\left(X_1{}^3\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)\right) \quad \text{par indépendance} \\
&= \frac{1}{8}\left(\lambda + 6\lambda^2\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_2} - \lambda\right)^2\right) &= \frac{1}{8}\left(\lambda + 6\lambda^2\right) - 2\lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \lambda^2 \\
&= \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{8}\lambda
\end{aligned}$$

– Enfin, $\widehat{\lambda_3} = 2\widehat{\lambda_2}$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_3} - \lambda\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_3}^2\right) - \lambda^2 \\
&= 4\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_2}^2\right) - \lambda^2 \\
&= 2\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda
\end{aligned}$$

(b) Au sens de l'erreur quadratique moyenne, $\widehat{\lambda_1}$ est toujours préférable à $\widehat{\lambda_3}$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda_2} \text{ est préférable à } \widehat{\lambda_3} &\Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_2} - \lambda\right)^2\right) < \mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_3} - \lambda\right)^2\right) \\
&\Leftrightarrow \left(2\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda\right) - \left(\frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{8}\lambda\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \left(2 - \frac{3}{4}\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\lambda > 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda > -\frac{3}{8} \quad \text{cd qui est toujours vrai car } \lambda > 0
\end{aligned}$$

et de façon analogue

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda_2} \text{ est préférable à } \widehat{\lambda_1} &\Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_2} - \lambda\right)^2\right) < \mathbb{E}\left(\left(\widehat{\lambda_1} - \lambda\right)^2\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{8}\lambda\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) On a $L(k,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, donc $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}(k,\lambda) = -1 + \frac{k}{\lambda}$ et par suite $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda}(k,\lambda) = -\frac{k}{\lambda^2}$. donc

$$\begin{aligned}
I_1(\lambda) &= -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda}(k,\lambda)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{\lambda^2} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

de sorte que la borne FDCR est $\frac{\lambda}{2}$. En particulier, $\widehat{\lambda_3}$ est efficace *ssi* $2\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda =$
c'est-à-dire jamais puisque $\lambda > 0$.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Connaissant les lois de $T_i|\Lambda_i$ et de Λ_i, cherchons celle de T_i : on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f_{T_i}(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_{T_i|\Lambda_i=\lambda}(t) f_{\Lambda_i}(\lambda) d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t\geq 0}\right) \left(\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda} \mathbb{1}_{\lambda \geq 0}\right) d\lambda \\
&= \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \left(\int_0^{+\infty} \lambda^r e^{-(\alpha+t)\lambda} d\lambda\right) \mathbb{1}_{t\geq 0}
\end{aligned}
$$

Or par définition de la fonction Γ

$$\int_0^{+\infty} \lambda^r (\alpha+t)^{r+1} e^{-(\alpha+t)\lambda} d\lambda = \Gamma(r+1)$$

donc

$$f_{T_i}(t) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \frac{\Gamma(r+1)}{(\alpha+t)^{r+1}} \mathbb{1}_{t\geq 0}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, donc finalement

$$f_{T_i}(t) = \frac{r\alpha^r}{(\alpha+t)^{r+1}} \mathbb{1}_{t \geq 0}$$

Les $(T_i)_i$ étant indépendants il vient en conséquence

$$\boxed{L_{T_1,\ldots,T_n}(t_1,\ldots,t_n;\alpha,r) = r^n \alpha^{nr} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n (\alpha+t_i)\right)^{r+1}} \mathbb{1}_{\min_i t_i \geq 0}}$$

☞ Q2 Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(T_i^k\right) \text{ existe } &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} t^k \frac{r\alpha^r}{(\alpha+t)^{r+1}} dt \quad \text{converge} \\
&\Leftrightarrow r+1-k > 1 \\
&\Leftrightarrow k < r
\end{aligned}
$$

Soit donc $k \in [\![1, r-1]\!]$, et notons $M_k^r = \mathbb{E}\left(T_i^k\right) < +\infty$. Alors

$$
\begin{aligned}
M_k^r &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{r\alpha^r}{(\alpha+t)^{r+1}}\right)\left(t^k\right) dt \\
& \quad \text{par parties : } u = -\frac{\alpha^r}{(\alpha+t)^r} \text{ et } v = t^k \\
&= \left[\left(-\frac{\alpha^r}{(\alpha+t)^r} t^k\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{\alpha^r}{(\alpha+t)^r} k t^{k-1} dt \\
&= +\frac{k\alpha}{r-1} \int_0^{+\infty} \frac{(r-1)\alpha^{r-1}}{(\alpha+t)^{(r-1)+1}} t^{k-1} dt \\
&= \frac{k\alpha}{r-1} M_{k-1}^{r-1}
\end{aligned}
$$

Donc par une récurrence immédiate pour $r \geq 2$ et $k < r$

$$
\begin{aligned}
M_k^r &= \alpha^k \frac{k!}{\Pi_{i=1}^k (r-i)} M_0^{r-k} \\
&= \alpha^k \frac{k!}{\frac{(r-1)!}{(r-k-1)!}} \quad \text{car } M_0^{r-k} = 1
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire (en notant $\mathcal{C}_n^p$ le cœfficient binômial $\frac{n!}{p!(n-p)!}$)

$$\boxed{\mathbb{E}\left(T_i^k\right) = \frac{\alpha^k}{\mathcal{C}_{r-1}^k}}$$

On notera en particulier que lorsque $r > 2$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_i) &= \frac{\alpha}{r-1} \\
\mathbb{E}\left(T_i^2\right) &= \frac{2\alpha^2}{(r-1)(r-2)} \\
\mathbb{V}(T_i) &= \frac{2\alpha^2}{(r-1)(r-2)} - \left(\frac{\alpha}{r-1}\right)^2 \\
&= \frac{r\alpha^2}{(r-1)^2(r-2)}
\end{aligned}
$$

☞ Q3 – La vraisemblance s'écrit pour $t_1, \ldots, t_n > 0$

$$\ln L_{T_1,\ldots,T_n}(t_1,\ldots,t_n;\alpha,r) = n\ln r + nr\ln\alpha - (r+1)\sum_{i=1}^n \ln(\alpha+t_i)$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial r}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r) &= \frac{n}{r} + n\ln\alpha - \sum_{i=1}^{n}\ln(\alpha+t_i)\\
\frac{\partial \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial \alpha}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r) &= \frac{nr}{\alpha} - (r+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha+t_i}
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial r^2}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r) &= -\frac{n}{r^2}\\
\frac{\partial^2 \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial r\partial \alpha}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r) &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha+t_i}\\
\frac{\partial^2 \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial \alpha^2}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r) &= -\frac{nr}{\alpha^2} + (r+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\alpha+t_i)^2}
\end{aligned}
$$

Pour calculer la matrice d'information de Fisher il reste à calculer

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{(\alpha+t_i)^p}\right) &= \int_0^{+\infty}\frac{r\alpha^r}{(\alpha+t_i)^{r+p-1}}dt\\
&= r\alpha^r\left[-\frac{1}{(r+p)}(\alpha+t_i)^{-(r+p-1)-1}\right]_0^{+\infty}\\
&= \frac{r}{(r+p)\alpha^p}
\end{aligned}
$$

En conséquence on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial r^2}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r)\right) &= -\frac{n}{r^2}\\
\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial r\partial\alpha}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r)\right) &= \frac{n}{\alpha} - \frac{nr}{(r+1)\alpha}\\
&= \frac{n}{\alpha(r+1)}\\
\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L_{T_1,\dots,T_n}}{\partial \alpha^2}(t_1,\dots,t_n;\alpha,r)\right) &= -\frac{nr}{\alpha^2} + n(r+1)\frac{r}{(r+2)\alpha^2}\\
&= -\frac{nr}{(r+2)\alpha^2}
\end{aligned}
$$

et finalement

$$
\boxed{I_1(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & -\frac{1}{\alpha(r+1)} \\ -\frac{1}{\alpha(r+1)} & \frac{r}{(r+2)\alpha^2}\end{pmatrix}}
$$

– Lorsque α est connu, le modèle est paramétré par r uniquement et la vraisemblance s'é pour $t_1,\dots,t_n > 0$

$$
\ln L_{T_1,\dots,T_n}(t_1,\dots,t_n;r) = n\ln r + nr\ln\alpha - (r+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(\alpha+t_i)
$$

et donc l'estimateur du maximume de vraisemblance $\widehat{r}$ de r vérifie

$$
\frac{n}{\widehat{r}} + n\ln\alpha - \sum_{i=1}^{n}\ln(\alpha+t_i) = 0
$$

d'où on tire

$$
\widehat{r} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\alpha+t_i) - \ln\alpha}
$$

(la réciproque étant immédiate par concavité).

– Mais dans le cas où le modèle est paramétré (α,r) l'estimateur du maximum de vraisembla $(\widehat{\alpha},\widehat{r})$ du paramètre vérifie

$$
\begin{cases}
\widehat{r} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\widehat{\alpha}+t_i) - n\ln\widehat{\alpha}}\\
\widehat{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\widehat{\alpha}+t_i}}{\frac{n}{\widehat{\alpha}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\widehat{\alpha}+t_i}}
\end{cases}
$$

dont la résolution semble hors de portée (*i.e.* $\widehat{\alpha}$ n'admet pas d'expression analytique, s dans le cas dégénéré où $t = (0)$).

☞ Q4 Constatant que $\bar{t} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}(T_i) = \frac{\alpha}{r-1}$, posons $\widehat{r} = 1 + \frac{\alpha}{\bar{t}}$; alors $\widehat{r}$ est un estimateur converg (presque sûr) de r puisque $\left(u \mapsto \frac{1}{u}\right)$ est continue.

Cependant, à distance finie on observe que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\widehat{r}) &= \mathbb{E}\left(1 + \frac{\alpha}{\bar{T}}\right)\\
&> 1 + \frac{\alpha}{\mathbb{E}(\bar{T})} \quad \text{d'après Jensen}\\
&= r
\end{aligned}
$$

de sorte que $\widehat{r}$ est biaisé et sur-estime systématiquement r (et n'est a fortiori pas efficac distance finie).

Enfin, appliquant le Théorème Central Limite à $\bar{T}$ il vient

$$
\sqrt{n}\left(\bar{T} - \mathbb{E}\left(\bar{T}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{V}(T_1)\right)
$$

car $T_1,\dots,T_n$ sont indépendants.

Soit alors $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ s & \mapsto & 1 + \frac{\alpha}{s}\end{pmatrix}$; g est de classe C^∞ et donc d'après Slutsky

$$
\sqrt{n}\left(g(\bar{T}) - g\left(\mathbb{E}\left(\bar{T}\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, g'\left(\frac{\alpha}{r-1}\right)^2\left(\frac{r\alpha^2}{(r-1)^2(r-2)}\right)\right)
$$

soit

$$\sqrt{n}\left(\widehat{r}-r\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{r(r-1)^2}{r-2}\right)$$

Constatant finalement que $\frac{r(r-1)^2}{r-2} > r^2$ pour $r > 2$, on conclut que $\widehat{r}$ n'est **pas** asymptotiquement efficace.

☞ Q5 (a) Observant la réalisation empirique $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {t_i}^2 \end{pmatrix}$ des moments théoriques $\begin{pmatrix} \mathbb{E}\left(T_i\right) \\ \mathbb{E}\left({T_i}^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{r-1} \\ \frac{2\alpha^2}{(r-1)(r-2)} \end{pmatrix}$, on détermine $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{r})$ de façon à ce que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {t_i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\widetilde{\alpha}}{\widetilde{r}-1} \\ \frac{2\widetilde{\alpha}^2}{(\widetilde{r}-1)(\widetilde{r}-2)} \end{pmatrix}$$

En l'occurence on pose

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} \widetilde{\alpha} & = & \frac{\bar{t}\ \bar{t^2}}{\bar{t^2}-2(\bar{t})^2} \\ \widetilde{r} & = & \frac{2\left(\bar{t^2}-(\bar{t})^2\right)}{\bar{t^2}-2(\bar{t})^2} \end{array} \right.} \quad \text{en notant} \left\{ \begin{array}{lcl} \bar{t} & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i \\ \bar{t^2} & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {t_i}^2 \neq (\bar{t})^2 \end{array} \right.$$

ce qui assure que $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{r})$ est un estimateur convergent (presque sûr) de (α, r).

(b) On a successivement

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}\left(T_i\right) & = & \frac{r\alpha^2}{(r-1)^2(r-2)} \\ \mathbb{V}\left({T_i}^2\right) & = & \mathbb{E}\left({T_i}^4\right) - \left(\mathbb{E}\left({T_i}^2\right)\right)^2 \\ & = & \frac{24\alpha^4}{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)} - \frac{4\alpha^4}{(r-1)^2(r-2)^2} \\ & = & \frac{4r\alpha^4(5r-11)}{(r-1)^2(r-2)^2(r-3)(r-4)} \\ \mathbb{C}ov\left(T_i, {T_i}^2\right) & = & \mathbb{E}\left({T_i}^3\right) - \mathbb{E}\left(T_i\right)\mathbb{E}\left({T_i}^2\right) \\ & = & \frac{6\alpha^3}{(r-1)(r-2)(r-3)} - \frac{2\alpha^3}{(r-1)^2(r-2)} \\ & = & \frac{4r\alpha^3}{(r-1)^2(r-2)(r-3)} \end{array}$$

de sorte que d'après le Théorème Central Limite

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \bar{T}-\mathbb{E}\left(T_i\right) \\ \bar{T^2}-\mathbb{E}\left(T^2\right) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{r\alpha^2}{(r-1)^2(r-2)} & \frac{4r\alpha^3}{(r-1)^2(r-2)(r-3)} \\ \frac{4r\alpha^3}{(r-1)^2(r-2)(r-3)} & \frac{4r\alpha^4(5r-11)}{(r-1)^2(r-2)^2(r-3)(r-4)} \end{pmatrix}\right)$$

Posons donc $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*2} & \to & \mathbb{R}^{+*2} \\ (m_1, m_2) & \mapsto & \left(\frac{m_1 m_2}{m_2-2{m_1}^2}, \frac{2(m_2-m_1)}{m_2-2{m_1}^2}\right) \end{pmatrix}$;
g est de classe C^∞ et de Jacobienne

$$Jac\ g(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} \frac{m_2(m_2+2{m_1}^2)}{(m_2-2{m_1}^2)^2} & \frac{4m_1m_2}{(m_2-2{m_1}^2)^2} \\ \frac{-2{m_1}^3}{(m_2-2{m_1}^2)^2} & \frac{-2{m_1}^2}{(m_2-2{m_1}^2)^2} \end{pmatrix}$$

En définitive on a[10]

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \\ \widetilde{r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \frac{m_2(m_2+2{m_1}^2)}{(m_2-2{m_1}^2)^2} & \frac{-2{m_1}^3}{(m_2-2{m_1}^2)^2} \\ \frac{4m_1m_2}{(m_2-2{m_1}^2)^2} & \frac{-2{m_1}^2}{(m_2-2{m_1}^2)^2} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \frac{r\alpha^2}{(r-1)^2(r-2)} & \frac{4r\alpha^3}{(r-1)^2(r-2)(r-3)} \\ \frac{4r\alpha^3}{(r-1)^2(r-2)(r-3)} & \frac{4r\alpha^4(5r-11)}{(r-1)^2(r-2)^2(r-3)(r-4)} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \frac{m_2(m_2+2{m_1}^2)}{(m_2-2{m_1}^2)^2} & \frac{4m_1m_2}{(m_2-2{m_1}^2)^2} \\ \frac{-2{m_1}^3}{(m_2-2{m_1}^2)^2} & \frac{-2{m_1}^2}{(m_2-2{m_1}^2)^2} \end{pmatrix} \end{array}\right]\right)$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 *Rappel :* Etant donné un modèle statistique paramétré par θ, et une hypotèse H_0 sur construire un *test* de niveau $\alpha \in [0,1[$, c'est déterminer une statistique dont la loi $\mathcal{L}_0$, si H_0 vraie, est :
- complètement déterminée
- "sympathique" (*i.e.*, bien connue et tabulée)

Effectuer le test revient alors à comparer à $1-\alpha$ la vraisemblance de la réalisation de statistique, au moyen de la table de la loi $\mathcal{L}_0$.

On appelle alors *erreur de première espèce* α du test considéré la probabilité de rejeter alors qu'elle est vraie, et *erreur de seconde espèce* β la probabilité d'accepter H_0 alors qu' est fausse. Si R désigne la zone de rejet (ensemble des observations conduisant à $\neg H_0$), a $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(W)$ et $\beta = 1 - \mathbb{P}_{\neg H_0}(W)$ (qui est donc difficilement calculable). Enfin, on déf habituellement $\rho = 1-\beta$ la *puissance* du test.

On cherche ici à tester l'hypothèse H_0 : " $\lambda = \lambda_0$" contre $H_a = \neg H_0$.
- Test de *Wald :*

  Constatant que si $\widehat{\lambda}$ est un estimateur asymptotiquement efficace de λ, alors

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}-\lambda_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, I_1(\lambda_0)^{-1}\right)$$

[10] Nous ne chercherons pas à simplifier davantage cette expression malgré l'intérêt manifeste que cela présenterait

si H_0 est vraie, et donc

$$n\left(\widehat{\lambda}-\lambda_0\right)' I_1(\lambda_0)\left(\widehat{\lambda}-\lambda_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_k$$

où k est le nombre de contraintes (supposées linéaires) imposées par l'hypothèse H_0 ; dans le cas présent, on a $k=1$. En se fondant sur l'approximation convergente $I_1\left(\widehat{\lambda}\right)$ de $I_1(\lambda_0)$ on pose donc

$$\xi_n^W = n\left(\widehat{\lambda}-\lambda_0\right)' I_1\left(\widehat{\lambda}\right)\left(\widehat{\lambda}-\lambda_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_k$$

– Test du *score* :
La normalité asymtpotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance permet d'en déduire celle du score grâce au théorème de Slutsky :

$$\sqrt{n}\left(S(\lambda)-S(\lambda_0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda_0)^2 I_1(\lambda_0)^{-1}\right)$$

où $g : x \mapsto \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x)$ D'après le théorème central limite

$$\frac{1}{n} g\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left(g(\lambda_0)^2\right) = -I_1(\lambda_0)$$

de sorte que finalement

$$\sqrt{n}\left(S(\lambda)-S(\lambda_0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, (nI_1(\lambda_0))^2 I_1(\lambda_0)^{-1}\right)$$

Donc

$$\frac{\sqrt{n}}{n}\left(S(\lambda)-S(\lambda_0)\right) I_1(\widehat{\lambda}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

et par conséquent

$$\frac{1}{n} S(\lambda_0)' I_1(\lambda_0)^{-1} S(\lambda_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_k$$

On définit donc

$$\xi_n^S = \frac{1}{n} S(\lambda_0)' I_1(\lambda_0)^{-1} S\left(\widehat{\lambda}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_k$$

– Test du *rapport des maxima de vraisemblance* :
Sous réserve que la vraisemblance soit suffisamment régulière et que le modèle statistique soit homogène et dominé on a en développant à l'ordre deux

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\lambda) &= \ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\lambda_0) + \frac{\partial \ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial \lambda}(x_1,\ldots,x_n;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial \lambda^2}(x_1,\ldots,x_n;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2 + o_{\mathbb{P}_{\lambda_0}}\left((\lambda-\lambda_0)^2\right)\end{aligned}$$

et donc par la loi forte des grands nombres

$$\ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\lambda) - \ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\lambda_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left(S(\lambda_0)\right) - \frac{1}{2} I_n(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2 + o(\lambda-\lambda_0)^2$$

et comme

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}-\lambda_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, I_1(\lambda_0)^{-1}\right)$$

il s'ensuite que

$$2\left(\ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\lambda_0) - \ln \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\lambda)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_k$$

On pose donc

$$\xi_n^{mv} = 2\left(\ln L^{\neg H_0}\left(\widehat{\lambda}\right) - \ln L^{H_0}(\lambda_0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_k$$

Pour chacun de ces tests $\xi_n^{\cdots}$, on accepte finalement l'hypothèse H_0 au niveau α *ssi*

$$\xi_n^{\cdots}(y_1,\ldots,y_n) < q_{1-\alpha}^{\chi^2_k}$$

où $q_{1-\alpha}^{\chi^2_k}$ désigne le fractile de niveau $1-\alpha$ de la loi du χ^2 à k degrés de liberté. Notons que ces trois tests sont asymptotiquement équivalents.

☞ Q2 On a pour $(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{N}^n$

$$L(y_1,\ldots,y_n;\lambda) = \Pi_{i=1}^n \left(e^{-\lambda}\frac{\lambda_i^y}{y_i!}\right)$$

dont on tire que $\widehat{\lambda} = \bar{y}$; il reste à calculer explicitement ξ^W, ξ^S et ξ^{mv}.

– Test de *Wald* :
On sait d'après le Théorème Central Limite que

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}-\lambda\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\lambda)$$

car $I_(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, donc sous forme centrée réduite il vient

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

et donc

$$n\frac{\left(\widehat{\lambda}-\lambda\right)^2}{\lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_1$$

et comme $\widehat{\lambda} = \bar{y} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \lambda$ on pose

$$\xi^W(y_1,\ldots,y_n) = n\frac{(\bar{y}-\lambda_0)^2}{\bar{y}}$$

De cette façon, si H_0 est vraie alors $\xi^W(y_1,\ldots,y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \chi^2_1$, tandis que sinon $\xi^W(y_1,\ldots,y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} (+\infty)$.

– <u>Test du *score* :</u>
On a
$$\ln L(y_1,\ldots,y_n;\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{n}\ln(y_i!)$$
d'où on tire
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}(y_1,\ldots,y_n;\lambda_0) = -n + \frac{n\bar{y}}{\lambda_0}$$
Le théorème central limite appliqué au vecteur score s'écrit
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}(y_1,\ldots,y_n;\lambda_0)\right)\sqrt{\lambda_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda_0}\right)$$
si H_0 est vraie, auquel cas
$$\xi_n^S = n\frac{(\bar{y}-\lambda_0)^2}{\lambda_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

– <u>Test du *rapport des maxima de vraisemblance* :</u>
On a
$$\ln L^{\neg H_0}(y_1,\ldots,y_n;\widehat{\lambda}) = -n\bar{y} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(\bar{y}) - \sum_{i=1}^{n}\ln(y_i!)$$
et
$$\ln L^{H_0}(y_1,\ldots,y_n;\lambda_0) = -n\lambda_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(\lambda_0) - \sum_{i=1}^{n}\ln(y_i!)$$
et donc finalement
$$\xi^{mv}(y_1,\ldots,y_n) = 2n\left(\bar{y}\left(\ln\bar{y}-1\right)+\lambda_0-\ln\lambda_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$
si H_0 est vraie.

On en tire alors $W_\alpha^{test} = \{(y_1,\ldots,y_T)\ /\ \xi_T^{test}(y_1,\ldots,y_T) > q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}\}$ pour $test \in \{W,S,mv\}$.

☞ Q3 Application numérique : $\lambda_0 = 1$, $q_{1-5\%}^{\chi_1^2} = 3,84$

Test	$n=100$ $\bar{y}=1,2$	$n=200$ $\bar{y}=1,1$
Wald	$\xi_{100}^W = 3,33$ H_0 acceptée	$\xi_{200}^W = 1,82$ H_0 acceptée
Score	$\xi_{100}^S = 4$ H_0 **rejetée**	$\xi_{200}^S = 2$ H_0 acceptée
M.V.	$\xi_{100}^{mv} = 3,76$ H_0 acceptée	$\xi_{200}^{mv} = 1,94$ H_0 acceptée

Il apparaît que pour $n = 200$, H_0 est unanimement acceptée au seuil de 5% ; la situation est moins nette lorsque $n = 100$:
– à la fois parce que le test du score conduit à rejeter H_0 au contraire des deux autres tests ;
– et parce que même pour ceux-là la statistique est proche du fractile $q_{1-5\%}^{\chi_1^2}$

Sachant que ces tests devraient être asymptotiquement équivalents (donc en particulier condu
à la même décision, pour une observation donnée), on peut en conclure hardiment que $n =$ 1
n'est **pas** “asymptotiquement grand”.

Quant à décider de l'acceptation, une première solution serait d'affiner ou d'élargir le se
d'acceptation, par exemple en choisissant $\alpha = 10\%$ (ce qui conduirait à accepter unanimeme
H_0) ou à l'inverse $\alpha = 1\%$ (ce qui conduirait à rejeter unanimement H_0) ; mais modifie
posteriori le problème posé de façon à savoir le résoudre est une démarche un peu discutable

On remarquera plutôt que l'issue d'un test pour $n_2 > n_1$ est toujours préférable à celle pour
puisque ce test n'est justifié qu'asymptotiquement ; comme en outre ces tests sont asymptotiq
ment équivalents, à partir d'un certain rang il seront tous unanimes, et c'est cettte décision q
faut retenir. Dans le cas présent, on retiendra donc l'issue (unanime) des tests pour $n = 200$
savoir l'**acceptation** de H_0 au seuil 5%.

⋆

⋆ ⋆

7 Travaux Dirigés n°7

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 (a) *Rappel :*

Essentiellement, si $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}$ loi discrète sur $[\![1,m]\!]$, et si $p_k = \mathbb{P}(X_i = k)$ et $N_k = |\{i/X_i = k\}|$ est le nombre de réalisations de $k \in [\![1,m]\!]$, alors (en appliquant le Théorème Central Limite centré réduit à $(N_1,\ldots,N_m)$ puis en l'"élevant au carré") on a

$$\xi_n^{\text{adéq}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{m-1}$$

(cf cours de Paul Doukhan, théorème 9.2) On en déduit une région de test asymptotique de niveau $\alpha \in]0,1[$: $W_n^{\text{adéq}} = \{\xi_n^{\text{adéq}} > q_{1-\alpha}^{\chi^2_{m-1}}\}$. A distance finie on s'assurera avant d'appliquer ce test asymptotique que $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $np_k > 5$, quitte à fusionner plusieurs classes : cette condition est requise pour que l'approximation d'une binômiale en normale soit raisonnable. Enfin, dans le cas d'une loi continue on se ramènera au cas précédent en discrétisant l'espace des réalisations en m classes.

Pourquoi ne pas utilise le test de Kolmogorov-Smirnov ? (cf théorème 9.3)

D'une certaine façon ce test se fonde sur la distance en $\|\|_\infty$ tandis que le test du χ^2 se fonde sur la distance en $\|\|_2$ entre la loi théorique et la loi empirique. De plus, ce test utilise une statistique dont on ne sait pas exprimer la loi limite (mais on sait la tabuler) ; à l'inverse le test du χ^2 utilise une statistique dont la loi limite est bien connue mais nécessite de discrétiser l'univers continu en classes ce qui introduit une erreur. De toute façon ce test est inapplicable ici car la loi de Poisson est discrète, tandis que le test du χ^2 est bien adapté.

Pour tester l'adéquation à une famille de lois paramétrée, une idée naturelle est de tester l'adéquation simple à la loi la plus vraisemblable, c'est-à-dire à la loi dont le paramètre est l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Considérons donc le modèle statistique $\left(\mathbb{N}^{200}, \tau, \left(\mathcal{P}(\lambda)^{\otimes 200}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}^{+*}}\right)$. Dans ce modèle la vraisemblance s'écrit $L_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance est donc $\widehat{\lambda} = \bar{X}$; on a numériquement

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{6\cdot 0 + 15\cdot 1 + 40\cdot 2 + 42\cdot 3 + 37\cdot 4 + 30\cdot 5 + 10\cdot 6 + 9\cdot 7 + 5\cdot 8 + 9\cdot 3 + 2\cdot 10 + 1\cdot 11}{200}\\ &\simeq 3,7\end{aligned}$$

En conséquence, si la famille $(X_i)_i$ suivait bien une loi de Poisson, celle-ci serait de paramètre $\widehat{\lambda} \simeq 3,7$ et par conséquent on aurait

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0,11]\!],\ \widehat{p_k} &= \mathbb{P}_{\widehat{\lambda}}(X_i = k)\\ &= e^{-\widehat{\lambda}}\frac{\widehat{\lambda}^k}{k!}\\ &\simeq e^{-3,7}\frac{3,7^k}{k!}\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à pratiquer une test d'adéquation simple à la loi $\mathcal{P}\left(\widehat{\lambda}\right)$.

Pour ce faire, afin de préserver la légitimité du test asymptotique à distance finie on s'ass que $\forall k \in [\![0,11]\!]$, $N_k < 5$, ce qui conduit à fusionner les quatre dernières modalités se le tableau suivant :

Modalité	Effectif observé
$X_i = 0$	$N_0 = 6$
$X_i = 1$	$N_1 = 15$
$X_i = 2$	$N_2 = 40$
$X_i = 3$	$N_3 = 42$
$X_i = 4$	$N_4 = 37$
$X_i = 5$	$N_5 = 30$
$X_i = 6$	$N_6 = 10$
$X_i = 7$	$N_7 = 9$
$X_i \geq 8$	$N_8 = 11$

Par conséquent $\xi_{200}^{\text{adéq}} = \sum_{k=0}^8 \frac{(N_k - n\widehat{p_k})^2}{n\widehat{p_k}} \simeq 7,58$. Or si $(X_i)_i$ suit bien une certaine de poisson, alors $\xi_{200}^{\text{adéq}}$ suit une loi du χ^2 à $(9-1) - \dim(\mathbb{R}^{+*}) = 7$ degrés de libe (puisqu'on n'a conservé que 9 classes). Le fractile de niveau 5% valant $q_{95\%}^{\chi^2_7} \simeq 14,1$, **accepte** finalement au seuil 5% l'hypothèse d'adéquation de la vrai loi inconnue de (X à la famille des lois de Poisson ; on peut en outre affirmer que $(X_i)_i$ suit vraisemblablem une loi de Poisson de paramètre $3,7$.

(b) Le niveau limite entre l'acceptation et le rejet de l'hypothèse pour l'échantillon obse est par définition la *p-value*, qui est telle que $\xi_{200}^{\text{adéq}} = q_{p-value}^{\chi^2_7}$; on a ici $p - value \simeq 19$ ce qui est assez élevé : l'hypothèse est rejetée au seuil 20%, mais acceptée à tout nive $\alpha \leq 18\%$.

☞ Q2 On cherche cette fois à tester l'adéquation simple de la loi des $(X_i)_i$ à la loi de Poisson paramètre 4.

De la même façon que dans le cas précédent les quatre dernières classes doivent être regroupé et on calcule successivement $p_k = e^{-4}\cdot\frac{4^k}{k!}$ pour $k \in [\![0,8]\!]$, puis $\xi_{200}^{\text{adéq}} = \sum_{k=0}^8 \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \simeq 16$ qui est censée suivre une loi du χ^2 à $(9-1) = 8$ degrés de liberté (il n'y a pas de paramè à estimer ici, donc $\dim(\Theta) = 0$). Comme $q_{99\%}^{\chi^2_8} \simeq 20,09$ on **accepte** l'hypothèse de stabilité niveau 1%.

☞ Q3 De façon similaire, on reprend $p_k = e^{-3,7}\frac{3,7^k}{k!}$ pour $k \in [\![0,8]\!]$, ce dont on tire $\xi_{200}^{\text{adéq}} \simeq 7,58$, est censée suivre une loi du χ^2 à 8 degrés de liberté (là encore, $\lambda = 3,7$ est donné a pri et il n'y a pas de paramètre à estimer). Bien évidemment, $3,7$ étant la valeur de l'estimat du maximum de vraisemblance dans le modèle statistique d'une famille de lois de Poiss de paramètre inconnu, à laquelle l'adéquation a déjà été acceptée au niveau α, l'adéquat simple à la loi de paramètre $\widehat{\lambda} = 3,7$ est **nécessairement** acceptée au même niveau α puisq $1 - F_{\chi^2_8}(x) > 1 - F_{\chi^2_7}(x)$ pour tout x.

En définitive, en notant $p^{\chi^2}(k)$ la p-value de la loi du χ^2 à k degrés de liberté on a :

$\xi_{200}^{\text{adéq}}$	Adéquation à la famile $\mathcal{P}(\lambda)_\lambda$	Adéquation simple à la loi $\mathcal{P}(3,7)$
$[0, q^{\chi^2}(7)[$	acceptée	acceptée
$]q^{\chi^2}(7), q^{\chi^2}(8)[$	rejetée	acceptée
$]q^{\chi^2}(8), +\infty[$	rejetée	rejetée

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Soit p la vraie probabilité qu'un ménage soit équipé en magnétoscope (on identifiera la proportion de ménages équipés à p). On a immédiatement $\widehat{p}(y_1,\dots,y_n) = \bar{y}$, pour lequel $\sqrt{n}\,(\widehat{p}-p) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$

En appliquant la même méthode que pour l'exercice exercice 3 , on montre qu'on accepte H_0 : "$p \le p_0 = 20\%$" *ssi* $\bar{y} < k_\alpha$ avec

$$k_\alpha = p_0 + q_{1-\alpha}^{\mathcal{N}(0,1)}\sqrt{\frac{\bar{y}((1-\bar{y})}{n}}$$

☞ Q2 (a) La vraisemblance du modèle s'écrit pour $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$ et $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$L_{Y_1,\dots,Y_n|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}\,(y_1,\dots,y_n;a,b) = \prod_{i=1}^n \frac{\left(e^{a+bx_i}\right)^{y_i}}{1+e^{a+bx_i}}$$

Le score s'écrit donc

$$\frac{\partial L_{Y_1,\dots,Y_n|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}}{\partial\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}}\,(y_1,\dots,y_n;a,b) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{e^{a+bx_i}}{1+e^{a+bx_i}}\right) \\ \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{e^{a+bx_i}}{1+e^{a+bx_i}}\right) x_i \end{pmatrix}$$

et l'information de Fisher est donc

$$I_n(a,b) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{e^{a+bx_i}}{\left(1+e^{a+bx_i}\right)^2}\begin{pmatrix} 1 & x_i \\ x_i & {x_i}^2\end{pmatrix}\right)$$

qu'on ne peut expliciter davantage sans hypothèse sur la distribution de $(X_i)_i$.

(b) Sous l'hypothèse H_0 : "$b = 0$" il vient

$$\forall x_i \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}_{H_0}(Y_i = 1|X_i = x_i) = \frac{e^a}{1+e^a}$$

c'est-à-dire que $(Y_i|X_i)$ suit une binômiale de paramètre $p_0 = \frac{e^a}{1+e^a}$ indépendant de x_i. La vraisemblance conditionnelle sous H_0 est donc

$$L^{H_0}_{Y_1,\dots,Y_n|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}\,(y_1,\dots,y_n;a,b) = \frac{e^{a\sum_{i=1}^n y_i}}{(1+e^a)^n}$$

et un estimateur $\widehat{a^0}$ de a vérifie donc, sous H_0, $\frac{e^{\widehat{a^0}}}{1+e^{\widehat{a^0}}} = \bar{y}$, soit $\widehat{a^0} = \ln\frac{\bar{y}}{1-\bar{y}}$. On a b entendu $\widehat{b^0} = 0$.
Il vient alors

$$\frac{\partial L^{H_0}_{Y_1,\dots,Y_n|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}}{\partial\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}}\,(y_1,\dots,y_n;\widehat{a^0},\widehat{b^0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})\,x_i\end{pmatrix}$$

(c) La matrice d'information de Fisher sous H_0 est

$$I_n(a,b) =_{|H_0} \frac{e^a}{(1+e^a)^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ x_i & {x_i}^2\end{pmatrix}\right)$$

Or $\frac{e^{\widehat{a^0}}}{1+e^{\widehat{a^0}}} = \bar{y}$, donc $\frac{e^{\widehat{a^0}}}{\left(1+e^{\widehat{a^0}}\right)^2} = \bar{y}(1-\bar{y})$ et par conséquent (en notant $\bar{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {x_i}^2$)

$$\widehat{I_1^{H_0}} = \bar{y}(1-\bar{y})\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x^2}\end{pmatrix}$$

est un estimateur convergent de I_1 si H_0 est vraie.

(d) On a par définition

$$\xi_n^S = \frac{1}{n}\widehat{S^0}'\left(\widehat{I_1^{H_O}}\right)^{-1}\widehat{S^0}$$

en notant $\widehat{S^0} = \frac{\partial L_{Y_1,\dots,Y_n|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n}}{\partial(a,b)'}\,(y_1,\dots,y_n;\widehat{a^0},\widehat{b^0})$.
Or

$$\begin{aligned}\left(\widehat{I_1^{H_O}}\right)^{-1} &=_{|H_0} \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x^2}\end{pmatrix}\right)^{-1} \\ &=_{|H_0} \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})}\cdot\frac{1}{\bar{x^2}-(\bar{x})^2}\cdot\begin{pmatrix} \bar{x^2} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \xi_n^S(y_1,\dots,y_n) \\
=_{|H_0} & \frac{1}{n}\left(0, \sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})\,x_i\right) \times \left(\frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})}\frac{1}{\bar{x^2}-(\bar{x})^2}\begin{pmatrix} \bar{x^2} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})\,x_i \end{pmatrix} \\
=_{|H_0} & \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})\,x_i\right) \cdot \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})}\frac{1}{\bar{x^2}-(\bar{x})^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})\,x_i\right) \\
=_{|H_0} & \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})\,x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}
\end{aligned}$$

Par construction, si H_0 est vraie alors

$$\xi_n^S \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

ce qui permet de tester effectivement H_0.
Remarquons que ξ_n^S est une fonction de $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ uniquement à travers sa variance et sa covariance avec $(Y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$; en outre elle est croissante avec cette dernière, comme le suggère l'intuition : dire que la loi de Y_i conditionnellement à X_i dépend effectivement de X_i (ce qui revient à dire "$\neg H_0$"), c'est dire que les observations Y_i sont significativement corrélées avec celles de X_i, et inversement.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Dans la pratique la variable Y_k est tronquée, c'est-à-dire l'opérateur n'attend pas plus de $N \geq 1$ tirages successifs qu'une pièce soit défectueuse. Les calculs pourraient être menés directement dans le cas où $N = +\infty$, ce qui revient à supprimer tous les termes en facteur de " x^N " dans les lignes qui suivent.

On a pour $k \in [\![1,K]\!]$ et $n \in [\![1,N]\!]$, en notant $M = \sum_{n=N+1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_k = n) &= \mathbb{P}(\text{“Les } n-1 \text{ premières pièces tirées sont conformes et la } n\text{-ième est défectueuse”}) \\
&= \frac{1}{M}(1-p)^{n-1}\cdot p \quad \text{(le tirage s'effectue avec remise)}
\end{aligned}$$

Le tirage s'effectuant avec remise, le nombre de tirages nécessaires n pour obtenir une pièce défectueuse n'est pas borné (avec toutefois $\mathbb{P}(n = +\infty) = 0$).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_k) &= \sum_{n=0}^N n\mathbb{P}(Y_k = n) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^N np(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{1}{M}p\sum_{n=0}^N \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\mapsto x^n)\right)_{(1-p)} \\
&= \frac{1}{M}p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\mapsto \sum_{n=0}^N x^n)\right)_{(1-p)}\right) \\
&= \frac{1}{M}p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\mapsto \frac{1-x^{N+1}}{1-x})\right)_{(1-p)}\right) \\
&= \frac{1}{M}p\left(x\mapsto \frac{-(N+1)x^N(1-x)+(1-x^{N+1})}{(1-x)^2}\right)_{(1-p)} \\
&= \frac{1}{M}p\left(x\mapsto \frac{1+Nx^{N+1}-(N+1)x^N}{(1-x)^2}\right)_{(1-p)} \\
&= \frac{1}{M}\frac{1}{p}\left(1-(1-p)^N\left((N+1)p+1-p\right)\right) \\
&\xrightarrow[N\infty]{} \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

et d'autre part que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left({Y_k}^2\right) &= \sum_{n=0}^{N} n^2 \mathbb{P}(Y_k = n) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N} n^2 p (1-p)^{n-1} \\
&= \frac{1}{M} p \left((1-p) \sum_{n=2}^{N} n(n-1)(1-p)^{n-2} + \sum_{n=1}^{N} n(1-p)^{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{M} p \left((1-p) \left(\sum_{n=2}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x \mapsto x^n) \right)_{(1-p)} + \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}(x \mapsto x^n) \right)_{(1-p)} \right) \\
&= \frac{1}{M} p \left((1-p) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x \mapsto \frac{1-x^{N+1}}{1-x}) \right)_{(1-p)} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x \mapsto \frac{1-x^{N+1}}{1-x}) \right)_{(1-p)} \right) \\
&= \frac{1}{M} \left\{ \begin{array}{l} p(1-p) \left(x \mapsto \frac{(N(N+1)x^N - (N+1)Nx^{N-1})(1-x) + 2(1+Nx^{N+1} - (N+1)x^N)}{(1-x)^3} \right)_{(1-p)} \\ +p \left(x \mapsto \frac{1+Nx^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2} \right)_{(1-p)} \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{M} \left\{ \begin{array}{l} p(1-p) \left(x \mapsto \frac{2 - N(N+1)x^{N-1} + 2N^2 X^N - N(N-1)x^{N+1}}{(1-x)^3} \right)_{(1-p)} \\ +p \left(x \mapsto \frac{1+Nx^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2} \right)_{(1-p)} \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{p^2} \left\{ \begin{array}{l} 2(1-p) - N(N+1)(1-p)^N + 2N^2(1-p)^{N+1} - N(N+1)(1-p)^{N+2} \\ \ldots + p - (N+1)p(1-p)^N - (1-p)^{N+1} \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{M} \frac{2 - p - (1-p)^N \left(N(N+1) - 2N^2(1-p) + N(N-1)(1-p)^2 + (N+1)p \right)}{p^2} \\
&\xrightarrow[N\infty]{} \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y_k) &= \mathbb{E}\left({Y_k}^2\right) - \left(\mathbb{E}(Y_k)\right)^2 \\
&= \frac{1}{M} \frac{1}{p^2} \left\{ \begin{array}{l} 1-p \\ -(1-p)^N \left[N(N+1) - 2N^2(1-p) + N(N-1)(1-p)^2 - ((N+1)p + 2 - 2p) \right] \\ -(1-p)^{2N} \left[N(N+1) - 2N^2(1-p) + N(N-1)(1-p)^2 + (N+1)p \right]^2 \end{array} \right. \\
&\xrightarrow[N\infty]{} \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

On se placera dans toute la suite dans le cas où $N = +\infty$

☞ Q2 Le test de Wald se fonde sur la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui vaut ici $\widehat{p} = \frac{1}{\bar{y}}$. Ecrire le Théorème Central Limite implique donc de l'écrire en

$\bar{y}$ puis d'appliquer le théorème de Slutsky à $g : (x \mapsto \frac{1}{x})$. On en tirerait alors la statistique
Wald habituelle, dont on saurait qu'elle suit asymptotiquement une loi du χ^2 à un degré
liberté.

Pour autant, comme g est bijective, nous préférons appliquer le Théorème Central Limite
(comparé à $g^{-1}(p_0) = \frac{1}{p_0}$), et reconstruire de façon analogue à la construction de la statisti
de Wald une statistique qui suit un χ^2 à un degré de liberté.

On a en effet d'après le Théorème Central Limite

$$\sqrt{K}\left(\bar{y} - \frac{1}{p}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-p}{p^2}\right)$$

donc

$$\sqrt{K} \frac{\bar{y} - \frac{1}{p}}{\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}} \xrightarrow[K\infty]{\mathcal{N}} (0,1)$$

et donc

$$K \frac{\left(\bar{y} - \frac{1}{p}\right)^2}{\frac{1-p}{p^2}} \xrightarrow[K\infty]{} \chi^2_1$$

Enfin, en approchant la variance $\frac{1-p}{p^2}$ par $\frac{1-\frac{1}{\bar{y}}}{\frac{1}{\bar{y}^2}} = \bar{y}(\bar{y}-1)$ il vient

$$\xi^W_n(y_1, \ldots, y_n) = K \frac{\left(\bar{y} - \frac{1}{p_0}\right)^2}{\bar{y}(\bar{y}-1)} \xrightarrow[K\infty]{H_0} \chi^2_1$$

☞ Q3 On cherche à tester l'hypothèse H_0 : "$p \leq p_0 = 5\%$" au seuil $\alpha \in [0,1[$ en comparant $\widehat{p} =$
un certain fractile k_α. L'idée est donc d'exploiter la normalité asymptotique de l'estimateu
pour en déduire la forme explicite (et tabulable) de k_α

Considérons donc $k_\alpha \in \mathbb{R}$; on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(A_k) &= \mathbb{P}_p(\bar{y} < k_\alpha) \\
&= \mathbb{P}_p\left(\sqrt{K} \frac{\bar{y} - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}} < \sqrt{K} \frac{k_\alpha - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}} \right)
\end{aligned}
$$

<u>*Remarque :*</u> Même si cela ne change rien à la méthode, rien n'implique que k_α ne dépende
pas de la taille K de l'échantillon. On est donc amené à exprimer k_α en tant
que fonction de K, supposée sufissamment régulière.

Ainsi, si $k_\alpha : (\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R})$ est une fonction de K qui admet une limite finie lorsque $K \to +\infty$, o

$$\mathbb{P}_p(A_k) \xrightarrow[K\infty]{} \Phi\left(\lim_{K\infty} \sqrt{K} \frac{k_\alpha(K) - \frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}} \right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite ; il reste détermi
$\sup_{p \leq p_0} \lim_{K\infty} \mathbb{P}_p(A_k)$.

Or si $p_2 \le p_1 \le p_0$, on a

$$\sqrt{K}\frac{k_\alpha(K)-\frac{1}{p_2}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}} \le \sqrt{K}\frac{k_\alpha(K)-\frac{1}{p_1}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}}$$

et par conséquent

$$\Phi\left(\lim_{K\infty}\sqrt{K}\frac{k_\alpha(K)-\frac{1}{p_2}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}}\right) \le \Phi\left(\lim_{K\infty}\sqrt{K}\frac{k_\alpha(K)-\frac{1}{p_1}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}}\right)$$

soit encore

$$\mathbb{P}_{p_2}(A_k) \le \mathbb{P}_{p_1}(A_k)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sup_{p\le p_0}\lim_{K\infty}\mathbb{P}_p(A_k) &= \lim_{K\infty}\sup_{p\le p_0}\mathbb{P}_p(A_k) \quad \text{par uniforme continuité} \ldots\\ &= \lim_{K\infty}\mathbb{P}_{p=p_0}(A_k)\\ &= \Phi\left(\lim_{K\infty}\sqrt{K}\frac{k_\alpha(K)-\frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}}\right)\end{aligned}$$

Pour K asymptotiquement grand et $\alpha \in [0,1[$ on accepte donc H_0 *ssi*

$$\sqrt{K}\frac{k_\alpha(K)-\frac{1}{p_0}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}} > q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)}$$

où $q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)}$ désigne le fractile de niveau α de la loi normale centrée réduite.

L'idée est alors de définir k_α de façon à ce que $\Phi(T(k_\alpha)) = q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)}$, où $T(x) = \sqrt{K}\frac{x-\frac{1}{p}}{\sqrt{\bar{y}(\bar{y}-1)}}$; de cette façon, tester si $p \le p_0$ au seuil α, c'est-à-dire comparer $\sup_{p\le p_0}\mathbb{P}_{p,k\infty}(A_k)$ à α, revient juste à comparer $\bar{y}$ à k_α.

Plus précisément, H_0 est acceptée *ssi* $\bar{y} > k_\alpha(K)$ avec

$$\boxed{k_\alpha(K) = \frac{1}{p_0} + q_\alpha^{\mathcal{N}(0,1)}\sqrt{\frac{\bar{y}(\bar{y}-1)}{K}}}$$

(et on vérifie a posteriori que $\lim_{K\infty} k_\alpha(K) = \frac{1}{p_0}$ existe).

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 (a) On a

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}(W)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{bx}{W_0}\left(\frac{W_0}{W}\right)^\alpha \mathbb{1}_{W\ge W_0}W\,dW\\ &= (\alpha-1)(\alpha-1){W_0}^{\alpha-1}\int_{W_0}^{+\infty}W^{1-\alpha}dW\\ &= (\alpha-1){W_0}^{\alpha-1}\left[\frac{W^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{W_0}^{+\infty}\\ &= \boxed{\tfrac{\alpha-1}{\alpha-2}W_0}\end{aligned}$$

aussitôt que $\alpha > 2$, et par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W^2) &= \int_{\mathbb{R}}\frac{bx}{W_0}\left(\frac{W_0}{W}\right)^\alpha \mathbb{1}_{W\ge W_0}W^2dW\\ &= (\alpha-1){W_0}^{\alpha-1}\int_{W_0}^{+\infty}W^{2-\alpha}dW\\ &= (\alpha-1){W_0}^{\alpha-1}\left[\frac{W^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_{W_0}^{+\infty}\\ &= \frac{\alpha-1}{\alpha-3}{W_0}^2\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} v &= \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2\\ &= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-3} - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2\right){W_0}^2\\ &= \boxed{\tfrac{\alpha-1}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}{W_0}^2}\end{aligned}$$

aussitôt que $\alpha > 3$.

En toute rigueur, il faudrait encore prouver que lorsque $\alpha < 2$,

$\mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2 = (+\infty) - (+\infty)$ diverge effectivement, en écrivant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(W^2\right) - (\mathbb{E}(W))^2 &= \int_{\mathbb{R}} W^2 f(W|\alpha)dW - \left(\int_{\mathbb{R}} W f(W|\alpha)dW\right)^2 \\
&= \lim_{M\infty}\left(\left(\int_{W_0}^{M} W^2 f(W|\alpha)dW\right) - \left(\int_{W_0}^{M} W f(W|\alpha)dW\right)^2\right) \\
&= \lim_{M\infty}\left(\left(\int_{W_0}^{M} W^2 f(W|\alpha)dW\right) - \left(\int_{W_0}^{M} W f(W|\alpha)dW\right)\left(\int_{W_0}^{M} \omega f(\omega|\alpha)d\omega\right)\right) \\
&= \lim_{M\infty}\left(\int_{W_0}^{M}\left(W^2 - W\left(\int_{W_0}^{M}\omega f(\omega|\alpha)d\omega\right)\right) f(W|\alpha)dW\right) \\
&= \lim_{M\infty}\left(\int_{W_0}^{M}\left(W^2 - W\left[\frac{W^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{W_0}^{M}\right) f(W|\alpha)dW\right) \\
&= \lim_{M\infty}\left(\int_{W_0}^{M} W\left(W - \frac{M^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{{W_0}^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)(\alpha-1){W_0}^{\alpha-1}W^{-\alpha}dW\right) \\
&= (\alpha-1){W_0}^{\alpha-1}\lim_{M\infty}\left(\int_{W_0}^{M} W^{2-\alpha} - \left(\frac{M^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{{W_0}^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)W^{1-\alpha}dW\right) \\
&\underset{M\infty}{\approx} (\alpha-1){W_0}^{\alpha-1}\left(\frac{M^{3-\alpha}}{3-\alpha} - \frac{M^{4-2\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right) \\
&\xrightarrow[M\infty]{} \pm\infty \quad \text{selon le signe de } \alpha-1
\end{aligned}$$

Ainsi les deux premiers moments existent *ssi* $\alpha = Xb + 1 > 3$, condition supposée vérifiée par la suite.

(b) On a pour $(w_1, \ldots, w_n) \in [W_0, +\infty[^{\,n}$

$$\begin{aligned}
L_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n;\alpha) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha-1}{W_0}\left(\frac{W_0}{w_i}\right)^{\alpha} \\
&= (\alpha-1)^n {W_0}^{n(\alpha-1)}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} {w_i}^{\alpha}}
\end{aligned}$$

Par suite l'estimateur du maximisation de vraisemblance $\widehat{\alpha}$ de α vérifie

$$\frac{n}{\widehat{\alpha}-1} - \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{w_i}{W_0} = 0$$

de sorte que

$$\boxed{\widehat{\alpha} = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{w_i}{W_0}}}$$

(et on vérifie que cette condition est bien suffisante)

(c) On a pour une observation $w \in [W_0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
S_1(w;\alpha) &= \frac{\partial \ln L_{W_1}}{\partial\alpha}(w;\alpha) \\
&= \frac{1}{\alpha-1} - \ln\frac{w}{W_0}
\end{aligned}$$

Or le score est centré, ce qui s'écrit $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha-1} - \ln\frac{W}{W_0}\right) = 0$, soit

$$\boxed{\mathbb{E}(\ln W) = \tfrac{1}{\alpha-1} + \ln W_0}$$

De façon similaire on a

$$\begin{aligned}
I_1(\alpha) &= -E\frac{\partial^2 \ln L_{W_1}}{\partial\alpha^2}(w;\alpha) \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)^2}
\end{aligned}$$

Or $I_1(\alpha) = \mathbb{V}(S_1(W;\alpha)) = \mathbb{E}(S_1(W;\alpha)^2)$, donc finalement

$$\mathbb{V}(\ln W) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

et

$$\boxed{\mathbb{E}\left((\ln W)^2\right) = \tfrac{1}{(\alpha-1)^2} + \left(\tfrac{1}{\alpha-1} + \ln W_0\right)^2}$$

(d) Notons $Y_i = \ln W_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$; alors

$$s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$$

est la variance empirique de $(\ln W_1, \ldots, \ln W_n)$.
Or si H_0 est vraie, alors $\mathbb{V}(\ln W_i) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$ dont un estimateur convergent est $\frac{1}{(\widehat{\alpha}-1)^2}$, d
l'idée de construire une statistique de test fondée sur $s - \frac{1}{(\widehat{\alpha}-1)^2}$.
Un tel test est habituellement appelé *test d'indépendance de Fisher*.

(e) On a

$$\sqrt{n}\left(\left(\begin{array}{c}\overline{\ln W}\\ \overline{(\ln W)^2}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\mathbb{E}(\ln W)\\ \mathbb{E}\left((\ln W)^2\right)\end{array}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\left(\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right), \Omega\right)$$

avec $\Omega = \left(\begin{array}{cc}\mathbb{V}(\ln W) & \mathbb{C}ov\left(\ln W, (\ln W)^2\right)\\ \mathbb{C}ov\left(\ln W, (\ln W)^2\right) & \mathbb{V}\left((\ln W)^2\right)\end{array}\right)$ que l'on n'explicitera pas dav
tage.

Soit alors $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (m,v) & \mapsto & v - m^2 \end{pmatrix}$; alors d'après le théorème de Slutsky

$$\sqrt{n}\left(s - \frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, M(\alpha))$$

avec $M(\alpha) = \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha)' \times \Omega \times \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha) \in \mathbb{R}^+$.
Enfin, en considérant l'estimateur convergent $\widehat{M(\alpha)} = M(\widehat{\alpha})$ de $M(\alpha)$ on en tire que

$$\sqrt{n}\left(\frac{s - \frac{1}{(\alpha-1)^2}}{\sqrt{M(\widehat{\alpha})}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

de sorte que finalement si H_0 est vraie

$$\boxed{\xi_n^F = n\frac{\left(s - \frac{1}{(\alpha-1)^2}\right)^2}{M(\widehat{\alpha})} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2}$$

☞ Q2 (a) On a pour $(w_1,\ldots,w_n,x_1,\ldots,x_n) \in [W_0,+\infty[^{\,2n}$

$$\begin{aligned} L_{W_1,\ldots,W_n|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n}(w_1,\ldots,w_n,x_1,\ldots,x_n;b) &= \prod_{i=1}^n \frac{bx_i}{W_0}\left(\frac{W_0}{w_i}\right)^{bx_i+1} \\ &= b^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) {W_0}^{b\sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^n {w_i}^{bx_i+1}} \end{aligned}$$

Par suite l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{b}$ de b vérifie

$$\frac{n}{\widehat{b}} + \sum_{i=1}^n x_i \ln W_0 - \sum_{i=1}^n x_i \ln w_i = 0$$

ce dont on tire

$$\boxed{\widehat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i \ln \frac{w_i}{W_0}}}$$

(et on vérifie que cette condition est bien suffisante)

(b) Le score s'écrit cette fois pour une observation

$$\begin{aligned} S_1(w|X=x;b) &= \frac{\partial \ln L_{W_1|X=x}}{\partial b}(w;b) \\ &= \frac{1}{b} - x\ln\frac{w}{W_0} \end{aligned}$$

Il est centré, et donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X\ln\frac{W}{W_0}\right) = \frac{1}{b}}$$

Par ailleurs l'information de Fisher s'écrit

$$\begin{aligned} I_1(b) &= -E\frac{\partial^2 \ln L_{W_1|X_1}}{\partial b^2}(w;b) \\ &= \frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} I_1(b) &= \mathbb{V}(S_1(W|X;b)) \\ &= \mathbb{E}\left(S_1(W|X;b)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{b} - X\ln\frac{W}{W_0}\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{b^2} - 2\frac{X}{b}\ln\frac{W}{W_0} + X^2\left(\ln\frac{W}{W_0}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{b^2} + \mathbb{E}\left(X^2\left(\ln\frac{W}{W_0}\right)^2 - 2\frac{X}{b}\ln\frac{W}{W_0}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X^2\left(\ln\frac{W}{W_0}\right)^2 - 2\frac{X}{b}\ln\frac{W}{W_0}\right) = 0}$$

De façon similaire au cas où les X_i étaient constants, on cherche alors à tester H_0
considérant l'estimateur empirique de cette expression, à savoir

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {x_i}^2\left(\ln\frac{w_i}{W_0}\right)^2 - \frac{1}{b}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n x_i \ln\frac{w_i}{W_0}$$

Il suffit alors, en s'appuyant sur la loi asymptotique de $\begin{pmatrix} X\ln\frac{W}{W_0} \\ X^2\left(\ln\frac{W}{W_0}\right)^2 \end{pmatrix}$ obten
par le Théorème Central Limite, d'appliquer le théorème de Slutsky en considér
$g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (m,v) & \mapsto & v - \frac{2}{b}m \end{pmatrix}$, ce qui conduit à

$$\sqrt{n}(t-0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, N(b))$$

où $t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {x_i}^2\left(\ln\frac{w_i}{W_0}\right)^2 - \frac{2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i\ln\frac{w_i}{W_0}\right)^2$ (en substituant $\widehat{b}$ à b)
et $N(b) = \frac{\partial g}{\partial b}(b)' \times \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X\ln\frac{W}{W_0} \\ X^2\left(\ln\frac{W}{W_0}\right)^2 \end{pmatrix}\right) \times \frac{\partial g}{\partial b}(b)$.

On en tire en définitive la statistique de test

$$\xi_n^F = n\frac{\left(t - \frac{1}{b^2}\right)^2}{N(\widehat{b})} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

si H_0 est vraie.

☞ Q3 (a) On a pour $(w_1, \ldots, w_n, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$L_{W_1,\ldots,W_n|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n}(w_1,\ldots,w_n; W_0, b) = b^n \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{(w_i)^{bx_i+1}}\right) {W_0}^{b\sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{1}_{\min_i w_i \geq W_0}$$

En particulier l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{W_0}$ de W_0 est

$$\boxed{\widehat{W_0} = \min_i w_i}$$

(b) La difficulté est que le modèle statistique n'est plus régulier ; en particulier, la log-vraisemblance n'est plus dérivable, donc ni le score ni la matrice d'information de Fisher ne sont définis. La procédure de test utilisée précédemment, fondées sur leurs propriétés statistiques, n'est donc plus applicable.

⋆

⋆ ⋆

8 Travaux Dirigés n°8

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Posons $\mu = \delta_a + \lambda$ et $\mu_n = \mu^{\otimes n}$.

Remarque : nous restreindrons les démonstrations au cas où une seule observation X_1 est d ponible, dans la mesure où car la généralisation à n observations i.i.d. se réduit à un passa au produit immédiat :

$$dP_{X_1,\ldots,X_n} = \prod_{i=1}^n dP_{X_i}$$
$$\frac{dP_{X_1,\ldots,X_n}}{d\mu_n} = \prod_{i=1}^n \frac{dP_{X_i}}{d\mu}$$

Remarque préliminaire

Pour $\mathcal{A}$ ensemble mesurable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}) &= \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 = a)\mathbb{P}(X_1 = a) + \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 \neq a)\mathbb{P}(X_1 \neq a) \\
&= \alpha\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 = a) + (1-\alpha)\int_{\mathcal{A}} \varphi(x)d\lambda(x)
\end{aligned}$$

où φ désigne la densité de la loi normale centrée réduite.

Or $\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}|X_1 = a)$ vaut 1 si $a \in \mathcal{A}$ et 0 sinon, de sorte que

$$\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{A}) = \alpha\mathbb{1}_{a\in\mathcal{A}} + (1-\alpha)\int_{\mathcal{A}} \varphi(x)d\lambda(x)$$

Or μ est une mesure dominante d'une variable X_1 ssi :

$$\forall \mathcal{A} \text{ mesurable}, \ \mu(\mathcal{A}) = 0{:}P_{X_1}(\mathcal{A}) = 0$$

En l'occurence pour tout $\mathcal{A}$ mesurable :

– $\mu(\mathcal{A}) = 0{:}\delta_a(\mathcal{A}) = 0$

– $\delta_a(\mathcal{A}) = 0{:}a \notin \mathcal{A}$, donc d'après 1 $\lambda(\mathcal{A}) = 0{:}P_{X_1}(\mathcal{A}) = 0$

Donc $(\delta_a + \lambda)^{\otimes n}$ est une mesure dominante.

☞ Q2 On a $\mathbb{1}_{a\in\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} \delta_a(x)$,

donc en reportant dans l'équation 1 il vient

$$P(X_1 \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} (\alpha\delta_a(x) + (1-\alpha)\varphi(x)d\lambda(x))$$

d'où on tire facilement

$$P(X_1 \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} (\alpha\mathbb{1}_a(x) + (1-\alpha)\varphi(x)(1 - \mathbb{1}_a(x)))\, d\mu(x)$$

de sorte qu'en définitive

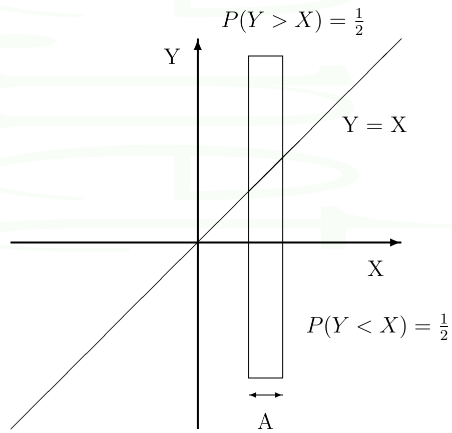
$$\frac{dP_{X_1}(x_1)}{d(\delta_a + \lambda)} = \alpha\mathbb{1}_a(x_1) + (1-\alpha)(1 - \mathbb{1}_a(x_1))\phi(x_1)$$

d'où le résultat par indépendance de $(X_1, \ldots, X_n)$.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Si un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) vérifie $\mathcal{P}$, alors au voisinage de tout X, la probabilité est la même pour Y d'être au-dessus ou au-dessous de X, comme illustré sur la figure suivante :



Pour simplifier la présentation, supposons que vous gagnez $+1$ si vous avez deviné juste et -1 sinon ; ce problème revient à savoir si vous pouvez vous garantir un gain espéré strictement positif.

☞ Q1 Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$ votre stratégie, et soient (x, y) une réalisation du tirage.

– Si x vous est présenté :
  Si $x > y$, votre gain est $\sigma(x)$; si $x < y$, votre gain est $-\sigma(x)$. Votre gain espéré, sachant que x vous est présenté, est donc nul.
– Si y vous est présenté, il en va de même.

Le choix de l'enveloppe étant indépendant du tirage de X et de Y, votre gain espéré est toujours nul, quelle que soit votre stratégie.

Comme l'hypothèse $\mathcal{P}$ semble “raisonnable”, l'intuition suggère qu'à ce jeu vous ne pourrez jamais obtenir un gain espéré strictement positif. Cette intuition est cependant erronée.

☞ Q2 (a) On a dans tous les cas $\sigma(x) = \sigma(y) = -1$ car $x < s$ et $y < s$.
Or si $x < y$, le gain espéré est

$$\mathbb{P}(\text{le nombre présenté est } x) \cdot 1 + \mathbb{P}(\text{le nombre présenté est } y) \cdot (-1) = 0$$

puisque ces deux alternatives sont équiprobables et que le choix de l'enveloppe est indépendant du tirage de X et de Y.

Il en va de même lorsque $x > y$, de sorte que le gain espéré, sachant que $x < s$ et $y <$
est nul.

(b) Si le nombre présenté est x, on a $\sigma(x) = -1$ car $x < s$; or $x < y$, donc la réponse est ju
et le gain est $+1$.
Si le nombre présenté est y, on a $\sigma(y) = +1$ car $y > s$; or $y > x$, donc la réponse
encore juste et le gain est toujours $+1$.
Ainsi dans tous les cas le gain espéré, sachant que $x < s < y$, est $+1$. Il en va de mê
bien-sûr sachant que $y < s < x$.

(c) D'après les résultats précédents le gain espéré en jouant σ_s est donc

$$\boxed{g(s) = \mathbb{P}(X < s < Y) + \mathbb{P}(Y < s < X)}$$

Or ces deux probabilités ne peuvent être simultanément nulles pour tout s : en effet

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X < s < Y) + \mathbb{P}(Y < s < X) ds &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbb{1}_{x<s<y} + \mathbb{1}_{y<s<x}) f_{X,Y}(x, y) dx dy \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x<s<y} ds + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y<s<x} ds \right) f_{X,Y}(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbb{1}_{x<y}(y - x) + \mathbb{1}_{y<x}(y - x)) f_{X,Y}(x, y) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |x - y| \, \mathbb{1}_{x \neq y} f_{X,Y}(x, y) dx dy s \\
&= \mathbb{E}(|X - Y|)
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ alors $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ et le jeu devient trivial : la stratégie qui préte
que le nombre tiré est le plus grand est presque sûrement toujours gagnante ; en particu
lorsque $s = 0$ $g(0) > 0$.
Et si $\mathbb{P}(X \neq Y) \neq 0$ alors $\mathbb{E}(|X - Y|) > 0$, et donc $\int_{\mathbb{R}} g(s) ds > 0$.
Donc dans tous les cas

$$\boxed{\exists s \in \mathbb{R} \;/\; g(s) > 0}$$

En fait, si (X, Y) est distribué de telle sorte que toute partie de mesure non-nulle a u
probabilité non-nulle, alors *n'importe quel* seuil s assure un gain espéré strictement positi

☞ Q3 Si une telle distribution sur $\mathbb{R}^2$ existait, alors d'après la question (1) dans le jeu de Blackw
associé nul ne saurait gagner plus que zéro en moyenne, ce qui est pourtant possible d'aprè
question (2).

☞ Q1 La formulation du paradoxe suggère que l'on se donne une distribution de probabi
a priori sur les deux sommes X et Y ; cette distribution est nécessairement telle
$\mathbb{P}(X = 2Y \text{ ou } Y = 2X) = 1$.
Etant donné $x \in \mathbb{R}$ et à supposer que $X = x$, l'hypothèse $\mathcal{H}_x$ s'exprime en termes mathé
tiques sous la forme

$$\mathbb{P}(Y = 2x \,|\, X = x) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{x}{2} \,|\, X = x\right) = \frac{1}{2}$$

☞ Q2 L'hypothèse $\mathcal{H}_y$ analogue à la précédente en $Y = y \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$\mathbb{P}(X = 2y \,|\, Y = y) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y}{2} \,|\, Y = y\right) = \frac{1}{2}$$

Dans l'énoncé du paradoxe, l'hypothèse selon laquelle "chacune a autant de chances que l'autre de contenir la plus grosse somme" se traduit alors en $\mathcal{H}_x$ quelle que soit la somme x de la première enveloppe, et $\mathcal{H}_y$ quelle que soit la somme y de la deuxième enveloppe.

En d'autres termes

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y = 2x \,|\, X = x) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{x}{2} \,|\, X = x\right) = \frac{1}{2} \\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = 2y \,|\, Y = y) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y}{2} \,|\, Y = y\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'événement $Y = 2x$ est égal à l'événement $Y > x$, et l'événement $Y = \frac{x}{2}$ à $Y < x$. Par suite

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y > x \,|\, X = x) = \mathbb{P}(Y < x \,|\, X = x) = \frac{1}{2} \\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X > y \,|\, Y = y) = \mathbb{P}(X < y \,|\, Y = y) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Par conséquent pour toute partie mesurable $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(X \in A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y \in \mathcal{A}) \neq 0$ il vient

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(Y > X | X \in \mathcal{A}) = \mathbb{P}(Y < X | X \in \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X > Y | Y \in \mathcal{A}) = \mathbb{P}(X < Y | Y \in \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \end{array}$$

de sorte que (X, Y) vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

☞ Q3 Ainsi, à supposer que l'on se donne une distribution a priori sur les sommes d'argent de chacune des deux enveloppes, il n'est pas possible de traduire l'hypothèse "chacune a autant de chances que l'autre de contenir la plus grosse somme" comme il est suggéré, car la distribution vérifierait alors la propriété $\mathcal{P}$ ce qui n'est pas possible.

La démarche proposée, bien qu'intuitive, n'est donc pas raisonnable : en particulier il est faux qu'après un nombre quelconque de changements d'enveloppe on ait "à nouveau intérêt à changer d'enveloppe".

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Il suffit de poser $c = -x_1$ dans la définition de l'équivariance.

☞ Q2 Le risque associé vérifie :

$$\begin{aligned} R_w(T,\theta) &= E_\theta[w(T-\theta)] \\ &= \int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(x_1,\ldots,x_n)-\theta) \prod_{\iota=1}^n f(x_i-\theta)dx_i \\ &= \int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(x_1-\theta,\ldots,x_n-\theta)) \prod_{\iota=1}^n f(x_i-\theta)dx_i \\ &= \int_{(\mathbb{R}^k)^n} w(T(u_1,\ldots,u_n)) \prod_{\iota=1}^n f(u_i)du_i \\ &= R_w(T,0) \end{aligned}$$

en effectuant un changement de variable $u_i = x_i - \theta$.

☞ Q3 (a) Soit $c \in \mathbb{R}^k$; on a

$$\begin{aligned} \psi(x+c) &= \int w(x+c-u) \prod_{i=1}^n f(X_i-u)du \\ &= \int w(x-v) \prod_{i=1}^n f(X_i-c-v)dv \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $v = u - c$.
En particulier $\psi(x+X_1) = \int w(x-v)f(-v)\prod_{i=2}^n f\left((X_i-X_1)-v\right)dv$
Donc $\psi(x+X_1)$ ne dépend que de x et des variables aléatoires $X_2 - X_1, \ldots, X_n - X$
soit donc T_1 tel que $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^k} \psi(x+X_1) = T_1(X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1)$.
Or $\forall \phi, \forall c \in \mathbb{R}^k$, $\quad \arg\inf\left(x \mapsto \phi(x+c)\right) = \left(\arg\inf\left(x \mapsto \phi(x)\right)\right) - c$.
Donc en définitive

$$T_1(X_2-X_1,\ldots,X_n-X_1) = (\arg\inf\psi) - X_1 = T^* - X_1$$

Autrement dit T^* est équivariant d'après la question précédente.

(b)

$$\begin{aligned} &E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n] \\ = &\int \varphi(x_1,x_1+y_2,\ldots,x_1+y_n)d\mathbb{P}(X_1=x_1|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n) \\ = &\int \varphi(x_1,x_1+y_2,\ldots,x_1+y_n)\frac{f(x_1-\theta)\prod_{i=2}^n f(x_1+y_i-\theta)}{\left[\int f(x_1-\theta)\prod_{i=2}^n f(x_1+y_i-\theta)dx_1\right]}dx_1 \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables $u = \theta - x_1 + c$ (c constante quelconque) dans deux intégrales :

$$\begin{aligned} &E_\theta[\varphi(X_1,\ldots,X_n)|X_2-X_1=y_2,\ldots,X_n-X_1=y_n] \\ = &\int \varphi(c+\theta-u,c+y_2+\theta-u,\ldots)\frac{f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+y_i-u)}{\left[\int f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+y_i-u)du\right]}du \end{aligned}$$

La relation suivante est alors vraie pour tout $c \in \mathbb{R}^k$:

$$
\begin{aligned}
&E_\theta[\varphi(X_1,\dots,X_n)|X_2-X_1,\dots,X_n-X_1] \\
= &\int \varphi(c+\theta-u, c+X_2-X_1+\theta-u,\dots)\frac{f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+X_i-X_1-u)}{[\int f(c-u)\prod_{i=2}^n f(c+X_i-X_1-u)du]}du
\end{aligned}
$$

elle est donc vraie aussi pour $c = X_1$:

$$
\begin{aligned}
&E_\theta[\varphi(X_1,\dots,X_n)|X_2-X_1,\dots,X_n-X_1] \\
= &\int \varphi(X_1+\theta-u, X_2+\theta-u,\dots)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i-u)}{[\int f(X_1-u)\prod_{i=2}^n f(X_i-u)du]}du
\end{aligned}
$$

(c) Soit T un estimateur équivariant quelconque. On va montrer que T^* domine T. Pour cela, il suffit de prouver que $R_w(T,0) \geq R_w(T^*,0)$, selon le résultat de la question (2).

$$
\begin{aligned}
R_w(T,0) &= \mathbb{E}_0[w(T)] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0[w(T)|X_2-X_1,\dots,X_n-X_1]] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\int_{\mathbb{R}} w(T-u)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i-u)}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}du\right]
\end{aligned}
$$

Or par définition de T^*, pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$

$$
\int_{\mathbb{R}} w(T^*(x)-u)\prod_{i=1}^n f(x_i-u)du \leq \int_{\mathbb{R}} w(t-u)\prod_{i=1}^n f(x_i-u)du
$$

donc

$$
\begin{aligned}
R_w(T,0) &\geq \mathbb{E}_0\left[\int_{\mathbb{R}} w(T^*(X)-u)\frac{\prod_{i=1}^n f(X_i-u)}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}du\right] \\
&= R_w(T^*,0)
\end{aligned}
$$

Donc T^* domine T.

☞ Q4 Si $w(x-y) = \|x-y\|^2$, ψ vaut :

$$
\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^k}\|x-u\|^2\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du
$$

et le gradient $\psi'(x)$ vaut : $\psi'(x) = \int_{\mathbb{R}^k} 2(x-u)\ \prod_{i=1}^n f(X_i-u)du$. T^* est défini par l'équation $\psi'(T^*) = 0$, qui se réduit ici à :

$$
T^* = \frac{\int_{\mathbb{R}^k} u\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}{\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^n f(X_i-u)du}
$$

☞ Q5 Lorsque $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a

$$
T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i
$$

Si $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$, il vient

$$
T^* = \frac{\min(X_i)+\max(X_i)}{2}
$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 Les observations étant les effectifs N_k de chaque classe $k \in [\![1,K]\!]$, la vraisemblance s'écrit

$$
L_{N_1,\dots,N_K}(n_1,\dots,n_K;p_1,\dots,p_K) = \frac{n!}{n_1!\cdots n_K!}\prod_{k=1}^K {p_k}^{n_k} \quad \text{en notant } n = n_1+\cdots+n_K
$$

La maximisation sans hypothèse conduit aux conditions nécessaires du premier ordre, en n'om tant la contrainte $p_1+\cdots+p_K = 1$

$$
\begin{array}{l}
\max_{p_1,\dots,p_K}\left(\sum_{k=1}^K n_k \ln p_k\right) \\
\text{s.c. } \{p_1+\cdots+p_K = 1
\end{array}
$$

Le lagrangien associé s'écrit

$$
\mathcal{L}(p_1,\dots,p_K,\lambda) = \sum_{k=1}^K n_k\ln p_k + \lambda(1-\sum_{k=1}^K p_k)
$$

et il vient

$$
\forall k \in [\![1,K]\!],\ \frac{n_k}{\widehat{p_k}} - \lambda = 0
$$

Or en sommant de 1 à K il vient

$$
n = \sum_{k=1}^K n_k = \lambda\sum_{k=1}^K p_k = \lambda
$$

de sorte que finalement

$$
\boxed{\forall k \in [\![1,K-1]\!],\ \widehat{p_k} = \frac{n_k}{n}}
$$

(et on vérifie que cette condition est également suffisante).
La maximisation sous l'hypothèse H_0 correspond au programme de maximisation sous contrainte

$$\begin{array}{l} \max_{p_1,\dots,p_K}\left(\sum_{k=1}^K n_k \ln p_k\right) \\ \text{s.c.}\left\{\begin{array}{l} p_1+\cdots+p_K=1 \\ p_1+p_2=\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}$$

Le lagrangien associé s'écrit

$$\mathcal{L}(p_1,\dots,p_K,\lambda,\mu)=\sum_{k=1}^K n_k\ln p_k+\lambda(1-\sum_{k=1}^K p_k)+\mu(\frac{1}{2}-p_1-p_2)$$

et il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_1}=\frac{n_1}{p_1}-\lambda-\mu \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_2}=\frac{n_2}{p_2}-\lambda-\mu \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_k}=\frac{n_k}{p_k}-\lambda, \quad \forall k\in[\![3,K]\!] \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}=1-\sum_{k=1}^K p_k \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mu}=\frac{1}{2}-p_1-p_2 \end{array}\right.$$

d'où finalement

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \widehat{p_1^0}=\frac{n_1}{2(n_1+n_2)} \\ \widehat{p_2^0}=\frac{n_2}{2(n_1+n_2)} \\ \widehat{p_k^0}=\frac{n_k}{2(n_3+\cdots+n_K)}, \quad \forall k\in[\![3,K]\!] \end{array}\right.}$$

☞ Q2 Pour déterminer la statistique de Wald, appliquons le Théorème Central Limite à $\begin{pmatrix}\widehat{p_1}\\ \vdots \\ \widehat{p_K}\end{pmatrix}$; pour ce faire, calculons tout d'abord sa variance.
On a en effet pour $k\in[\![1,K]\!]$, $\widehat{p_k}=\frac{n_k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i\in C_k}$ où C_k désigne la k-ième classe ; or

$$\mathbb{V}\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k}\right)=p_k\cdot 1-(p_k)^2=p_k(1-p_k)$$

et

$$\mathbb{C}ov\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k},\mathbb{1}_{X_j\in C_l}\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k}\cdot\mathbb{1}_{X_j\in C_l}\right)-\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_i\in C_k}\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_j\in C_l}\right)=-p_kp_l\mathbb{1}_{i=j}$$

de sorte que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{p_1}-p_1\\ \vdots \\ \widehat{p_K}-p_K\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p1p_2 & \cdots & -p_1p_K \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_Kp_1 & -p_Kp_2 & \cdots & p_K(1-p_K)\end{pmatrix}\right)$$

Posons finalement $g:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^K & \to & \mathbb{R}\\ x_1,\dots,x_K & \mapsto & x_1+x_2\end{pmatrix}$; alors d'après le théorème de Slutsky
H_0 est vraie on a

$$\begin{array}{rcl}\sqrt{n}\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right) & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} & \mathcal{N}\left(0,\left(\frac{\partial g}{\partial p_1,\dots,p_K}\right)'\mathbb{V}\left(\begin{pmatrix}\widehat{p_1}\\ \vdots\\ \widehat{p_K}\end{pmatrix}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_1,\dots,p_K}\right)\right) \\ & = & \mathcal{N}\left(0,(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)\right)\end{array}$$

d'où en centrant et en réduisant, puis en élevant au carré

$$\boxed{\xi_n^W=n\frac{\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\widehat{p_1}+\widehat{p_2})(1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2})}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\chi^2_1}$$

☞ Q3 (a) On sait que $\widehat{p_3^0}\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}p_3$ et que $\widehat{p_3}\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}p_3$.
Soit donc pour $\lambda\in\mathbb{R}$ $p_3(\lambda)=\lambda\widehat{p_3^0}+(1-\lambda)\widehat{p_3}\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}p_3$.
Alors

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{V}_{as}\left(p_3(\lambda)\right) & = & \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}+\lambda\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\right) \\ & = & \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)+2\lambda\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)+\lambda^2\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right) \\ & \geq & \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)\end{array}$$

car $\widehat{p_3^0}$ est asymptotiquement efficace, car sa variance est égale à la borne FDCR $I(p_3)$
Par conséquent le polynôme du second degré $P(\mathbb{X})=\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\mathbb{X}^2+2\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3}-\right.$
est de signe constant. En particulier,

$$\mathbb{C}ov_{as}\left(\widehat{p_3^0},\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)=0$$

et donc

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right) & = & \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\right) \\ & = & \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)+\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}-\widehat{p_3}\right)\end{array}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}-\widehat{p_3^0}\right)=\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right)-\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right)}$$

(b) La loi asymptotique de $\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)$ se déduit de celle de $\begin{pmatrix} \widehat{p_1} \\ \vdots \\ \widehat{p_K} \end{pmatrix}$ déterminée précédemment.

Soit en effet $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^K & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_K) & \mapsto & \frac{x_3}{2(1-x_1-x_2)} \end{pmatrix}$; ainsi $g\left(\widehat{p_3}\right) = \widehat{p_3^0}$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_1}(p_1, \dots, p_K) &= \frac{p_3}{2\left(1 - p_1 - p_2\right)^2} \\
&= 2p_3 \\
\frac{\partial g}{\partial x_2}(p_1, \dots, p_K) &= \frac{p_3}{2\left(1 - p_1 - p_2\right)^2} \\
&= 2p_3 \\
\frac{\partial g}{\partial x_3}(p_1, \dots, p_K) &= 1 \\
\frac{\partial g}{\partial x_k}(p_1, \dots, p_K) &= 0, \quad \forall k \in [\![3, K]\!]
\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Slutsky

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\widehat{p_3^0} - p_3\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} 2p_3 \\ 2p_3 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \cdots & -p_1p_K \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_Kp_1 & -p_Kp_2 & \cdots & p_K(1-p_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2p_3 \\ 2p_3 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} 2p_3 \\ 2p_3 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} 2p_3p_1(1-p_1) - 2p_1p_2p_3 - p_1p_3 \\ -2p_1p_2p_3 + 2p_3p_2(1-p_2) - p_2p_3 \\ -2{p_3}^2p_1 - 2{p_3}^2p_2 + p_3(1-p_3) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(0, \left\{ \begin{array}{l} 4{p_3}^2p_1(1-p_1) - 4p_1p_2{p_3}^2 - 2p_1{p_3}^2 \\ -4p_1p_2{p_3}^2 + 4{p_3}^2p_2(1-p_2) - 2p_2{p_3}^2 \\ -2{p_3}^2p_1 - 2{p_3}^2p_2 + p_3(1-p_3) \end{array}\right.\right) \\
&= \mathcal{N}\left(0, \left\{ \begin{array}{l} [4p_1(1-p_1) - 4p_1p_2 - 2p_1 - 4p_1p_2 + \\ \quad 4p_2(1-p_2) - 2p_2 - 2p_1 - 2p_2]\, {p_3}^2 \\ -{p_3}^2 + p_3 \end{array}\right.\right) \\
&= \mathcal{N}\left(0, \left\{-4(p_1+p_2)^2{p_3}^2 - {p_3}^2 + p_3\right)\right. \\
&= \boxed{\mathcal{N}\left(0, p_3(1-2p_3)\right)} \quad \text{sous } H_0 : \text{“ } p_1 + p_2 = \frac{1}{2} \text{ ”}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right) = p_3(1-2p_3)}$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right) &= \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3}\right) - \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3^0}\right) \\
&= p_3(1-p_3) - p_3(1-2p_3) \\
&= \boxed{{p_3}^2}
\end{aligned}$$

Posons donc $\mathbb{V}_{as}\widehat{\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)} = \widehat{p_3}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{V}_{as}\left(\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0}\right)$. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}
\widehat{p_3} - \widehat{p_3^0} &= \frac{n_3}{n} - \frac{n_3}{2(n - n_1 - n2)} \\
&= \frac{n_3}{n}\left(1 - \frac{1}{2(1 - \frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n}}\right) \\
&= \widehat{p_3}\left(1 - \frac{1}{2(1 - \widehat{p_1} - \widehat{p_2})}\right) \\
&= \widehat{p_3}\frac{1 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}{2 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\xi_n^H &= n\frac{\widehat{p_3}^2\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2}{\widehat{p_3}^2} \\
&= \boxed{n\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2
\end{aligned}$$

(d) Si H_0 est fausse, alors $p_1 + p_2 \neq \frac{1}{2}$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\xi_n^H &= \left(\frac{1 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}{2 - 2\widehat{p_1} - 2\widehat{p_2}}\right)^2 \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \left(\frac{p_1 + p_2 - \frac{1}{2}}{1 - p_1 - p_2}\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\xi_n^H \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} (+\infty)$$

Ainsi, si H_0 est fausse alors $\mathbb{P}\left(\xi_n^H < q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left((+\infty) < q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}\right) = 0$: le test d'Hausman est donc convergent.

(e) On a enfin

$$\begin{aligned}\frac{\xi_n^H}{\xi_n^W} &= \frac{n\left(\frac{1-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}{2-2\widehat{p_1}-2\widehat{p_2}}\right)^2}{n\frac{\left(\widehat{p_1}+\widehat{p_2}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\widehat{p_1}+\widehat{p_2})(1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2})}} \\ &= \frac{\widehat{p_1}+\widehat{p_2}}{1-\widehat{p_1}-\widehat{p_2}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} (1)\end{aligned}$$

Ainsi, les deux statistiques de test ξ_n^H et ξ_n^W sont asymptotiquement équivalentes.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 5

☞ Q1 (a) Comme $[\![0, N-1]\!] \subsetneq \mathbb{N}$ $f_{\phi,s}$ n'est pas injective, soient $i < j$ les deux premiers entiers tels que $f_{\phi,s}(i) = f_{\phi,s}(j)$, et posons $T = j - i \geq 1$. Alors $f_{\phi,s}(i+T) = f_{\phi,s}(i)$, donc $f_{\phi,s}(i+1+T) = f_{\phi,s}(i+1)$ et par récurrence $\forall k \geq i, f_{\phi,s}(k+T) = f_{\phi,s}(k)$ et donc $f_{\phi,s}$ et périodique au-delà de i.

Remarquons que la suite $(f_{\phi,s}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est *déterministe* et pas aléatoire ; Il s'agit de déterminer si elle peut être la suite des *réalisations* d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[\![0, N-1]\!]$.

Définissons $g(k) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}|\{i \in \mathbb{N}/y(i) = k\}|$ la fréquence empirique de $k \in [\![0, N-1]\!]$; alors $f_{\phi,s}$ "génère" une variable distribuée selon la loi $\mathcal{L}$ sur $[\![0, N-1]\!]$ si la fréquence empirique de tout k est égale à sa probabilité selon $\mathcal{L}$.

En particulier, $f_{\phi,s}$ est uniformément distribuée *ssi* $\forall k \in [\![0, N-1]\!] f_{\phi,s}(k) = \frac{1}{N-1}$.

(b) On a $T \leq N$: en effet pour tout $a \in \mathbb{N}$, $t \mapsto f_{\phi,s}(a+t)$ ne peut pas être injective de $[\![0, N]\!]$ vers $[\![0, N-1]\!]$, donc il existe $i < j \in [\![0, N]\!]$ tel que $f_{\phi,s}(a+j) = f_{\phi,s}(a+i)$, et par suite $T_{\phi,s} \leq N$.

Or si $T_{\phi,s} < N$, alors $f_{\phi,s}([i, +\infty[) = \{f_{\phi,s}(i), f_{\phi,s}(i+1), \ldots, f_{\phi,s}(i+T_{\phi,s}-1)\}$, donc $|f_{\phi,s}([i, +\infty[)| \leq T_{\phi,s} < N$, et donc $f_{\phi,s}([i, +\infty[) \subsetneq [\![0, N-1]\!]$. Ainsi l'un au moins des entiers de $[\![0, N-1]\!]$ n'est plus jamais atteint au-delà de i, et sa fréquence empirique est donc nulle : $f_{\phi,s}$ ne "génère" pas une loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$.

Remarquons réciproquement que si $f_{\phi,s}$ est périodique de période exactement N, alors elle est uniforme.

Ainsi, un "bon générateur" de nombres pseudo-aléatoires sur $[\![0, N-1]\!]$ est périodique de période N.

(c) Par définition de la division euclidienne, $f_{\psi_{a,c,p,s}}$ est à valeur dans $[\![0, p-1]\!]$ donc pour qu'elle soit un bon générateur sur $[\![0, N-1]\!]$ il est nécessaire que $p = N$.

Par ailleurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et sa période divise p. Donc si c =
et si p est premier, $f_{\psi_{a,c,p,s}}$ est de période 1 ou p, donc p (car $a \geq 2$), et est donc un b
générateur uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$ (en fait il suffit que p soit premier avec a, et il n'
pas nécessaire que $c = 0$).

Ces générateurs ont été introduits par Lehmer et sont encore souvent utilisés[11]. On s
notamment que $2^{31} - 1 = 2147483647$ est premier (vérifié par Euler en 1750), ainsi q
$2^{61} - 1$ (Pervouchine 1883) et $2^{127} - 1$ (Lucas, 1876). [12]

☞ Q2 (a) Il s'agit d'une sorte de critère ergodique : la suite x est suffisamment "équi-répartie"
"équilibrée" pour que sommer aux points chargés par x ou sommer en tout point de [0
soit équivalent.

(b) Supposons que r est rationnel.

– Supposons tout d'abord que $f_p = x \mapsto e^{2\pi ipx}$, $p \in \mathbb{Z}$. Par définition $rk = frac(rk)$
$E(rk)$ et donc

$$\begin{aligned}S_n^x(f_p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi ipx_k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{(2p\pi i)\,rk} \text{ car } e^{(2p\pi i)E(rk)} = 1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{(2p\pi i)\,r}\right)^k\end{aligned}$$

Comme r est irrationnel, si $p \neq 0$, alors $e^{(2p\pi i)r} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned}S_n^x(f_p) &= \frac{1}{n}\frac{e^{(2p\pi i)r} - \left(e^{(2p\pi i)r}\right)^{n+1}}{1 - e^{(2p\pi i)r}} \\ &= \frac{1}{n}e^{(2p\pi i)r\frac{n+1}{2}}\frac{\sin(\pi nr)}{\sin(\pi r)}\end{aligned}$$

et donc

$$|S_n^x(f_p)| \leq \frac{1}{n}\frac{1}{|\sin(\pi r)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

soit

$$S_n^x(f_p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[0,1]} e^{2\pi piu}du$$

Lorsque $p = 0$, on a bien-sûr $S_n^x(f_0) = 1 = \int_{[0,1]} f_0$.

– Le résultat reste donc vrai par linéarité de l'intégrale pour tout polynôme trigonor
trique.

[11] cf Knuth, D.E., 1981 ; The Art of Computer Programming, Volume 2 Seminumerical Algorithms, Addison-Wes
Reading Mass., 688 pages, ISBN 0-201-03822-6

[12] Parmi les nombres sous la forme $2^n - 1$ seuls ceux où $n \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127\}$ sont premiers
non pas seulement pour $n \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257\}$ comme prétendu incorrectement par Marin Merse
dans la préface de Cogitata Physica-Mathematica (1644). Parmi les $2^{2^n-1} - 1$ courants en informatique, ceux p
$n \in \{2, 3, 5, 7\}$ sont premiers.

– Soit enfin f continue sur $[0,1]$; d'après le théorème de Dirichlet f est limite *uniforme* d'une suite $(P_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques. Donc

$$\begin{aligned}
S_n^x(f) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lim_{l\to\infty} P_l(x_k)\\
&= \lim_{k\to\infty} S_{nb}^x(P_k) \quad \text{car la somme } \sum_{k=1}^{n} \text{ est finie}\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]} P_l \quad \text{d'après le résultat précédent}\\
&= \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} P_l \quad \text{cqr la convergence de } (P_l)_{l\in\mathbb{N}} \text{ est uniforme}\\
&= \int_{[0,1]} f
\end{aligned}$$

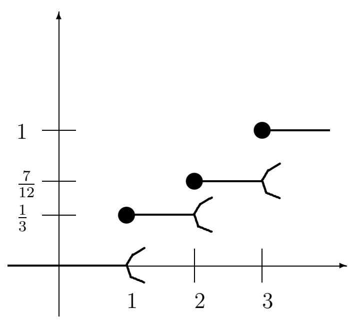
ce qui achève la preuve.

Dans le cas en revanche où $r = \frac{a}{b}$ est rationnel, alors $(rk)_{k\in\mathbb{N}} = \{0, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}\}$: la suite x ne prend que b valeurs distinctes et le résultat est faux, par exemple lorsque f est la fonction affine par morceaux telle que

$$\begin{cases} f\left(\frac{k}{b}\right) &= 1\\ f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{b}\right) &= 2\end{cases}$$

car alors $S_n^x(f) = 1 < \frac{3}{2} = \int_{[0,1]} f$.

☞ Q3 (a) Le graphe de $F_{\mathcal{L}}$ est le suivant :



On a donc

$$F_{\mathcal{L}}^{-1}(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } 0 = t\\ 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{3}\\ 2 & \text{si } \frac{1}{3} \le t < \frac{7}{12}\\ 3 & \text{si } \frac{7}{12} \le t \le 1\end{cases}$$

Par conséquent lorsque $U \leadsto \mathcal{U}_{[0,1]}$, $X = F_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ ne charge positivement que $\{1,2,3\}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}\left(0 \le U < \tfrac{1}{3}\right) &= \tfrac{1}{3}\\
\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{1}{3} \le U < \tfrac{7}{12}\right) &= \tfrac{1}{4}\\
\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{7}{12} \le U < 1\right) &= \tfrac{5}{12}
\end{aligned}$$

de sorte que $X \leadsto \mathcal{L}$.

(b) On a pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le t) &= \mathbb{P}\left(F_{\mathcal{L}}^{-1}(U) \le t\right)\\
&= \mathbb{P}(U \le F_{\mathcal{L}}(t)) \quad \text{car } F_{\mathcal{L}} \text{ est croissante}\\
&= F_{\mathcal{L}}(t) \quad \text{car } U \leadsto U_{[0,1]}
\end{aligned}$$

Par conséquent $X \leadsto \mathcal{L}$.

Remarquons que $F_{\mathcal{L}}$ étant strictement croissante, c'est sa continuité qui nous assure qu'e est bijective.

(c)

$$F_{\mathcal{E}(\lambda)}(u) = \int_0^u \lambda e^{-\lambda x}dx = \left(1 - e^{-\lambda u}\right)$$

Soit donc $U \leadsto \mathcal{U}_{[0,1]}$; alors $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leadsto \mathcal{E}(\lambda)$; or par ailleurs $(1-U) \leadsto \mathcal{U}_{[0,1]}$, donc $-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \leadsto \mathcal{E}(\lambda)$.

On génère donc u_n réalisation de $U \leadsto \mathcal{U}_{[0,1]}$ et on renvoit $x_n = -\frac{1}{\lambda}\ln(u_n)$.

(d) Soit $G : \mathbb{R}^2 \to R^n$ absolument continue ; alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(G(R^2,\theta)\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} G\left(x^2+y^2, \arctan\frac{y}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dyxy\\
&= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} G\left(\rho^2,\theta\right)\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho d\theta
\end{aligned}$$

par le changement de variables en coordonnées pôlaires [13]. En particulier si G est

[13]Soit $f : \mathbb{R}^2 \to E$ mesurable absolument continue, et soit à calculer $\int_{\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$.
Posons

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\\ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2+y^2\\ \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{si } x<0\end{cases}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

ϕ est différentiable et de jacobienne

$$Jac(\phi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y\\ -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} & \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\end{pmatrix}$$

donc de jacobien

$$\left|Jac(\phi)_{(x,y)}\right| = 2x\frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - 2y\left(-\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = 2$$

de sorte que

$$\int_{\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\phi(\mathcal{A})} f\left(\phi^{-1}(\rho^2,\theta)\right)2\left(\frac{1}{2}\rho d\rho\right)d\theta$$

produit $G(a,b) = G_1(a)G_2(b)$ alors

$$\mathbb{E}\left(G_1(R^2)G_2(\theta)\right) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{G_1(\rho^2)e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho}_{\text{ne dépend que de }\rho} d\rho\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi} \underbrace{G_2(\theta)}_{\text{que de }\theta} d\theta\right)$$

Par conséquent, les variables R^2 et θ sont indépendantes.

En outre on a pour toute G_1 absolument continue

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(G_1(R^2)\right) &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sigma^2} G_1(\rho^2) e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2\sigma^2} G_1(u) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u} du\end{aligned}$$

et donc $R^2 \rightsquigarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2\sigma^2})$.

Par ailleurs pour toute G_2 absolument continue

$$\mathbb{E}\left(G_2(\theta)\right) = \int_{[0,2\pi[} G_2(\theta)\frac{1}{2\pi} d\theta$$

et donc $\theta \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$

Pour générer une réalisation d'une variable qui suivrait la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on génère donc $\frac{\theta_n}{2\pi}$ uniformément sur $[0,1]$ et r_n^2 selon la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{\sigma^2})$ et on renvoit le nombre

$$\boxed{x_n = m + \sqrt{r_n^2}\cos\left(2\pi\left(\frac{\theta_n}{2\pi}\right)\right)}$$

(e)

$$F_{\mathcal{W}(\alpha,\beta)}(y) = \int_0^y f_{\mathcal{W}(\alpha,\beta)}(x)dx = 1 - e^{\alpha y^\beta}$$

et donc on génère u_n réalisation de $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ et on renvoit

$$\boxed{x_n = \left(-\frac{1}{\alpha}\ln(u_n)\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

(f) La densité $f_{\mathcal{P}(\lambda)}$ s'écrit sur $\mathbb{R}$ comme une somme infinie de masses de Diracq $f_{\mathcal{P}(\lambda)}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\delta_k(s)$ donc un algorithme consiste à générer u uniformément sur $[0,1]$ et à le placer dans l'un des intervalles $[S_n, S_{n+1}[$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Le calcul des $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut néanmoins être dissuasif en pratique ; il est possible en fait de s'en passer.

Soient en effet $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{iid}{\rightsquigarrow} \mathcal{E}(\mu)$; alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_1 + \cdots + Y_n \rightsquigarrow \Gamma(n,\mu)$ (voir TD 1, exercice 2), et donc

$$\mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_n > 1\right) = \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt$$

Définissons alors $\nu(Y) = \min\{n \,/\, Y_1 + \cdots + Y_n > 1\} - 1$; alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\nu(Y) = n\right) &= \mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_{n+1} > 1\right) - \mathbb{P}\left(Y_1 + \cdots + Y_n > 1\right) \\ &= \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt - \int_{\frac{1}{\mu}}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\mu^n n!} e^{-\frac{1}{\mu}}\end{aligned}$$

et donc $\nu(Y) \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

Ainsi, engendrer une loi de Poisson de paramètre λ revient à engendrer une succession lois exponentielles d'espérance $\frac{1}{\lambda}$. Or $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mathcal{W}\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$ donc d'après la question précéde si $U \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $-\frac{1}{\lambda}\ln U \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Par conséquent posons $U_i = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}Y_i}$; U_i uniforme, et en outre

$$\begin{aligned}Y_1 + \cdots + Y_n > 1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} \ln U_k > 1 \\ &\Leftrightarrow U_1 \cdots U_n > e^{-\lambda} \\ &\Leftrightarrow X_n > e^{-\lambda}\end{aligned}$$

où $X_n = U_1 \cdots U_n$

Définissons donc finalement $N(X) = \min\{n / X_n < e^{-\lambda}\} - 1$; alors $N(X) = \nu(X)$, d $N(X) \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Pour générer une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, il suffit donc de générer une suite $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ uniformes [0,1], et de renvoyer le premier entier $n-1$ tel que $u_1 \cdots u_n > e^{-\lambda}$.

Un tel algorithme s'écrit : [14]

$n \leftarrow 0$ et $x \leftarrow 1$

Tant que $x > e^{-\lambda}$

  Générer u_n uniformément sur $[0,1]$

  $x \leftarrow x \times u_n$ et $n \leftarrow n+1$

Renvoyer n

⋆
⋆ ⋆

[14] Pour un exposé plus complet, voir D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 2, p 132.